UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Algunos problemas de optimización de forma

Antonella Ritorto

Director: Julián Fernández Bonder

Marzo, 2014

Índice general

Estudio de problemas de optimización de forma

(Resumen)

Un problema de optimización de forma se trata, en general, de un problema de minimización

$$\text{mín}\{F(A)\colon A \in \mathcal{A}\} \tag{0.0.1}$$

donde F es un función semicontinua inferior para la γ-convergencia de conjuntos y monótona decreciente con respecto a la inclusión, y $\mathcal{A}$ es una clase de dominios admisibles.

En esta tesis, estudiaremos la existencia de solución al problema de minimización cuando la clase de dominios admisibles $\mathcal{A}$ es el conjunto

$$\mathcal{A}(\Omega) = \Big\{A\colon A \subset \Omega, A \text{ cuasi-abierto}, |A| = c\Big\},$$

donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, y, luego,

$$\mathcal{A} = \Big\{A\colon A \subset \mathbb{R}^n, A \text{ cuasi-abierto}, |A| \le c\Big\},$$

donde $c > 0$ es una constante.

Palabras Claves: Optimización de forma, espacios de Sobolev, cuasi-abiertos.

Capítulo 1

Introducción

Para resolver un problema de optimización de forma

$$\min\{F(A)\colon A \in \mathcal{A}\} \tag{1.0.1}$$

donde F es un funcional de costo y $\mathcal{A}$ es una clase de dominios admisibles, podemos intentar usar el *método directo*. Si $\inf\{F(A)\colon A \in \mathcal{A}\} > -\infty$, tomo una sucesión minimizante $(A_h)_h$ en $\mathcal{A}$. En el caso de tener un resultado de compacidad en la clase de dominios admisibles, podemos decir que existe una subsucesión $(A_{h_k})_k$ de $(A_h)_h$, (que sigue siendo una sucesión minimizante para el problema) y un conjunto $A \in \mathcal{A}$ tal que $(A_{h_k})_k$ converge a A en *algún sentido*. Si la función F es continua con respecto a este sentido de convergencia en $\mathcal{A}$, resulta

$$F(A) = \lim_{k\to+\infty} F(A_{h_k}) = \inf_{\mathcal{A}} F.$$

Por lo tanto, A alcanza el mínimo de F en $\mathcal{A}$. Notemos que, como se trata de resolver un problema de minimización, alcanza con que F sea semicontinua inferior para *ese* sentido de convergencia en $\mathcal{A}$. En tal caso,

$$F(A) \leq \liminf_{k\to+\infty} F(A_{h_k}) = \inf_{\mathcal{A}} F,$$

y se concluye de igual manera. Veremos más adelante, que *ese* sentido de convergencia es la γ-convergencia.

Definiremos la clase de conjuntos *cuasi-abiertos* de $\mathbb{R}^n$. En el Capítulo 7, estudiaremos la resolución (con la idea del método directo), del problema

$$\min\left\{\Phi(\lambda_1(A), \lambda_2(A))\colon A \subset \mathbb{R}^n, A \text{ cuasi-abierto}, |A| \leq c\right\}$$

donde $c > 0$ es una constante, Φ es semicontinua inferior y creciente en cada variable, y $\lambda_k(A)$ denota el k-ésimo autovalor del operador Laplace en $H_0^1(A)$. Veremos que existe al menos una solución. Este resultado se debe al trabajo de Dorin Bucur [4].

Utilizando otras ideas, resolveremos también el siguiente problema de optimización de forma

$$\text{mín}\left\{F(A)\colon A \subset \Omega, A \text{ cuasi-abierto}, |A| = c\right\}$$

donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, el funcional F es semicontinua inferior para la γ-convergencia de conjuntos, F es monótona decreciente con respecto a la inclusión de conjuntos y c es una constante $0 < c < |\Omega|$. Probaremos que existe al menos una solución. Este resultado se debe al trabajo de Buttazzo y Dal Maso [6].

A continuación, describimos brevemente el contenido de cada capítulo.

En el Capítulo 2, estudiamos algunas propiedades funcinales de los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, Ω un abierto acotado. El problema de Dirichlet en conjuntos abiertos $A \subset \Omega$, sus propiedades de linealidad y continuidad. Por último, la existencia y unicidad de solución en ciertos problemas de obstáculo. Estos resultados nos serán útiles en el Capítulo 6, para resolver *el* problema de optimización de forma en el caso acotado.

En el Capítulo 3, estudiamos operadores lineales definidos en un espacio de Hilbert y formas cuadráticas. Estos temas nos serán útiles para probar un lema muy importante sobre diseño óptimo. La bibliografía que utilizamos fue el libro de Kinderlehrer y Stampacchia [16].

En el Capítulo 4, estudiamos algunos resultados del libro de Henrot y Pierre [15] sobre capacidad, cuasi-abiertos, cuasi-continuidad. Damos una caracterización para el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, que motiva la definición de $H_0^1(A)$ para A un cuasi-abierto acotado de $\mathbb{R}^n$.

En el Capítulo 5, estudiamos propiedades básicas de la Γ-convergencia, teniendo como referencia los libros de Andrea Braides [2] y Gianni Dal Maso [8]. Definimos la γ-convergencia de una sucesión de conjuntos cuasi-abiertos contenidos en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y damos una caracterización variacional y otra, en términos de operadores resolventes. Más adelante, vemos que la γ-convergencia de conjuntos cuasi-abiertos es un caso particular de la γ-convergencia de medidas borelianas, no negativas, que pueden tomar el valor $+\infty$ y que se anulan en todos los conjuntos de capacidad cero. Un resultado importante es la relación que existe entre el γ-límite de una sucesión de cuasi-abiertos de medida uniformemente acotada $(A_h)_h$ y el límite en $L^2(\mathbb{R}^n)$ (si existe), de la sucesión $(w_{A_h})_h$, donde $w_{A_h} \in H_0^1(A_h)$ y $-\Delta w_{A_h} = 1$ en A_h. Utilizamos como bibliografía, principalmente, los trabajos de Dal Maso y Mosco [9] y Bucur [4].

En el Capítulo 6, resolvemos el problema

$$\text{mín}\{F(A)\colon A \subset \Omega, A \text{ cuasi-abierto}, |A| = c\}$$

donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, el funcional F es semicontinua inferior para la γ-convergencia de conjuntos, F es monótona decreciente con respecto a la inclusión de conjuntos, c es una constante $0 < c < |\Omega|$.

En el Capítulo 7, damos una idea de la resolución del problema

$$\text{mín}\left\{\Phi(\lambda_1(A), \lambda_2(A)) \colon A \subset \mathbb{R}^n, A \text{ cuasi-abierto}, |A| \leq c\right\}$$

donde $c > 0$ es una constante, Φ es semicontinua inferior y creciente en cada variable, y $\lambda_k(A)$ denota el k-ésimo autovalor del operador Laplace en $H_0^1(A)$.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Espacios de Sobolev

A lo largo de esta tesis, utilizaremos la siguiente notación: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ será un abierto acotado y $C_c^\infty(\Omega)$, es el conjunto de todas las funciones $\phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω.

Definición 2.1.1. Sean u, v en $L^1_{loc}(\Omega)$. Decimos que v es la derivada débil de u respecto a x_i si

$$\int\limits_\Omega u\partial_{x_i}\phi dx = -\int\limits_\Omega v\phi dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Observación 2.1.2. Si existe una derivada débil de u respecto a x_i, entonces es única.

Demostración. Si v y $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfacen

$$\int\limits_\Omega u\partial_{x_i}\phi dx = -\int\limits_\Omega v\phi dx = -\int\limits_\Omega w\phi dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces,

$$\int\limits_\Omega (v - w)\phi dx = 0$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Luego, $v-w = 0$ c.t.p. (casi todo punto respecto de la medida de Lebesgue) de Ω. □

Notamos $v = \partial_{x_i}u$ (o bien, u_{x_i} o $\partial_i u$) a la única derivada débil de u respecto de x_i.

Definición 2.1.3. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define por

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{u \in L^p(\Omega) \colon \partial_i u \in L^p(\Omega),\ \forall i = 1, 2, \ldots, n\Big\} \tag{2.1.1}$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, notamos $\nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \ldots, \partial_n u)$ al gradiente de u en el sentido débil.

El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}$$

o también de la norma equivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \Big(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p},$$

con la que trabajaremos a lo largo de esta tesis.

Observación 2.1.4. Cuando $p = 2$, notamos $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, que es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)}$$

con la norma asociada

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \Big(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{1/2}.$$

Definición 2.1.5. Sea E un espacio de Banach. Definimos el espacio dual de E como

$$E^* = \{\varphi \colon E \to \mathbb{R} / \varphi \text{ es lineal y continua}\}.$$

Dada $\varphi \in E^*$ notamos $\langle \varphi, x\rangle_{E^*,E} = \varphi(x)$ para cada $x \in E$.

Definición 2.1.6. Sea E un espacio de Banach. Decimos que E es *reflexivo* si $J(E) = E^{**}$, donde $J : E \to E^{**}$ es la inyección canónica, $J(x)(\varphi) = \varphi(x)$ para toda $\varphi \in E^*$, que también notamos

$$\langle Jx, \varphi\rangle_{E^{**},E} = \langle \varphi, x\rangle_{E^*,E}.$$

Proposición 2.1.7. *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \le p \le \infty$.*

Demostración. Es claro que es un espacio normado.

Veamos que es completo. Sea $(u_h)_h$ una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$. Luego, $(u_h)_h$, $(\partial_1 u_h)_h$, $(\partial_2 u_h)_h$, … , $(\partial_n u_h)_h$ son sucesiones de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Como

$L^p(\Omega)$ es completo para $1 \leq p \leq \infty$, existen funciones u, g_1, g_2, $\dots$, $g_n \in L^p(\Omega)$ tales que

$$\|u_h - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \|\partial_i u_h - g_i\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Para concluir la demostración, basta ver que para cada i, g_i es la derivada débil de u respecto de x_i. Fijo un i en $\{1, 2, \dots, n\}$. Tomo una $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Como cada $u_h \in W^{1,p}(\Omega)$, sabemos que

$$\int_\Omega u_h \partial_i \phi dx = -\int_\Omega \partial_i u_h \phi dx.$$

Pasando al límite de $h \to +\infty$, resulta

$$\int_\Omega u \partial_i \phi dx = -\int_\Omega g_i \phi dx.$$

Por lo tanto, existen las derivadas débiles de u de orden 1 y $\partial_i u = g_i \in L^p(\Omega)$. Así, obtenemos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Luego, la sucesión $(u_h)_h$ es convergente en $W^{1,p}(\Omega)$. □

Proposición 2.1.8. *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Demostración. Sea $E = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)^n$. Considero el operador $T : W^{1,p}(\Omega) \to E$, $T(u) = (u, \nabla u)$. Tenemos que T es una isometría de $W^{1,p}(\Omega)$ en E, por lo tanto, $T(W^{1,p}(\Omega))$ es un subespacio cerrado de E. Como $L^p(\Omega)$ es reflexivo si $1 < p < \infty$, E también es reflexivo para $1 < p < \infty$. Como $T(W^{1,p}(\Omega))$ es un subespacio cerrado de E y E es reflexivo, $T(W^{1,p}(\Omega))$ es reflexivo y por lo tanto, $W^{1,p}(\Omega)$ lo es. □

Proposición 2.1.9. *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio separable para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. La prueba es totalmente análoga a la anterior. □

Corolario 2.1.10. *El espacio $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable.*

Definimos $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}$.

