Ecuaciones Diferenciales - 1° cuatrimestre 2012
TRANSFORMADA DE FOURIER

Notación: Notaremos por $\mathcal{F}[f]$ o $\hat{f}$ a la transformada de fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\mathcal{F}[f](y) = \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi ixy}dx.$$

1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y sean $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Si $g(x) = f(x)e^{2\pi i\alpha x}$, entonces $\mathcal{F}[g](y) = \mathcal{F}[f](y-\alpha)$.
   (b) Si $g(x) = f(x-\alpha)$, entonces $\mathcal{F}[g](y) = \mathcal{F}[f](y)e^{-2\pi i\alpha y}$.
   (c) Si $g(x) = f(x/\lambda)$, entonces $\mathcal{F}[g](y) = \lambda^n\mathcal{F}[f](\lambda y)$.
   (d) Si $g(x) = -2\pi ix_kf(x)$ y $g \in L^1$, entonces $\mathcal{F}[f]$ es derivable respecto a x_k y $\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g]$.

2. Mostrar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\mathcal{F}[f] \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

3. Probar que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]] = f(-x)$. Concluir que si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\mathcal{F}[f] = \lambda f$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces λ es una raíz cuarta de la unidad.

4. Probar que la transformada de Fourier de una función f será una función real si y sólo si f es par.

5. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:
   $\chi_{[-1,1]}$, $\exp(-a|x|)$, $1/(1+x^2)$, $\exp(-\pi x^2)$.

6. Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función L^1. Se definen
   (a) La Transformada-coseno de Fourier como

$$\mathcal{F}_c[f](y) = \int_0^\infty f(x)\cos(xy)\,dx.$$

   (b) La Transformada-seno de Fourier como

$$\mathcal{F}_s[f](y) = \int_0^\infty f(x)\sin(xy)\,dx.$$

   Mostrar que si se extiende f como una función par a toda la recta, tenemos

$$\mathcal{F}_c[f](y) = \pi\mathcal{F}[f](y),$$

   y que si se extiende a f como una función impar, se tiene

$$\mathcal{F}_s[f](y) = \frac{\pi}{i}\mathcal{F}[f](y).$$

7. Sea A una matriz de $n \times n$ no singular. ¿Cómo se relacionan la transformada de Fourier de $f(Ax)$ con la de $f(x)$? ($f \in L^1(\mathbb{R}^n)$). Usar este resultado para mostrar que la transformada de Fourier tranforma funciones radiales en funciones radiales.

8. Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es de soporte compacto, entonces $\mathcal{F}[f] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

9. Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\hat{f} = 0$ entonces $f = 0$.

10. Sea $f \in \mathcal{S}$. Probar que $f * f = f$ si y sólo si $f = 0$ a.e. ¿Qué sucede si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$?

11. (a) Probar que si ϕ, ϕ' y ϕ'' estan en $L^1(\mathbb{R}) \cap \{g \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0\}$ entonces existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}[f] = \phi$.

    (b) Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto y $U \subset \mathbb{R}$ abierto tal que $K \subset U$. Probar que existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}[f](y) = 1$ para todo $y \in K$ y $\mathcal{F}[f](y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R} - U$.

    (c) Probar que $\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R})]$ es denso en el conjunto de funciones continuas que tienden a cero en el infinito. (Sug.: Stone-Weierstrass)

12. Utilizar la transformade de Fourier para obtener una solucón explícita de la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2_+ = \{y > 0\}, \\ u(x,0) &= f(x) \quad \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

    donde $f \in L^2(\mathbb{R})$.

13. Utilizar la transformada de Fourier para obtener una solución explícita de la siguiente ecuación:

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{en } \mathbb{R}^n,$$

    donde $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

14. Idem el ejercicio anterior para la ecuación de Schrödinger

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u &= g \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

    donde u y g son funciones a valores complejos y $g \in L^2$.

15. Obtener la expresión integral de la solución de la ecuación de ondas unidimensional

$$\begin{cases} u_{tt} &= u_{xx} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= f(x) \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x) \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

    donde $f, g \in \mathcal{S}$.