

Ecuaciones Diferenciales - 1° cuatrimestre 2012

ECUACIÓN DEL CALOR

1. Sea u una solución regular de $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.
 - (a) Mostrar que $u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también resuelve la ecuación del calor para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - (b) Mostrar que $v(x, t) = x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t)$ también resuelve la ecuación del calor.
2. Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre u necesarias para su validez.
 - (a) *Combinaciones lineales*: Si u_1 y u_2 son funciones calóricas, entonces $\alpha u_1 + \beta u_2$ es calórica.
 - (b) *Traslaciones*: Si $u(x, t)$ es calórica, entonces $u(x - \xi, t - \tau)$ es calórica.
 - (c) *Diferenciación respecto a parámetros*: Si $u(x, t, \alpha)$ es calórica para cada α , entonces $\frac{\partial u}{\partial \alpha}(x, t, \alpha)$ es calórica para cada α .
 - (d) *Integración respecto a parámetros*: Si $u(x, t, \alpha)$ es calórica para cada α , entonces $\int_a^b u(x, t, \alpha) d\alpha$ es calórica.
 - (e) *Diferenciación respecto a x y t* : Si $u(x, t)$ es calórica, entonces $\frac{\partial^{|\alpha|+m} u}{\partial x^\alpha \partial t^m}(x, t)$ es calórica.
 - (f) *Integración respecto x y t* : Si $u(x, t)$ es calórica, $n = 1$, entonces $\int_{x_0}^x u(\xi, t) d\xi$ es calórica si $u_x(x_0, t) = 0$ y $\int_a^t u(x, \tau) d\tau$ es calórica si $u(x, a) = 0$.
 - (g) *Convoluciones*: Si $u(x, t)$ es calórica, entonces $\int u(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$ y $\int_a^b u(x, t - \tau) \varphi(\tau) d\tau$ son calóricas.
3. (a) Si $\phi = \phi(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, es una solución con simetría esférica de la ecuación del calor en \mathbb{R}^3 (i.e. $\phi(x, t) = w(|x|, t)$ con $w : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$), entonces ϕ satisface
 - (a) Si $\phi = \phi(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, es una solución con simetría esférica de la ecuación del calor en \mathbb{R}^3 (i.e. $\phi(x, t) = w(|x|, t)$ con $w : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$), entonces ϕ satisface

$$\phi_{rr} + \frac{2}{r}\phi_r = \phi_t \quad t > 0, r > 0. \quad (1)$$

- (b) Mostrar que la ecuación (1) puede reducirse mediante el cambio $\psi = r\phi$ a la ecuación del calor unidimensional.

4. Para $i = 1, \dots, n$ consideramos $u_i = u_i(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, soluciones de

$$\begin{cases} (u_i)_t = (u_i)_{xx} \\ u_i(x, 0) = \varphi_i(x). \end{cases}$$

Probar que si definimos para $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$,

$$u(x, t) = u_1(x_1, t)u_2(x_2, t)\dots u_n(x_n, t)$$

$$\varphi(x) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\dots\varphi_n(x_n)$$

entonces u es solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ con $u(x, 0) = \varphi(x)$.

5. Supongamos $n = 1$ y $u(x, t) \equiv v(x^2/t)$.

- (a) Mostrar que $u_t = u_{xx}$ si y sólo si

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0. \quad (2)$$

- (b) Verificar que la solución general de (2) es

$$v(z) = C_1 \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + C_2.$$

- (c) Derivar $v(x^2/t)$ respecto a x y seleccionar C_1 adecuadamente para obtener la solución fundamental Φ .

6. Sea

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^N, t > 0),$$

donde α y β son constantes.

- (a) Verificar que u satisface la ecuación del calor si y sólo si v satisface

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0,$$

para $y = t^{-\beta} x$.

- (b) Verificar que si $\beta = 1/2$, v satisface

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot Dv + \Delta v = 0.$$

- (c) Verificar que si v es radial, i.e. $v(y) = w(|y|)$ para $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces w satisface

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$

donde $r = |y|$, $' = \frac{d}{dr}$.