Observación 2.1.11. El espacio $H_0^1(\Omega)$ es Hilbert y separable. Pues, es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ y éste es un espacio de Hilbert separable.

Observación 2.1.12. Sea $u \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$. Entonces,

$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega \Leftrightarrow u \in H_0^1(\Omega).$$

Se puede ver una demostración en [13, Sección 5.5, Teorema 2].

Observación 2.1.13. Sea $A \subset \Omega$ un abierto. Entonces, $H_0^1(A) \subset H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Pues si $u \in H_0^1(A)$, tomo $v = \begin{cases} u & \text{en } A \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus A \end{cases}$. Luego, $v \in H_0^1(\Omega)$ y $u = v$ c.t.p. de Ω. □

Definimos el espacio $H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)^*$, el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$. En otras palabras, $f \in H^{-1}(\Omega)$ si $f\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es lineal y continua.

Notaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1},H_0^1}$ al par dual entre $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$.

El espacio $H^{-1}(\Omega)$ está dotado de la norma

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\Big\{\langle f, u\rangle_{H^{-1},H_0^1} : u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{H_0^1}(\Omega) \leq 1\Big\}.$$

Teorema 2.1.14 (Caracterización de $H^{-1}(\Omega)$)**.**

(i) Sea $f \in H^{-1}(\Omega)$. Entonces, existen funciones f^0, f^1, ..., f^n en $L^2(\Omega)$ tales que

$$\langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega f^0 v dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega f^i \partial_i v dx \tag{2.1.2}$$

para $v \in H_0^1(\Omega)$. En tal caso, notaremos $f = f^0 - \sum_{i=1}^n \partial_i f^i$.

(ii) Además,

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \text{ínf}\Big\{\Big(\int_\Omega \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx\Big)^{1/2} : f \text{ satisface (2.1.2) para } f^0, \dots, f^n\Big\}.$$

Demostración.

Para $u, v \in H_0^1(\Omega)$, tomamos el producto en $H_0^1(\Omega)$

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv dx.$$

Sea $f \in H^{-1}(\Omega)$. Por el teorema de representación de Riesz, existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv dx = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}, \tag{2.1.3}$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

- Veamos (i).

Tomando
$$\begin{cases} f^0 = u \\ f^i = \partial_i u \text{ para } i = 1, \ldots, n. \end{cases},$$
vale (2.1.2).

• Veamos (ii).

Sean funciones $g^0, \ldots, g^n$ en $L^2(\Omega)$ tales que

$$\langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int\limits_\Omega g^0 v dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega g^i \partial_i v dx,$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. En particular, para la u que obtuvimos aplicando el teorema de representación de Riesz,

$$\langle f, u\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int\limits_\Omega g^0 u dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega g^i \partial_i u dx.$$

Usando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega g^0 u dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega g^i \partial_i u dx &\leq \|g^0\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2}(\Omega) + \sum_{i=1}^n \|g^i\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \sum_{i=0}^n \|g^i\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, tomando $v = u$ en (2.1.3), tenemos que

$$\langle f, u\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int\limits_\Omega |u|^2 dx + \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Entonces,

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega |u|^2 dx + \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \sum_{i=0}^n \|g^i\|_{L^2(\Omega)},$$

simplificando,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sum_{i=0}^n \|g^i\|_{L^2(\Omega)}.$$

Entonces,

$$\int\limits_\Omega |u|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \sum_{i=0}^n \int\limits_\Omega |g^i|^2 dx.$$

Como $f^0 = u$, $f^i = \partial_i u$ para $i = 1, \dots, n$ por (i), tenemos que

$$\int_\Omega \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx \le \int_\Omega \sum_{i=0}^n |g^i|^2 dx.$$

Ahora, por (2.1.2), tenemos que

$$\Big|\langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}\Big| = \Big|\int_\Omega f^0 v dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega f^i \partial_i v dx\Big| \le \Big(\int_\Omega \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx\Big)^{1/2},$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \le 1$. Entonces,

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \Big(\int_\Omega \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx\Big)^{1/2} \le \Big(\int_\Omega \sum_{i=0}^n |g^i|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Tomando ínfimo, tenemos que

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \text{ínf}\Big\{\Big(\int_\Omega \sum_{i=0}^n |g^i|^2 dx\Big)^{1/2} : f \text{ satisface (2.1.2) para } g^0, \dots, g^n\Big\}.$$

Veamos que vale la igualdad. Considero $v = \frac{u}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}}$ en (2.1.3),

$$\begin{aligned}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla u \nabla \frac{u}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} dx + \int_\Omega u \frac{u}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} dx \\ &= \langle f, \frac{u}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}}\rangle_{H^{-1},H_0^1} \le \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Como

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \langle f, u\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx,$$

resulta

$$\Big(\int_\Omega \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx\Big)^{1/2} \le \|f\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

por lo tanto, vale la igualdad de (ii). □

Definición 2.1.15. Sean E y F espacios de Banach. Decimos que E está compactamente contenido en F si para toda sucesión acotada en E existe una subsucesión convergente en F. En tal caso, notamos $E \subset\subset F$.

Teorema 2.1.16 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.*

Sea $(u_h)_h \subset H^1(D)$ una sucesión acotada. Entonces, existe unsa subsucesión $(u_{h_k})_k$ de $(u_h)_h$ y una $u \in H^1(D)$ tal que $u_{h_k} \to u$ en $L^2_{loc}(\Omega)$ y $u_{h_k} \to u$ c.t.p. de D.

Si además, D es acotado, $H_0^1(D) \subset\subset L^2(D)$.

Observemos que el teorema de Rellich-Kondrachov también se puede enunciar de la siguiente manera:

Teorema 2.1.17. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.*

La inclusión $i\colon H^1(D) \hookrightarrow L^2_{loc}(D)$ es compacta.

Si además, D es acotado, $i\colon H^1(D) \hookrightarrow L^2(D)$ es compacta.

Se puede ver una demostración en [13, Sección 5.7, Teorema 1]. Allí, se requiere que el borde de D sea de clase C^1, para poder extender una función $u \in H^1(D)$ a todo $\mathbb{R}^n$. Nosotros usaremos este resultado para $H^1_0(D)$, (y no $H^1(D)$), con lo cual no necesitamos ninguna hipótesis de regularidad sobre el borde de D, porque una función $u \in H^1_0(D)$ se extiende a $\mathbb{R}^n$ por cero, trivialmente.

Corolario 2.1.18. *Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $|A| < \infty$. Entonces, la inclusión $H^1(A) \hookrightarrow L^2(A)$ es compacta.*

Demostración. Sea $(u_h)_h$ una sucesión acotada en $H^1(A)$. En particular, es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$, digamos $\|u_h\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq M$. Entonces, existe una subsucesión $(u_{h_k})_k$ y una función $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_{h_k})_k$ converge a u débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y fuerte en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Luego, $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_k \|u_{h_k}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq M$ y $u \in H^1(A)$.

Dado $\epsilon > 0$, existe un compacto $K_\epsilon \subset A$ tal que $|A \setminus K_\epsilon| < \epsilon$. Entonces, usando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_A |u_{h_k} - u|^2 dx &= \int_{A\setminus K_\epsilon} |u_{h_k} - u|^2 dx + \int_{K_\epsilon} |u_{h_k} - u|^2 dx \\
&\leq |A \setminus K_\epsilon| \|u_{h_k} - u\|_{L^2(A\setminus K_\epsilon)} + \int_{K_\epsilon} |u_{h_k} - u|^2 dx \\
&\leq |A \setminus K_\epsilon| \Big(\|u_{h_k}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \Big) + \int_{K_\epsilon} |u_{h_k} - u|^2 dx \\
&\leq 2M\epsilon + \int_{K_\epsilon} |u_{h_k} - u|^2 dx
\end{aligned}$$

Como K_ϵ es compacto y, por Rellich-Kondrachov, $(u_{h_k})_k$ converge a u en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $\lim_k \int_{K_\epsilon} |u_{h_k} - u|^2 dx = 0$, para cada $\epsilon > 0$. Luego, tomando límite de ϵ a 0, resulta que $(u_{h_k})_k$ converge a u en $L^2(A)$. □

El siguiente lema, nos da una condición suficiente para decidir si una función u en $H^1(\mathbb{R}^n)$, pertenece a $H^1_0(\Omega)$.

Lema 2.1.19. *Sean $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $w \in H^1_0(\Omega)$ tales que $0 \leq |v| \leq w$ c.t.p. de Ω. Entonces, $v \in H^1_0(\Omega)$.*

Demostración. Sabemos que $v = v^+ - v^-$, con $v^+ \geq 0$ y $v^- \geq 0$.

Veamos que $v^+ \in H_0^1(\Omega)$.

Como $w \geq 0$, existen $w_h \in C_c^\infty(\Omega)$, $w_h \geq 0$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tales que $w_h \to w$ en $H_0^1(\Omega)$. Considero $\varphi_h = \text{mín}\{w_h, v^+\} = w_h \wedge v^+$. Tenemos que el soporte de φ_h está contenido en el soporte de w_h y $\varphi \geq 0$, para toda $h \in \mathbb{N}$. Además, como tomar mínimo es una aplicación continua en $H^1(\Omega)$ y $w_h \to w$ en $H_0^1(\Omega)$, resulta que $v_h \to w \wedge v^+$ en $H^1(\Omega)$. Con un argumento standar de regularización, suavizo las funciones φ_h y las noto ϕ_h. Entonces, tenemos que $\phi_h \in C_c^\infty(\Omega)$, $\phi_h \geq 0$ y $\phi_h \to v^+$ en $H^1(\Omega)$. Luego, como $C_c^\infty(\Omega)^+$ es denso en $H_0^1(\Omega)^+$, resulta $v^+ \in H_0^1(\Omega)^+$.

Análogamente, construyo una funciones $\psi_h \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi_h \to v^-$ en $H_0^1(\Omega)$. Luego, $v^- \in H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto, $v \in H_0^1(\Omega)$. □

Proposición 2.1.20. *Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ una función continua tal que $u(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Entonces, $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demostración. Podemos suponer $u \geq 0$. Pues, $u = u^+ - u^-$ con $u^+, u^- \geq 0$.

Sea $\epsilon > 0$. Considero $v_\epsilon = (u - \epsilon)^+$. Tenemos que v_ϵ tiene soporte compacto en Ω y $v_\epsilon \to u$ en $H^1(\Omega)$, cuando $\epsilon \to 0$. Ahora, v_ϵ no necesariamente es una función diferenciable. Pero, convolucionando con una sucesión regularizante $(\rho_h)_h$, tenemos que $z_{h,\epsilon} = \rho_h * v_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ y $(z_{h,\epsilon})_h$ converge a v_ϵ en $H^1(\Omega)$, cuando $h \to +\infty$. Luego, por un argumento diagonal, existe una subsucesión $(\epsilon_h)_h$ tal que $(z_{h,\epsilon_h})_h$ converge a u en $H^1(\Omega)$, con $z_{h,\epsilon_h} \in C_c^\infty(\Omega)$. Por lo tanto, $u \in H_0^1(\Omega)$. □

Proposición 2.1.21 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto tal que $D \subset [-a, a] \times \mathbb{R}^{n-1}$. Entonces, existe una constante $c > 0$ que sólo depende de D tal que*

$$\int_D |u|^2 dx \leq c \int_D |\nabla u|^2 dx,$$

para toda $u \in H_0^1(D)$.

Demostración. Sea $u \in C_c^\infty(D)$. Podemos escribir

$$u(x) = \int_{-a}^{a} \partial_1 u(t, \overline{x}) dt,$$

donde $\overline{x} = (x_2, \dots, x_n)$. Usando la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$|u(x)|^2 \leq 2a \int_{-a}^{a} |\partial_1 u(t, \overline{x})|^2 dt \leq 2a \int_{-a}^{a} |\nabla u(t, \overline{x})|^2 dt.$$

Integrando sobre D y usando Fubini, resulta

$$\int_D |u(x)|^2 dx \leq 2a \int_D \int_{-a}^{a} |\nabla u(t,\overline{x})|^2 dt dx = 4a^2 \int_D |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Considero $c = 4a^2$. Entonces, vale

$$\int_D |u|^2 dx \leq c \int_D |\nabla u|^2 dx,$$

para toda $u \in C_c^\infty(D)$. Como $C_c^\infty(D)$ es denso en $H_0^1(D)$, la desigualdad vale para toda $u \in H_0^1(D)$. □

Proposición 2.1.22 (Desigualdad de Poincaré para abiertos de medida finita)**.** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto tal que $|A| < \infty$. Entonces, existe una constante $c > 0$ que sólo depende de A tal que*

$$\int_A |u|^2 dx \leq c \int_A |\nabla u|^2 dx,$$

para toda $u \in H_0^1(A)$.

Demostración. Supongamos que no vale. Entonces, para cada $h \in \mathbb{N}$, existe $u_h \in H_0^1(A)$ tal que

$$\int_A |u_h|^2 dx > h \int_A |\nabla u_h|^2 dx.$$

Considero las funciones $v_h = u_h / \|u_h\|_{L^2(A)}$. Entonces, $\|v_h\|_{L^2(A)} = 1 \ \forall h \in \mathbb{N}$ y

$$\int_A |\nabla v_h|^2 dx = \frac{1}{\|u_h\|_{L^2(A)}} \int_A |\nabla u_h|^2 dx < \frac{1}{h} \leq 1.$$

Por lo tanto, $(v_h)_h$ es acotada en $H^1(A)$. Entonces, por 2.1.18, existe una subsucesión de $(v_h)_h$ (que seguimos notando con h) y una función $v \in H^1(A)$ tal que $(v_h)_h$ converge a v en $L^2(A)$. Como

$$\lim_{h\to+\infty} \int_A |\nabla v_h|^2 dx \leq \lim_{h\to+\infty} \frac{1}{h} = 0,$$

v es una función constante. Por otro lado, como $v_h \in H_0^1(A)$, $v = 0$. Contradicción. Pues, como $(v_h)_h$ converge a v en $L^2(A)$, en particular, $(\|v_h\|_{L^2(A)})_h$ converge a $\|v\|_{L^2(A)}$. Pero, $\|v_h\|_{L^2(A)} = 1$ y $\|v\|_{L^2(A)} = 0$. □

2.2. El problema de Dirichlet

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sean $f \in H^{-1}(\Omega)$ y $A \subset \Omega$ abierto. Tenemos el siguiente problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ } en \text{ } A, \\ u \in H_0^1(A). \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Decimos que $u \in H^1(\Omega)$ es una *solución débil* del problema de Dirichlet (2.2.1) si

$$\begin{cases} u \in H_0^1(A) \\ \int_A \nabla u \nabla v dx = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \text{ para toda } v \in H_0^1(A) \end{cases},$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$ es el producto dual.

Notaremos u_A^f a la solución débil de (2.2.1).

La notación tiene sentido gracias a la siguiente proposición que afirma que existe solución de (2.2.1) y es única.

Proposición 2.2.1. *Sea $A \subset \Omega$ un abierto. Sea $f \in H^{-1}(\Omega)$. Entonces, existe una única solución en el sentido débil de* (2.2.1).

Más aún, u_A^f es la única solución del siguiente problema de minimización:

$$\min_{v\in H_0^1(A)} \{J(v)\} \text{ } donde \text{ } J(v) = \frac{1}{2}\int_A |\nabla v|^2 dx - \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

Demostración.

(1) Veamos que ser solución débil de (2.2.1) es equivalente a ser solución del problema de minimización de J sobre $H_0^1(A)$.

• Sea $u = u_A^f$. Sea $v \in H_0^1(A)$. Como $u - v \in H_0^1(A)$, puedo considerarla como función test en la formulación débil de $-\Delta u = f$ en A. Entonces,

$$\int_A \nabla u \nabla(u - v) dx = \langle f, u - v\rangle,$$

es decir,

$$\int_A |\nabla u|^2 dx - \int_A \nabla u \nabla v dx = \langle f, u\rangle - \langle f, v\rangle.$$

Por lo tanto,

$$J(u) + \frac{1}{2}\int_A |\nabla u|^2 dx - \int_A \nabla u \nabla v dx + \frac{1}{2}\int_A |\nabla v|^2 dx = \frac{1}{2}\int_A |\nabla v|^2 dx - \langle f, v\rangle = J(v).$$

Es decir,

$$J(u) \leq J(u) + \int\limits_A |\nabla(u - v)|^2 dx + J(v).$$

Luego, $J(u) \leq J(v)$, para toda $v \in H_0^1(A)$. Por lo tanto, u es un punto mínimo de J.

• Supongamos ahora que $u \in H_0^1(A)$ es la única solución del problema de minimización de J sobre $H_0^1(A)$. Veamos que $u = u_A^f$. Basta ver que $-\Delta u = f$ en A, en el sentido débil.

Sean $v \in H_0^1(A)$ y $t \in \mathbb{R}$. Entonces, $u + tv \in H_0^1(A)$. Luego, como u es mínimo de J, tenemos que $J(u) \leq J(u + tv)$. Es decir,

$$\frac{1}{2}\int\limits_A |\nabla u|^2 dx - \langle f, u\rangle \leq \frac{1}{2}\int\limits_A |\nabla(u + tv)|^2 dx - \langle f, u + tv\rangle.$$

Desarrollando y simplificando tenemos que

$$\int\limits_A \nabla u \nabla v dx - \langle f, v\rangle + \frac{t}{2}\int\limits_A |\nabla v|^2 dx \geq 0, \ \forall t > 0,$$

$$\int\limits_A \nabla u \nabla v dx - \langle f, v\rangle + \frac{t}{2}\int\limits_A |\nabla v|^2 dx \leq 0, \ \forall t < 0.$$

Tomando límite en t (a cero), resulta

$$\int\limits_A \nabla u \nabla v dx = \langle f, v\rangle,$$

para todo $v \in H_0^1(A)$. Por lo tanto, $u = u_A^f$.

(2) Veamos que el problema de minimización de J en $H_0^1(A)$ tiene solución y es única.

Existencia.

Obsevemos que $\inf\limits_{v \in H_0^1(A)} \{J(v)\}$ es finito. Pues, como $f \in H^{-1}(\Omega)$, es continua en $H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto, existe una constante $c > 0$ tal que

$$J(v) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla v|^2 dx - \langle f, v\rangle \geq \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - c\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Usando la desigualdad $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, para a, b reales positivos, con $a = c$ y $b = \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$, tenemos que

$$\begin{aligned} J(v) &\geq \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - c\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{1}{2}c^2 \\ &\geq -\frac{1}{2}c^2 > -\infty. \end{aligned}$$

Sea $(u_h)_h$ una sucesión minimizante. Es decir, $u_h \in H_0^1(A)$ y $(J(u_h))_h$ tiende al $\inf_{H_0^1(A)} J =: \lambda \in \mathbb{R}$. De la desigualdad anterior, podemos concluir que $(u_h)_h$ es acotada en $H_0^1(A)$. Pues, si no, existe una subsucesión, que seguimos notando u_h tal que $\|u_h\|_{H_0^1(A)}$ tiende a $+\infty$. Pero, $J(u_h) \geq \frac{1}{2}\|u_h\|^2_{H_0^1(A)} - c\|u_h\|_{H_0^1(A)}$. Pasando al límite, resulta $\lambda \geq +\infty$, lo que es absurdo. Luego, la sucesión $(u_h)_h$ está acotada en $H_0^1(A)$. Entonces, existe una subsucesión, que seguimos notando con h, y una u tal que $(u_h)_h$ tiende débil a u en $H_0^1(A)$.