- (d) Tomar $\alpha = n/2$ y hallar la solución fundamental de la ecuación del calor.

7. *Método de similitud.*

- (a) Hallar todas las soluciones de la ecuación del calor unidimensional que satisfacen

$$\phi(x, t) = \phi(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (b) Mostrar que el método de similitud dado en (a) también puede aplicarse a la ecuación del calor no lineal

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad K \in C^1.$$

8. (a) Sea $a(t) > 0$ una función continua y sea $u(x, t)$ una solución regular de $u_t = a \Delta u$. Mostrar que existe un cambio de variables $t = \phi(\tau)$ tal que $U(x, \tau) = u(x, \phi(\tau))$ es solución de la ecuación del calor.
- (b) Sea $b(t) \in \mathbb{R}^n$ continua y sea $u(x, t)$ solución regular de $u_t = \Delta u + b \cdot \nabla u$. Mostrar que existe un cambio de variables $x = \psi(y, t)$ tal que $U(y, t) = u(\psi(y, t), t)$ es solución de la ecuación del calor.
- (c) Sea $c(t) \in \mathbb{R}$ continua y sea $u(x, t)$ solución regular de $u_t + cu = \Delta u$. Mostrar que existe $\varphi(t)$ derivable, tal que $U(x, t) = u(x, t)\varphi(t)$ es solución de la ecuación del calor.
- (d) Escribir una fórmula explícita para una solución de

$$\begin{cases} au_t + cu = \Delta u + b \cdot \nabla u + f & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

donde $c(t) \in \mathbb{R}$, $a(t) > 0$ y $b(t) \in \mathbb{R}^n$ son continuas.

9. *Principio de Duhamel*

Sea u la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = g(x, t) & \text{en } (0, L) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{en } t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

Probar que u puede ser representada en la forma

$$u(x, t) = \int_0^t \Phi(x, t; s) ds,$$

donde Φ es la solución del problema

$$\begin{cases} \Phi_t - \Phi_{xx} = 0 & \text{en } (0, L) \times (s, +\infty), \\ \Phi(0, t; s) = \Phi(L, t; s) = 0 & \text{en } t > s, \\ \Phi(x, s; s) = g(x, s) & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

10. Usar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = g(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde f y $g(\cdot, t)$ para cada t fijo, son funciones de \mathcal{S} .

11. Deduzca la fórmula explícita

$$u(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{\frac{-x^2}{4(t-s)}} h(s) ds$$

para la solución de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = h(t), \end{cases}$$

donde $h(0) = 0$. (Pista: Sea $v(x, t) = u(x, t) - h(t)$ y extienda a v por imparidad.)

12. Mostrar que la solución acotada de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

viene dada por la fórmula

$$u(x, t) = \int_0^\infty N(x, \xi, t) f(\xi) d\xi,$$

donde $N(x, \xi, t) = K(x - \xi, t) + K(x + \xi, t)$ y K es la solución fundamental de la ecuación del calor. (Pista: Extender f por paridad a $-\infty < x < 0$ y resolver el problema de valores iniciales para la f extendida.)

13. Sea $u(x, t)$ solución del problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dada por la convolución de φ en la variable x con la solución fundamental. Probar que si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}) \forall t > 0$ y