Veamos que u es el mínimo buscado. Sabemos que $(u_h)_h$ tiende débil a u en $H_0^1(A)$. Entonces,

$$\lim_{h\to+\infty} \langle f, u_h\rangle = \langle f, u\rangle.$$

Además, la convergencia débil nos dice que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{h\to+\infty} \|u_h\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Entonces,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{h\to+\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_h|^2 dx$$

Luego,

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \langle f, u\rangle \leq \liminf_{h\to+\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_h|^2 dx - \langle f, u_h\rangle = \liminf_{h\to+\infty} J(u_h) = \lambda$$

Por lo tanto, $J(u) = \min_{v\in H_0^1(A)} \{J(v)\}$.

Unicidad.

La unicidad de u es una consecuencia de que el funcional J es estrictamente convexo. Si $v \in H_0^1(A)$ también es mínimo y $v \neq u$, $\frac{u+v}{2} \in H_0^1(A)$. Luego, $J(\frac{u+v}{2}) < \frac{1}{2}J(u) + \frac{1}{2}J(v)$. Como u es mínimo, $J(u) \leq J(v)$. Como v es mínimo, $J(\frac{u+v}{2}) \geq J(v)$. Así, la desigualdad $J(\frac{u+v}{2}) < \frac{1}{2}J(u) + \frac{1}{2}J(v)$, nos queda $J(\frac{u+v}{2}) < J(\frac{u+v}{2})$, lo cual es absurdo.

$\square$

Observación 2.2.2. Si $f \in L^2(\Omega)$, $\langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = (f, v)_{L^2(\Omega)}$.

Utilizaremos la siguiente convención $u_\emptyset^f = 0$ para toda $f \in H^{-1}(\Omega)$.

A continuación, veremos un criterio de comparación entre dos soluciones del problema de Dirichlet. Previamente, necesitamos una definición.

Definición 2.2.3. Sea $h \in H^{-1}(\Omega)$. Decimos que $h \geq 0$ si $\langle h, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \geq 0$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$.

Sean f y $g \in H^{-1}(\Omega)$. Decimos que $f \leq g$ si $g - f \geq 0$.

Proposición 2.2.4 (Principio de comparación del problema de Dirichlet)**.**

(i) Sea $A \subset \Omega$ un abierto. Sean f y $g \in H^{-1}(\Omega)$ tales que $f \leq g$. Entonces, $u_A^f \leq u_A^g$ c.t.p. de A.

(ii) Sea $f \in H^{-1}(\Omega)$, $f \geq 0$. Sean A_1 y A_2 subconjuntos abiertos de Ω tales que $A_1 \subset A_2$. Entonces, $u_{A_1}^f \leq u_{A_2}^f$ c.t.p. de Ω.

Demostración. Para demostrar (i) alcanza con ver que si $h \in H^{-1}(\Omega)$, $h \leq 0$, entonces $u_A^h \leq 0$. Pues, $u_A^{f-g} = u_A^f - u_A^g$, por linealidad de $-\Delta$.

Sea $h \in H^{-1}(\Omega)$ tal que $h \leq 0$. Quiero ver que $u_A^h \leq 0$. Llamo $u := u_A^h$.

Veamos que $u^+ = 0$. Sabemos que

$$\int_A \nabla u \nabla v dx = \langle h, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

para toda $v \in H_0^1(A)$. En particular,

$$\int_A \nabla u \nabla u^+ dx = \langle h, u^+ \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Como $h \leq 0$ y $u^+ \geq 0$, tenemos que $\langle h, u^+ \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \leq 0$. Entonces,

$$0 \leq \int_A |\nabla u^+|^2 dx = \int_A \nabla u \nabla u^+ dx = \langle h, u^+ \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \leq 0.$$

Por lo tanto, $u^+ = 0$ c.t.p. de A. Luego, $u = u_A^h \leq 0$, como queríamos probar.

Para probar (ii), notemos $u_i = u_{A_i}^f$ para $i = 1, 2$.

Sabemos que

$$\int_{A_1} \nabla u_1 \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \text{ para toda } v \in H_0^1(A_1)$$

$$\int_{A_2} \nabla u_2 \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \text{ para toda } v \in H_0^1(A_2)$$

Como $A_1 \subset A_2$, $H_0^1(A_1) \subset H_0^1(A_2)$. Entonces, para toda $v \in H_0^1(A_1)$

$$\int_{A_1} \nabla u_2 \nabla v dx = \int_{A_2} \nabla u_2 \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Restando adecuadamente, tenemos que

$$\int_{A_1} \nabla (u_1 - u_2) \nabla v dx = 0 \text{ para toda } v \in H_0^1(A_1).$$

Si $(u_1 - u_2)^+ \in H_0^1(A_1)$, entonces podemos tomarla como función test y nos queda

$$\int_{A_1} \nabla(u_1 - u_2)\nabla(u_1 - u_2)^+ dx = \int_{A_1} |\nabla(u_1 - u_2)^+|^2 dx = 0 \Rightarrow (u_1 - u_2)^+ = 0.$$

Concluyendo que $u_1 \leq u_2$. Por lo tanto, basta ver que $(u_1 - u_2)^+ \in H_0^1(A_1)$. Como $f \geq 0$, por la parte (i) tenemos que $u_2 = u_{A_2}^f \geq 0$. Entonces, $(u_1 - u_2)^+ \leq u_1^+$. Como además, $u_1^+ \in H_0^1(A_1)$, por el lema 2.1.19, resulta $(u_1 - u_2)^+ \in H_0^1(A_1)$, como queríamos ver. □

Proposición 2.2.5 (Continuidad del problema de Dirichlet). *Existe una constante $c > 0$ que sólo depende de Ω tal que*

$$\|u_A^f\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

para todo abierto $A \subset \Omega$.

Demostración. Sea A un abierto contenido en Ω. Llamemos $u = u_A^f$. Sabemos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{A} \nabla u \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \text{ para toda } v \in H_0^1(A).$$

En particular, tomando $v = u$, tenemos que

$$k\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_A |\nabla u|^2 dx = \langle f, u \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

donde la primera desigualdad se debe a la desigualdad de Poincaré y la segunda a que $f \in H^{-1}(\Omega)$ y la definición de $\| \cdot \|_{H^{-1}(\Omega)}$. Por lo tanto, si $c = \frac{1}{k}$, nos queda

$$\|u_A^f\|_{H_0^1(A)} \leq c\|f\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

como queríamos probar. □

Corolario 2.2.6. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de abiertos contenidos en Ω. Entonces, existe una subsucesión $(u_{A_{h_k}}^f)_k$ de $(u_{A_h}^f)_h$ y una $u^* \in H_0^1(\Omega)$ tal que $(u_{A_{h_k}}^f)_k$ corverge a u^* débil en $H_0^1(\Omega)$ y fuerte en $L^2(\Omega)$.*

Demostración. Por la proposición anterior, sabemos que

$$\|u_{A_h}^f\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \text{ para todo } h \in \mathbb{N}.$$

Luego, la sucesión $(u_{A_h}^f)_h$ es acotada en $H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto, existe una subsucesión que converge débil en $H_0^1(\Omega)$ y, por el teorema de Rellich-Kondrachov, fuerte en $L^2(\Omega)$. □

Proposición 2.2.7. *Sean $(A_h)_h$ y A abiertos contenidos en Ω tales que $(u^f_{A_h})_h$ converge a u^f_A débil en $H^1_0(\Omega)$ y fuerte en $L^2(\Omega)$. Entonces, $(u^f_{A_h})_h$ converge a u^f_A fuerte en $H^1_0(\Omega)$.*

Demostración. Como $(u^f_{A_h})_h$ converge a u^f_A débil en $H^1_0(\Omega)$ y $H^1_0(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, basta ver que las normas convergen, es decir, que $(\|u^f_{A_h}\|_{H^1_0(\Omega)})_h$ converge a $\|u^f_A\|_{H^1_0(\Omega)}$.

Usando $u^f_{A_h}$ como función test en la formulación débil de $-\Delta u^f_{A_h} = f$ en A_h, tenemos que

$$\|u^f_{A_h}\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u^f_{A_h}|^2 dx = \int_{A_h} |\nabla u^f_{A_h}|^2 dx = \langle f, u^f_{A_h}\rangle_{H^{-1},H^1_0}.$$

Como $(u^f_{A_h})_h$ converge a u^f_A débil en $H^1_0(\Omega)$, resulta $\langle f, u^f_{A_h}\rangle_{H^{-1},H^1_0}$ converge a $\langle f, u^f_A\rangle_{H^{-1},H^1_0}$. Por otro lado, tomando u^f_A como función test en la formulación débil de $-\Delta u^f_A = f$ en A, resulta que $\langle f, u^f_A\rangle_{H^{-1},H^1_0} = \int_A |\nabla u^f_A|^2 dx = \|u^f_A\|^2_{H^1_0(\Omega)}$. Concluimos que las normas convergen, luego, $(u^f_{A_h})_h$ converge a u^f_A fuerte en $H^1_0(\Omega)$. □

Lema 2.2.8. *Sea $A \subset \Omega$ un abierto, no vacío. Entocnes, $u^1_A > 0$ en A.*

Demostración. Sean $x_0 \in A$ y $r > 0$ tal que $B := B_r(x_0) \subset A$. Veamos que $u^1_A > 0$ en la bola B. Luego, como la bola es arbitraria, $u^1_A > 0$ en A.

Tomemos $w \in H^1_0(\Omega)$ solución de

$$\begin{cases} -\Delta w = 1 \text{ en } B, \\ w = 0 \text{ en } \partial B. \end{cases}$$

Se sabe que $w(x) = \frac{1}{2n}(r^2 - |x - x_0|^2)$. Como $B \subset A$, por principio de comparación del problema de Dirichlet, tenemos que $w = u^1_B \leq u^1_A$. Como $w > 0$ en B, resulta $u^1_A > 0$ en B, como queríamos ver. □

Lema 2.2.9. *El espacio $L^\infty(\Omega)$ es denso en $H^{-1}(\Omega)$.*

Demostración. Sea $f \in H^{-1}(\Omega)$. Sea ρ el núcleo regularizante standar. Defino para cada $x \in \Omega$

$$f_\epsilon(x) = \langle f, \rho_\epsilon(\cdot - x)\rangle_{H^{-1},H^1_0}$$

Entonces, $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$. Veamos que f_ϵ es acotada.

$$|f_\epsilon(x)| \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\rho_\epsilon\|_{H^1_0(\Omega)} \leq c,$$

donde c es una constante independiente de x. Luego, $f_\epsilon \in L^\infty(\Omega)$.

Veamos ahora que $(f_\epsilon)_\epsilon$ converge a f en $H^{-1}(\Omega)$. Queremos ver que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\leq 1} \langle f_\epsilon - f, u\rangle = 0$$

Para cada $h \in \mathbb{N}$, por definición de supremo, existe una función $u_h \in H_0^1(\Omega)$, con $\|u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$ y tal que

$$\sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\leq 1} \Big\{\langle f_\epsilon - f, u\rangle\Big\} - \frac{1}{h} \leq \langle f_\epsilon - f, u_h\rangle.$$

Como las funciones de soporte compacto en Ω son densas en $H_0^1(\Omega)$ y $u_h \in H_0^1(\Omega)$, podemos asumir que $\operatorname{sop} u_h \subset \Omega$ es compacto. Por lo tanto, $u_h * \rho_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$.

Se puede ver que

$$\langle f - f_\epsilon, u_h\rangle = \langle f, u_h - u_h * \rho_\epsilon\rangle.$$

Para demostrar la igualdad anterior, basta ver que

$$\langle f_\epsilon, u\rangle = \langle f, u * \rho_\epsilon\rangle$$

para toda $u \in H_0^1(\Omega)$. Supongamos que $f \in L^2(\Omega)$ (para $f \in H^{-1}(\Omega)$ es similar). Entonces, en esta cuenta, $\langle \cdot,\cdot\rangle_{H^{-1},H_0^1} = (\cdot,\cdot)_{L^2}$. Luego,

$$f_\epsilon(x) = \int_\Omega f(y)\rho_\epsilon(y-x)dy.$$

Por lo tanto, usando Fubini y el hecho de que $\rho(y-x) = \rho(x-y)$, resulta

$$\begin{aligned}(f_\epsilon, u)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega f_\epsilon(x)u(x)dx = \int_\Omega\Big\{\int_\Omega f(y)\rho_\epsilon(y-x)dy\Big\}u(x)dx\\ &= \int_\Omega f(y)\Big\{\int_\Omega \rho_\epsilon(x-y)u(x)dx\Big\}dy = (f, u*\rho_\epsilon)_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

como queríamos ver.

Además, tenemos que

$$\langle f, u_h - u_h * \rho_\epsilon\rangle \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u_h - u_h * \rho_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Por otro lado, para cada h fijo, $\|u_h - u_h * \rho_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)}$ tiende a cero, cuando ϵ tiende a

0^+. Entonces, tomando límite en ϵ, tenemos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{\epsilon\to 0^+}\left\{\sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\le 1}\langle f_\epsilon - f, u\rangle - \frac{1}{h}\right\} &\le \limsup_{\epsilon\to 0^+}\left\{\sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\le 1}\langle f, u_h - u_h * \rho_\epsilon\rangle - \frac{1}{h}\right\}\\
&\le \limsup_{\epsilon\to 0^+}\left\{\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u_h - u_h * \rho_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)} - \frac{1}{h}\right\}\\
&= \limsup_{\epsilon\to 0^+}\left\{0 - \frac{1}{h}\right\} = -\frac{1}{h} \le 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\limsup_{\epsilon\to 0^+}\left\{\sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\le 1}\langle f_\epsilon - f, u\rangle - \frac{1}{h}\right\} \le 0,\ \forall h \in \mathbb{N}$$

Luego,

$$\limsup_{\epsilon\to 0^+}\sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\le 1}\langle f_\epsilon - f, u\rangle = 0$$

Concluyendo que $L^\infty(\Omega)$ es denso en $H^{-1}(\Omega)$. □

Teorema 2.2.10 (Independencia de f)**.** *Sean $(A_h)_h$, A abiertos contenidos en Ω. Si $(u^1_{A_h})_h$ converge a u^1_A fuerte en $L^2(\Omega)$, entonces $(u^f_{A_h})_h$ converge a u^f_A fuerte en $H^1_0(\Omega)$, para toda $f \in H^{-1}(\Omega)$.*

Demostración. Fijo $f \in H^{-1}(\Omega)$. Para facilitar la notación, llamo

$$u^f_h := u^f_{A_h} \text{ para cada } h \in \mathbb{N} \text{ y } u^f := u^f_A,$$

$$u^1_h := u^1_{A_h} \text{ para cada } h \in \mathbb{N} \text{ y } u^1 := u^1_A.$$

Observemos que si $M > 0$, $u^M = Mu^1$.

• Si $f \in L^\infty(\Omega)$, existe una constante $M > 0$ tal que $-M \le f \le M$ c.t.p. de Ω. Entonces, por el principio de comparación, tenemos que

$$-Mu^1_h \le u^f_h \le Mu^1_h.$$

Por el corolario 2.2.6, existe una subsucesión, que seguimos notando con h, y una $u^* \in H^1_0(\Omega)$ tal que $(u^f_h)_h$ converge a u^* débil en $H^1_0(\Omega)$ y fuerte en $L^2(\Omega)$. Entonces, como además, por hipótesis, $(u^1_{A_h})_h$ converge a u^1_A fuerte en $L^2(\Omega)$, tomando límite cuando $h \to +\infty$ en la desigualdad anterior, resulta

$$-Mu^1 \le u^* \le Mu^1.$$

Luego, $0 \le |u^*| \le Mu^1$ y $Mu^1 \in H^1_0(A)$. Entonces, por el lema 2.1.19, $u^* \in H^1_0(A)$.

Veamos que u^* es solución de $-\Delta u^* = f$ en A.

Sea $\varphi \in C_c^\infty(A)$, $\varphi \geq 0$. Como $u^1 > 0$ en A, por el lema 2.2.8, existe $t > 0$ tal que $\varphi \leq tu^1$, por ejemplo, $t = \|\varphi\|_\infty / \min\limits_{\mathrm{sop}\,\varphi} u^1$. Considero las siguientes funciones $\varphi_h := \text{ínf}\{\varphi, tu_h^1\} = \varphi \wedge tu_h^1 \in H_0^1(A_h)$.

Por el corolario 2.2.6, existe alguna función $u \in H_0^1(\Omega)$ que es límite débil de $(u_h^1)_h$. Pero, sabemos que u^1 es límite fuerte en $L^2(\Omega)$. Luego, $u = u^1$ y $(u_h^1)_h$ converge a u^1 débil en $H_0^1(\Omega)$. Por la proposición 2.2.7, resulta $(u_h^1)_h$ converge a u^1 fuerte en $H_0^1(\Omega)$.

Ahora, tomar ínfimo es una aplicación continua en $H_0^1(\Omega)$, entonces $(\varphi_h)_h$ converge a $\varphi \vee tu^1 = \varphi$ fuerte en $H_0^1(\Omega)$.

Notemos que podemos suponer que las funciones $\varphi_h \in C_c^\infty(A_h)$. Pues, sino, usamos un argemento standar de regularización.

Entonces, tomando φ_h como función test en la formulación débil de $-\Delta u_h^f = f$ en A_h,

$$\int\limits_{A_h} \nabla u_h^f \nabla \varphi_h dx = \langle f, \varphi_h \rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

Como $(u_h^f)_h$ converge a u^* débil en $H_0^1(\Omega)$ y $(\varphi_h)_h$ converge a φ fuerte en $H_0^1(\Omega)$, tenemos que

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u_h^f \nabla \varphi_h dx \longrightarrow \int\limits_{\Omega} \nabla u^* \nabla \varphi dx,$$

$$\langle f, \varphi_h \rangle_{H^{-1},H_0^1} \longrightarrow \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1},H_0^1},$$

cuando $h \to +\infty$, obteniendo la siguiente igualdad

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u^* \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1},H_0^1},$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(A)$. Luego, por un argumento de densidad, esta igualdad vale para toda $v \in H_0^1(A)$. Por lo tanto, $-\Delta u^* = f$ en A.

Vimos que, si $f \in L^\infty(\Omega)$, $u^* = u_A^f$.

• Si $f \notin L^\infty(\Omega)$, como $f \in H^{-1}(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}$ (ver 2.2.9), existe una sucesión $(f_k)_k$ en $L^\infty(\Omega)$ que converge a f en $H^{-1}(\Omega)$.

Por continuidad del problema de Dirichlet, existe una constante $c > 0$ tal que $\|u_B^g\|_{H_0^1}(\Omega) \leq c\|g\|_{H^{-1}(\Omega)}$ para todo abierto $B \subset \Omega$, para toda $g \in H^{-1}(\Omega)$.

Sea $\epsilon > 0$.

Como $(f_k)_k$ converge a f en $H^{-1}(\Omega)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_k\|_{H^{-1}(\Omega)} < \frac{\epsilon}{4c}$, para todo $k \geq k_0$. Como $f_{k_0} \in L^\infty(\Omega)$, por la primera parte de la demostración, tenemos que $(u_h^{f_{k_0}})_h$ converge a $u^{f_{k_0}}$ fuerte en $H_0^1(\Omega)$. Para el ϵ dado, existe un $h_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_{h_0}^{f_{k_0}} - u^{f_{k_0}}\|_{H_0^1(\Omega)} < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $h \geq h_0$.

Entonces, si $h \geq h_0$,

$$\begin{aligned}
\|u_h^f - u^f\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \|u_h^f - u_h^{f_{k_0}}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_h^{f_{k_0}} - u^{f_{k_0}}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u^{f_{k_0}} - u^f\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&= \|u_h^{f-f_{k_0}}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_h^{f_{k_0}} - u^{f_{k_0}}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u^{f_{k_0}} - u^f\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq c\|f - f_{k_0}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u_h^{f_{k_0}} - u^{f_{k_0}}\|_{H_0^1(\Omega)} + c\|f - f_{k_0}\|_{H^{-1}(\Omega)} \\
&< 2c\frac{\epsilon}{4c} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(u_h^f)_h$ converge a u^f fuerte en $H_0^1(\Omega)$. $\square$

2.3. Problema con obstáculo

Sea H un espacio de Hilbert real y $\|\cdot\|$, su norma.

Definición 2.3.1. Decimos que $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ es una *forma bilineal* si

$$B(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w),$$

$$B(w, u + \lambda v) = B(w, u) + \lambda B(w, v),$$

para todo u, v, $w \in H$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 2.3.2. Sea $A\colon H \times H \to \mathbb{R}$ una aplicación. Decimos que A es *continua* si existe una constante $c > 0$ tal que

$$|A(u, v)| \leq c\|u\|\|v\|$$

para toda u, $v \in H$.