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx, \quad \forall t > 0.$$

14. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Notamos $U_T = U \times (0, T)$ y $\Gamma_T = (\bar{U} \times \{0\}) \cup (\partial U \times (0, T))$ la frontera parabólica de U_T . Decimos que $v \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ es una *subsolución* de la ecuación del calor si

$$v_t - \Delta v \leq 0 \text{ en } U_T.$$

- (a) Probar que $\max_{U_T} v = \max_{\Gamma_T} v$.
- (b) Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un función suave y convexa. Probar que si u es solución de la ecuación del calor y $v = \phi(u)$, entonces v es una subsolución.
- (c) Probar que $v = |\nabla u|^2 + u_t^2$ es una subsolución si u es una solución de la ecuación del calor.
15. (a) Sea $Q_R(x, t) = B(x, R) \times (t - R^2, t)$. Probar que si $u(x, t)$ es solución de la ecuación del calor en $Q_2(0, 0)$, existe una constante C universal tal que

$$\max_{Q_1(0,0)} |\nabla_x u(x, t)| \leq C \max_{Q_2(0,0)} |u(x, t)|.$$

- (b) Con la notación del ejercicio anterior, probar que si $K \subset \overline{U_T} \setminus \Gamma_T$, K compacto, existe entonces una constante C que depende de $\text{dist}(K, \Gamma_T)$ tal que

$$\max_K |\nabla_x u(x, t)| \leq C \max_{U_T} |u(x, t)|.$$

16. Sea $U_T = U \times (0, T)$ y sean u_n soluciones regulares del siguiente problema

$$\begin{cases} (u_n)_t - \Delta u_n = 0 & \text{en } U_T \\ u_n = f_n & \text{en } \Gamma_T, \end{cases}$$

donde Γ_T es la frontera parabólica de U_T . Probar que si $f_n \rightarrow f$ uniformemente en Γ_T , entonces existe u regular tal que $u_n \rightarrow u$ uniformemente sobre U_T y u es solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } U_T \\ u = f & \text{en } \Gamma_T. \end{cases}$$

17. Sea u una solución acotada de la ecuación del calor en \mathbb{R}^{n+1} . Probar que u es constante. ¿Es cierto el resultado si eliminamos la hipótesis que u sea acotada?
18. Definimos

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

donde los coeficientes a_{ij}, b_i son continuos, $a_{ij} = a_{ji}$ y la matriz $A = (a_{ij})$ es definida positiva. Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado, definimos $U_T = U \times (0, T]$ y $\Gamma_T = \overline{U_T} - U_T$ la frontera parabólica de U_T . Probar que si $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ satisface

$$u_t - \mathcal{L}u = 0 \quad \text{en } U_T,$$

entonces

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

19. Con la notación del ejercicio anterior, sea $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ la solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x) & \text{en } U_T, \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_T. \end{cases}$$

Probar que si $f \leq 0$, entonces $u_t \leq 0$.

(Hint: Definir $w(x, t) = u(x, t + \varepsilon) - u(x, t)$, calcular $w_t - \Delta w$ y aplicar el principio del máximo.)

20. Consideremos el paseo aleatorio simétrico. Supongamos que en el punto $L = \bar{m}h + h/2 > 0$ se ubica una barrera perfectamente refractante. Por esto nos referimos que si una partícula llega al punto $L - h/2$ a tiempo t y se mueve hacia la derecha, entonces es reflejada y regresa al punto $L - h/2$ en el tiempo $t + \tau$.

Mostrar que cuando $h, \tau \rightarrow 0$ y $h^2/\tau = 2D$, $p = p(x, t)$ es una solución del problema

$$\begin{cases} p_t - Dp_{xx} = 0 & x < L, t > 0 \\ p(x, 0) = \delta & x < L \\ p_x(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Más aún $\int_{-\infty}^L p(x, t) dx = 1$. Calcular explícitamente la solución.

21. Consideremos el paseo aleatorio simétrico. Supongamos que en el punto $L = \bar{m}h > 0$ se ubica una barrera perfectamente absorbente. Por esto nos referimos a que si una partícula llega al punto $L - h$ a tiempo t y se mueve a la derecha, es absorbida y se detiene en L . Mostrar que cuando $h, \tau \rightarrow 0$ y $h^2/\tau = 2D$, $p = p(x, t)$ es una solución del problema

$$\begin{cases} p_t - Dp_{xx} = 0 & x < L, t > 0 \\ p(x, 0) = \delta & x < L \\ p(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Calcular explícitamente la solución.