Definición 2.3.3. Sea $A\colon H \times H \to \mathbb{R}$ una aplicación. Decimos que A es *coerciva* si existe una constante $k > 0$ tal que

$$A(u, u) \geq k\|u\|^2$$

para toda $u \in H$.

Enunciamos un teorema que necesitaremos en el capítulo de diseño óptimo:

Teorema 2.3.4 (Stampacchia)**.** *Sea H un espacio de Hilbert. $A\colon H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva. Sea E un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de H. Dada $\varphi \in H^*$, en el espacio dual de H, existe una única $u \in H$ tal que*

$$A(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle \text{ para toda } v \in E.$$

Si además A es simétrica, entonces u se caracteriza por la propiedad

$$\begin{cases} u \in E \\ \frac{1}{2}A(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min\limits_{v \in E} \left\{ \frac{1}{2}A(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\} \end{cases}$$

Demostraremos el teorema para el caso particular de $H = H_0^1(\Omega)$,

$$A(z,\eta) = \int_\Omega \nabla z \nabla \eta dx,$$

$$\varphi \in H_0^1(\Omega)^*, \langle \varphi, \eta \rangle = \int_\Omega \eta dx$$

y $E \subset H_0^1(\Omega)$ no vacío, convexo, cerrado; donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado. La demostración del caso general puede encontrarse en [3, Teorema V.6].

Observación 2.3.5. Sea $A\colon H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por $A(z,\eta) = \int_\Omega \nabla z \nabla \eta dx$ es una forma bilineal, continua, coerciva y simétrica.

Demostración. Es claro que A es una forma bilineal simétrica.

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y luego la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$|A(z,\eta)| \leq \int_\Omega |\nabla z \nabla \eta| dx \leq \int_\Omega |\nabla z||\nabla \eta| dx \leq ||z||_{H_0^1(\Omega)} ||\eta||_{H_0^1(\Omega)},$$

por lo tanto, A es continua.

Como $A(z,z) = \int_\Omega |\nabla z|^2 dx = ||z||^2_{H_0^1(\Omega)}$, A es coerciva. □

Observación 2.3.6. Sea $\varphi\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por $\langle \varphi, \eta \rangle = \int_\Omega \eta dx$ es lineal y continua.

Demostración. Usando primero la desigualdad de Hölder y luego, la desigualdad de Poincaré, tenemos que

$$|\langle \varphi, \eta \rangle| \leq \int_\Omega |\eta| dx \leq ||\eta||_{L^2(\Omega)} |\Omega|^{1/2} \leq c ||\eta||_{H_0^1(\Omega)} |\Omega|^{1/2},$$

con lo cual, φ resulta continua. Además, es claro que φ es lineal. □

Probaremos ahora un caso particular del teorema de Stampacchia.

Teorema 2.3.7. *Sea $A\colon H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por $A(z,\eta) = \int_\Omega \nabla z \nabla \eta dx$ y $\varphi\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\langle \varphi, \eta \rangle = \int_\Omega \eta dx$. Sea E convexo, cerrado, no vacío de $H_0^1(\Omega)$. Entonces, existe una única $u \in E$ tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (\eta - u) dx \geq \int_\Omega (\eta - u) dx \text{ para toda } \eta \in E. \tag{2.3.1}$$

Además, u se caracteriza por la propiedad

$$\begin{cases} u \in E \\ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int\limits_{\Omega} u dx = \min\limits_{\eta \in E} \left\{ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx - \int\limits_{\Omega} \eta \right\} \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Demostración. La idea de la demostración se divide en dos pasos:

(1) Probar que existe una única u que resuelve el problema (2.3.2).

(2) Probar que el problema de la desigualdad variacional (2.3.1) y el problema de minimización (2.3.2) son equivalentes.

Paso (1)

Definimos $J(\eta) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx - \int\limits_{\Omega} \eta$.

Paso (2)

• Veamos que si u es la solución del problema de minimización (2.3.2), entonces resuelve la desigualdad variacional (2.3.1).

Sea $t \in [0, 1]$, y $\eta \in E$. Como E es convexo, $t\eta + (1 - t)u \in E$. Defino

$$j(t) = J(t\eta + (1 - t)u),$$

lo que es lo mismo que

$$j(t) = J(u + t(\eta - u)).$$

Tenemos para todo $t \in [0, 1]$,

$$j(0) = J(u) = \min_E J \leq J(u + t(\eta - u)) = j(t)$$

Entonces, $J(u) \leq J(u + t(\eta - u))$. Es decir,

$$J(u) \leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla(u + t(\eta - u))|^2 dx - \int\limits_{\Omega} (u + t(\eta - u))dx$$

Desarrollando el lado derecho de la desigualdad queda

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + t\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla(\eta - u)dx + \frac{t^2}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla(\eta - u)|^2 dx - \int\limits_{\Omega} u dx - t\int\limits_{\Omega} (\eta - u)dx$$

Agrupando y reemplazando en la desigualdad,

$$J(u) \leq J(u) + t\left\{\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla(\eta - u)dx - \int\limits_{\Omega} (\eta - u)dx\right\} + \frac{t^2}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla(\eta - u)|^2 dx$$

Simplificando,

$$0 \leq t\left\{\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla(\eta - u)dx - \int\limits_{\Omega} (\eta - u)dx\right\} + \frac{t^2}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla(\eta - u)|^2 dx$$

Dividiendo la desigualdad por $t > 0$,

$$0 \leq \int_\Omega \nabla u \nabla(\eta - u)dx - \int_\Omega (\eta - u)dx + \frac{t}{2}\int_\Omega |\nabla(\eta - u)|^2 dx$$

Tomando límite de $t \to 0^+$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(\eta - u)dx \geq \int_\Omega (\eta - u)dx$$

Como η en E era arbitraria, tenemos que esta última desigualdad vale para toda η en E.

• Veamos que si u resuelve la desigualdad variacional (2.3.1), entonces u alcanza el mínimo del problema (2.3.2).

Vale (2.3.1), es decir, para toda $\eta \in E$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(\eta - u)dx \geq \int_\Omega (\eta - u)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla \eta dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \int_\Omega \eta dx - \int_\Omega u dx$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega u dx \leq \int_\Omega \nabla u \nabla \eta dx - \int_\Omega \eta dx$$

Esto es,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + J(u) \leq \int_\Omega \nabla u \nabla \eta dx - \int_\Omega \eta dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \eta|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \eta|^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + J(u) \leq \int_\Omega \nabla u \nabla \eta dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \eta|^2 dx + J(\eta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \eta dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \eta|^2 dx \leq J(\eta) - J(u)$$

Observando que $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \eta dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \eta|^2 dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u - \eta)|^2 dx \geq 0$, resulta que $J(\eta) - J(u) \geq 0$, o sea, $J(\eta) \geq J(u)$. Concluimos que, como $\eta \in E$ era arbitraria, $J(u) = \min_E J$. □

Observación 2.3.8. Si consideramos en el teorema anterior, $f \in H^{-1}(\Omega)$ y $\varphi = f$, es decir,

$$\langle f, \eta \rangle = \langle f, \eta \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \eta \in H_0^1(\Omega),$$

el resultado sigue valiendo y la demostración es completamente análoga.

Veamos una aplicación del teorema 2.3.7.

Definición 2.3.9. Sea $w \in H_0^1(\Omega)$. Decimos que $-\Delta w \leq 1$ en Ω si

$$\int_\Omega \nabla w \nabla v dx \leq \int_\Omega v dx$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$.

La siguiente proposición nos dice que el supremo de dos subsoluciones del operador $-\Delta$, es también una subsolución.

Proposición 2.3.10. *Sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$ tales que*

$$-\Delta u \leq 1, \ -\Delta v \leq 1 \text{ en } \Omega.$$

Entonces, $w = u \vee v = \sup\{u, v\}$ verifica $-\Delta w \leq 1$ en Ω.

Demostración. Queremos ver que $-\Delta w \leq 1$ en Ω.

Definamos el conjunto $E = \{\eta \in H_0^1(\Omega) : \eta \leq w \text{ c.t.p. de } \Omega\}$. E es convexo, cerrado, no vacío en $H_0^1(\Omega)$, por ejemplo $w \in E$. Por el teorema 2.3.7, existe una única $z \in E$ tal que $J(z) = \min_{\eta \in E} J(\eta)$, donde $J(\eta) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla \eta|^2 dx - \int_\Omega \eta dx$. El teorema me dice además que z resuelve la siguiente desigualdad variacional

$$\int_\Omega \nabla z \nabla(\eta - z) dx \geq \int_\Omega (\eta - z) dx \text{ para toda } \eta \in E.$$

(1) Veamos que $-\Delta z \leq 1$ en Ω.

Sean $t \geq 0$ y $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \leq 0$. Defino $i(t) = J(z + t\phi)$. Observemos que está bien definido pues $z + t\phi \in E$, ya que $t \geq 0$ y $\phi \leq 0$ implica que $t\phi \leq 0$, por lo tanto, $z + t\phi \leq z \leq w$. Explícitamente,

$$i(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla z + t\nabla\phi|^2 dx - \int_\Omega (z + t\phi) dx, \text{ para } t \geq 0$$

Como $i(0) = J(z) \leq J(z + t\phi) = i(t)$, para todo $t \geq 0$, resulta que $i'(0) \geq 0$. Como $i'(t) = \int_\Omega (\nabla z + t\nabla\phi)\nabla\phi dx - \int_\Omega \phi dx$, nos queda

$$\int_\Omega \nabla z \nabla\phi dx - \int_\Omega \phi dx \geq 0, \text{ para toda } \phi \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega \nabla z \nabla\phi dx \geq \int_\Omega \phi dx, \text{ para toda } \phi \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega \nabla z \nabla \phi dx \leq \int_\Omega \phi dx, \text{ para toda } \phi \geq 0$$

Por lo tanto, $-\Delta z \leq 1$ en Ω.

(2) Veamos que $z \geq u$ y $z \geq v$.

Alcanza con ver que $z \geq u$. $z \geq v$ es análogo. Tomo $\eta = z \vee u$. Queremos ver que $\eta = z$. Como $z \in E$, tenemos que $z \leq w = u \vee v$. Además, $u \leq w$. Entonces, $\eta \leq w$. Esto nos dice que $\eta \in E$, y por lo tanto podemos usarla como función test en la desigualdad variacional que soluciona z, quedando:

$$\int_\Omega (\eta - z)dx \leq \int_\Omega \nabla z \nabla(\eta - z)dx.$$

Por otro lado, $z \leq \eta$ implica $\eta - z \geq 0$, entonces podemos tomar $\eta - z \in H_0^1(\Omega)$ como función test en $-\Delta u \leq 1$:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(\eta - z)dx \leq \int_\Omega (\eta - z)dx.$$

Juntando las dos última desigualdades tenemos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(\eta - z)dx \leq \int_\Omega \nabla z \nabla(\eta - z)dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_\Omega \nabla(z - u)\nabla(\eta - z)dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_{\{z<u\}} \nabla(z - u)\nabla(\eta - z)dx + \int_{\{z\geq u\}} \nabla(z - u)\nabla(\eta - z)dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_{\{z<u\}} \nabla(z - u)\nabla(\eta - z)dx + \int_{\{z\geq u\}} \nabla(z - u)\nabla(z - z)dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_{\{z<u\}} \nabla(z - u)\nabla(u - z)dx = -\int_{\{z<u\}} |\nabla(u - z)^+|^2 dx \leq 0$$

Luego, $(u - z)^+ = 0$. Por lo tanto, $z \geq u$.

(3) Por último, observemos que $z \geq u$ y $z \geq v$ implica $z \geq u \vee v = w$. Pero, como $z \in E$, $z \leq w$. Luego, $z = w$ q.t.p. de Ω. Por (1), $-\Delta w \leq 1$ en Ω. $\square$

Definimos el conjunto

$$\mathcal{K} = \{\eta \in H_0^1(\Omega) : \eta \geq 0, -\Delta \eta \leq 1 \text{ en } \Omega\}$$

Corolario 2.3.11. *El supremo de dos funciones en $\mathcal{K}$, pertenece a $\mathcal{K}$.*

Demostración. Sea u y $v \in \mathcal{K}$. Llamo $w = u \vee v =: \sup\{u, v\}$. Queremos ver que $w \in \mathcal{K}$.

Es claro que $w \geq 0$, pues, por ejemplo, $w \geq u \geq 0$ ya que $u \in \mathcal{K}$. Además, por la proposición anterior, $-\Delta w \leq 1$. Luego, $w \in \mathcal{K}$. □

Capítulo 3

Operadores lineales y formas cuadráticas

En este capítulo, estudiaremos operadores lineales definidos en un espacio de Hilbert y formas cuadráticas. Estos temas nos serán útiles para probar un lema muy importante sobre diseño óptimo. La bibliografía que utilizamos fue el libro de Kinderlehrer y Stampacchia [16].

3.1. Operadores lineales

Sea X un espacio de Hilbert (real) con producto $(\cdot,\cdot)$ y norma $\|\cdot\|$. Un operador A en X es una aplicación lineal de $D(A)$ a X, donde $D(A)$ es un subespacio de X que llamamos dominio de A. El rango de A, que notamos $R(A)$, es el conjunto de todos los puntos $f \in X$ para los cuales existe un $x \in D(A)$ con $Ax = f$. El nucleo de A, $N(A)$, es el conjunto de todos los puntos $x \in D(A)$ tal que $Ax = 0$. El gráfico de A, es el subconjunto de $X \times X$ definido por

$$G(A) = \Big\{[x, f] \in X \times X : x \in D(A), f = Ax\Big\}.$$

Definición 3.1.1. Decimos que A es *cerrado* si el gráfico es cerrado en $X \times X$. Es decir, si $(x_h)_h$ es una sucesión en $D(A)$ que converge a un punto $x \in X$, y $(Ax_h)_h$ converge a un punto f, entonces $x \in D(A)$ y $f = Ax$.

Definición 3.1.2. Decimos que un operador B es una *extensión* de A si $G(A) \subset G(B)$, es decir, si $D(A) \subset D(B)$ y $Ax = Bx$ para todo $x \in D(A)$. En tal caso, notamos $A \subset B$.

Definición 3.1.3. Decimos que A es *positivo* si $(Ax, x) \geq 0$ para todo $x \in D(A)$.

Definición 3.1.4. Decimos que A es un operador *densamente definido* si su dominio $D(A)$ es denso en X.

En tal caso, definimos el operador *adjunto* A^* de A de la siguiente manera: el dominio de A^*, $D(A^*)$, es el conjunto de todos los $x \in X$ tales que existe $f \in X$ de modo que $(Ay, x) = (f, y)$ para todo $y \in D(A)$, y $A^*x = f$ para todo $x \in D(A^*)$.

Observación 3.1.5. La buena definición de A^*, sigue de la densidad de $D(A)$ en X.

Demostración. En efecto, si existe (otra) $g \in X$ tal que $(Ay, x) = (g, y)$ para todo $y \in D(A)$, resulta que $(f, y) = (g, y)$ para todo $y \in D(A)$. Entonces, $(f - g, y) = 0$ para todo $y \in D(A)$. Como $D(A)$ es denso en X, existe una sucesión $(y_h)_h$ en $D(A)$ que converge a $f - g$. Luego, $0 = (f - g, y_h)$ tiende a $\|f - g\|^2$, cuando $h \to +\infty$. Por lo tanto, $f = g$. □

Observación 3.1.6. A^* es cerrado.

Demostración. Si $z \in D(A^*)$, $y \in D(A)$, de la definición de A^*, tenemos que $(A^*z, y) = (Ay, z)$.

Sea $(x_h)_h$ sucesión en $D(A^*)$ que converge a x en X, y $(A^*x_h)_h$ que converge a f en X. Quiero ver que $x \in D(A^*)$ y $A^*x = f$. Como $x_h \in D(A^*)$, para todo $y \in D(A)$, tenemos que $(A^*x_h, y) = (Ay, x_h)$. Tomando límite de $h \to +\infty$, nos queda que $(f, y) = (Ay, x)$ para todo $y \in D(A)$. Luego, $x \in D(A^*)$. Ahora, como $x \in D(A^*)$, para todo $y \in D(A)$, tenemos que

$$(A^*x, y) = (Ay, x) = (f, y).$$

Entonces, $(A^*x - f, y) = 0$ para todo $y \in D(A)$. Como $D(A)$ es denso en X, resulta $A^*x = f$, como queríamos probar. □

Definición 3.1.7. Decimos que A es *simétrico* si $(Ax, y) = (x, Ay)$ para todo x, $y \in D(A)$.

Definición 3.1.8. Decimos que A es *autoadjunto* si $D(A)$ es denso en X y $A = A^*$.

Observación 3.1.9. Todo operador autoadjunto es cerrado y simétrico.

La siguiente proposición nos da una condición equivalente a ser un operador autoadjunto, cuando el operador es simétrico y positivo.

Proposición 3.1.10. *Sea A un operador simétrico y positivo en X. Son equivalentes:*

(a) A es autoadjunto.

(b) $R(I + A) = X$.

Demostración. Veamos que (a) ⇒ (b). Asumimos A autoadjunto. Probaremos primero que $R(I+A)$ es denso en X y luego, que es cerrado, concluyendo $R(I+A) = X$.

Para ver que es denso en X, como estamos en un espacio de Hilbert, basta probar que $R(I + A)^\perp = \{0\}$. Sea $y \in R(I + A)^\perp$. Entonces, para todo $x \in D(A)$,

$0 = (y, x + Ax) = (y, x) + (y, Ax)$, por lo tanto, $(Ax, y) = -(y, x)$ para todo $x \in D(A)$. Esto implica que $y \in D(A^*)$ y que $A^*y = -y$. Como $A = A^*$, tenemos que $y \in D(A)$ y $Ay = -y$. Como A es positivo, $0 \leq (Ay, y) = -(y, y) = -\|y\|^2 \leq 0$, por lo tanto $y = 0$. Luego, $R(I + A)^\perp = \{0\}$, es decir, $R(I + A)$ es denso en X.

Ahora, veamos que $R(I + A)$ es cerrado en X. Sea $(f_h)_h$ sucesión en $R(I + A)$ que converge a f en X. Sea $(x_h)_h$ sucesión en $D(A)$ tal que $f_h = x_h + Ax_h$ para toda $h \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}(f_h - f_k, x_h - x_k) &= (x_h + Ax_h - (x_k + Ax_k), x_h - x_k)\\ &= (x_h - x_k, x_h - x_k) + (Ax_h - Ax_k, x_h - x_k)\\ &= \|x_h - x_k\|^2 + (A(x_h - x_k), x_h - x_k)\\ &\geq \|x_h - x_k\|^2 + 0 = \|x_h - x_k\|^2.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\|x_h - x_k\|^2 \leq (f_h - f_k, x_h - x_k) \leq \|f_h - f_k\|\|x_h - x_k\|$$

y por ende,

$$\|x_h - x_k\| \leq \|f_h - f_k\|$$

Como $(f_h)_h$ es una sucesión convergente , en particular es una sucesión de Cauchy. Y por la desigualdad anterior, tenemos que $(x_h)_h$ también lo es. Como X es Hilbert, existe un $x \in X$ tal que $(x_h)_h$ converge a x. Ahora, de la igualdad $f_h - x_h = Ax_h$, pasando al límite, tenemos que $(Ax_h)_h$ converge a $g = f - x$. Como A es autoadjunto, es cerrado. Entonces, $x \in D(A)$ y $g = Ax$, por lo tanto, $f = x + Ax$. Esto implica que $f \in R(I + A)$. Luego, $R(I + A)$ es cerrado en X.

Veamos que (b) $\Rightarrow$ (a).

Veamos que $D(A)$ es denso en X, con lo cual A resulta densamente definido. Sea $f \in D(A)^\perp$, quiero ver que $f = 0$. Como $R(I + A) = X$, existe un $x \in D(A)$ tal que $f = x + Ax$. Como A es positivo, $(Ax, x) \geq 0$. Como $f \in D(A)^\perp$ y $x \in D(A)$,

$$0 = (f, x) = (x + Ax, x) = (x, x) + (Ax, x) \geq (x, x) = \|x\|^2,$$

lo que nos dice que $x = 0$, y entonces $f = x + Ax = 0$. Esto prueba que $D(A)^\perp = \{0\}$, por lo tanto A es densamente definido.

Como A es simétrico, A^* es una extensión de A. Esto es que sus gráficos verifican $G(A) \subset G(A^*)$, es decir, que $D(A) \subset D(A^*)$ y que $Ax = A^*x$ para todo $x \in D(A)$. Para probar que A es autoadjunto, alcanza con ver que $D(A^*) \subset D(A)$. Fijo $y \in D(A^*)$. Como $R(I + A) = X$, existe un $z \in D(A)$ tal que $y + A^*y = z + Az$, y existe un $x \in D(A)$ tal que $y - z = x + Ax$. Como A es simétrico, $I + A$ es simétrico, por lo tanto

$$(y + A^*y, x) = (z + Az, x) = ((I + A)z, x) = (z, (I + A)x) = (z, x + Ax) = (z, y - z)$$

Como $(A^*y, x) = (Ax, y)$,

$$(y - z, y) = (x + Ax, y) = (x, y) + (Ax, y) = (x, y) + (A^*y, x) = (x, y + A^*y) = (y - z, z).$$

Esto nos dice que $\|y - z\|^2 = 0$, entonces $y = z$. Luego, $y \in D(A)$. Esto prueba la inclusión que queríamos $D(A^*) \subset D(A)$. □

3.2. Formas cuadráticas

Definición 3.2.1. Una función $F\colon X \to [0, +\infty]$ es una *forma cuadrática* si existe un subespacio lineal $Y \subset X$ y una forma bilineal $B\colon Y \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que

$$F(x) = \begin{cases} B(x, x), & \text{si } x \in Y, \\ +\infty, & \text{si } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Sea $F\colon X \to [0, +\infty]$ una forma cuadrática. El dominio $D(F)$ es el subespacio de X definido por $D(F) = \{x \in X\colon F(x) < +\infty\}$.

Definición 3.2.2. Sea $F : X \to [0, +\infty]$ una forma cuadrática, sea B su forma bilineal asociada, y sea $V = \overline{D(F)}$. El operador A asociado a F es el operador lineal A en V definido de la siguiente manera: su dominio

$$D(A) = \Big\{x \in D(F)\colon \text{ existe } f \in V \text{ tal que } B(x, y) = (f, y)\ \forall y \in D(F)\Big\},$$

$$Ax = f \text{ para todo } x \in D(A).$$

Observación 3.2.3. La buena definición de A, sigue de la densidad de $D(F)$ en V.

Por el teorema de representación de Riesz, $x \in D(A)$ si y sólo si la aplicación lineal $B(x, \cdot)$ es continua en $D(F)$ para la topología en X.

Observación 3.2.4. Para todo $x \in D(A)$ y para todo $y \in D(F)$ tenemos $(Ax, y) = (f, y) = B(x, y)$. En particular, tomando $y = x$, $(Ax, x) = B(x, x) = F(x)$ para todo $x \in D(A)$.

Sea $P\colon X \to V$ la proyección ortogonal en $V = \overline{D(F)}$. Para todo x, $f \in X$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $B(x, y) = (f, y)$ para todo $y \in D(F)$.

(b) $x \in D(A)$ y $Ax = Pf$.

En efecto, si $B(x, y) = (f, y)$ para todo $y \in D(F)$, tenemos que $x \in D(A)$. Además, $f = Pf + w$, con $Pf \in V$ y $w \in V^\perp$. Entonces,

$$B(x, y) = (f, y) = (Pf + w, y) = (Pf, y) + (w, y) = (Pf, y) + 0 = (Pf, y)$$

para todo $y \in D(F) \subset V$. Luego, $Ax = Pf$. La otra implicación es similar. Si $x \in D(A)$, existe una $f \in V$ tal que $B(x, y) = (f, y)$ para todo $y \in D(F)$. Descomponiendo a $f = Pf + w$ con $Pf \in V$, $w \in V^\perp$ y leyendo la cadena de igualdades al revés, concluimos que (a) y (b) son equivalentes.

Ejemplo 3.2.5. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, sea $X = L^2(\Omega)$, sea $F\colon L^2(\Omega) \to [0, +\infty]$ la forma cuadrática

$$F(u) = \begin{cases} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, & \text{si } u \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty, & \text{si no.} \end{cases}$$

Sea A el operador lineal asociado a F. Notando Δ al operador Laplaciano, tenemos que

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) \colon \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$
$$Au = -\Delta u \text{ para toda } u \in D(A).$$

Si Ω es acotado con borde C^2, o si $\Omega = \mathbb{R}^n$, la teoría de regularidad para operadores elípticos nos dice que $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Proposición 3.2.6. *Sea $F\colon X \to [0, +\infty]$ una forma cuadrática, sea A su operador asociado en $V = \overline{D(F)}$, y sea $P\colon X \to V$ la proyección ortogonal en V. Para todo x, $f \in X$ son equivalentes:*

(a) $x \in D(A)$ y $Ax = Pf$.

(b) $F(y) \geq F(x) + 2(f, x - y)$ para todo $y \in X$.

(c) x es un punto mínimo en X del funcional $G(y) = F(y) - 2(f, y)$.

Demostración. Sean x y $f \in X$, y sea B la forma bilineal asociada a F.

• Veamos que (a) $\Rightarrow$ (b).

Suponemos $x \in D(A) \subset D(F)$ y $Ax = Pf$. Entonces, por la observación 3.2.4,

$$x \in D(F) \text{ y } B(x, v) = (Pf, v) = (f, v) \text{ para toda } v \in D(F).$$

Sea $y \in X$. Si $y \notin D(F)$, $F(y) = +\infty$ y la desigualdad (b) es trivial. Luego, basta probar (b) para $y \in D(F)$. Tomo $v = y - x$. Entonces, $v \in D(F)$ y

$$\begin{aligned} F(y) = F(v + x) = B(v + x, v + x) &= B(x, x) + 2B(x, v) + B(v, v) \\ &= F(x) + 2(f, v) + F(v) \\ &\geq F(x) + 2(f, y - x). \end{aligned}$$

Esto prueba (b).

• Veamos (b) $\Rightarrow$ (a).

Si $F(y) \geq F(x) + 2(f, x - y)$ para todo $y \in X$, tomando $y = 0$, tenemos que $F(x) \leq 2(f, x)$, por lo tanto $x \in D(F)$. Fijo $v \in D(F)$. Para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos que $F(x + tv) \geq F(x) + 2t(f, v)$. Como

$$\begin{aligned} F(x + tv) = B(x + tv, x + tv) &= B(x, x) + 2tB(x, v) + t^2 B(v, v) \\ &= F(x) + 2tB(x, v) + t^2 F(v), \end{aligned}$$

resulta $F(x) + 2tB(x, v) + t^2F(v) \geq F(x) + 2t(f, v)$. Esto implica que, simplificando $F(x)$ y diviendo por t,

$$2B(x, v) + tF(v) \geq 2(f, v) \text{ para todo } t > 0$$

$$2B(x, v) + tF(v) \leq 2(f, v) \text{ para todo } t < 0$$

Tomando límite de $t \to 0$, tenemos que $B(x, v) = (f, v) = (Pf, v)$. Como $Pf \in V$ y $B(x, v) = (Pf, v)$ para toda $v \in D(F)$, obtenemos que $Pf = Ax$.

• Veamos (b) $\Leftrightarrow$ (c).

x es punto mínimo de G en $X \Leftrightarrow G(x) \leq G(y)$ para todo $y \in X \Leftrightarrow$

$$F(x) - 2(f, x) \leq F(y) + 2(f, y)$$

$$\Leftrightarrow F(y) \geq F(x) + 2(f, y - x).$$

Lo que concluye la demostración. □

En el ejemplo 3.2.5, esta proposición nos dice que dados u, $f \in L^2(\Omega)$ son equivalentes:

(a) $u \in D(-\Delta)$ y $-\Delta u = f$.

(b) $\int\limits_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx - 2\int\limits_\Omega f(u - v)dx$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

(c) u es punto mínimo del funcional $G(v) = \int\limits_\Omega |\nabla v|^2 dx - 2\int\limits_\Omega fv dx$.

Teorema 3.2.7. *Sea $F\colon X \to [0, +\infty]$ una forma cuadrática y sea A el operador lineal en $V = \overline{D(F)}$ asociado a F. Entonces, A es positivo y simétrico. Si además, F es semicontinua inferior en X, entonces A es autoadjunto en V.*

Demostración. Si $x \in D(A)$, entonces $(Ax, x) = F(x) \geq 0$, usamos la observación 3.2.4. Por lo tanto, A es positivo. Para probar que A es simétrico, observemos que para todo $x, y \in D(A)$ tenemos que $(Ax, y) = B(x, y) = B(y, x) = (Ay, x)$, donde B es la forma bilineal asociada a F.

Supongamos F semicontinua inferior en X.

• Veamos que $R(I + A) = V$, donde I es el operador identidad.

Defino el funcional $G(y) = ||y||^2 + F(y) - 2(f, y)$. Es fácil ver que G es convexo y semicontinuo inferior en la topología fuerte de X, y semicontinuo inferior en la topología débil de X. Observemos que, usando $F(y) \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}||y||^2 &\leq \frac{1}{2}||y - f||^2 + \frac{1}{2}||f||^2 \\
&\leq ||y - f||^2 + ||f||^2 \\
&= ||y||^2 - 2(f, y) + 2||f||^2 \\
&\leq ||y||^2 + F(y) - 2(f, y) + 2||f||^2 \\
&= G(y) + 2||f||^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $G(y) \geq \frac{1}{2}\|y\|^2 - 2\|f\|^2$. Luego, G es coercivo en la topología débil de X.

Veamos que existe $x \in X$ punto mínimo de G. El funcional G es acotado inferiorment: $G(y) \geq \frac{1}{2}\|y\|^2 - 2\|f\|^2 \geq -2\|f\|^2 > -\infty$. Luego, $\inf\limits_X G =: \lambda \in \mathbb{R}$. Sea $(y_h)_h$ una sucesión minimizante en X. Tenemos que $G(y_h) \geq \frac{1}{2}\|y_h\|^2 - 2\|f\|^2$. Tomando límite , resulta $\limsup\limits_{h\to+\infty} \|y_h\|^2 \leq \lambda + 4\|f\|^2 < +\infty$. Como $(y_h)_h$ es acotada en X y X es Hilbert, por lo tanto reflexivo, existe $x \in X$ tal que (para una subsucesión que seguimos notando y_h) $(y_h)_h$ converge débil a x en X. Entonces,

$$y_h \rightharpoonup x \Rightarrow \|x\| \leq \liminf_{h\to+\infty} \|y_h\| \Rightarrow \|x\|^2 \leq \liminf_{h\to+\infty} \|y_h\|^2$$

Además, $y_h \rightharpoonup x \Rightarrow (f, y_h) \to (f, x)$. Y como F es semicontinua inferior en X, $F(x) \leq \liminf\limits_{h\to+\infty} F(y_h)$. Por lo tanto,

$$G(x) = \|x\|^2 + F(x) - 2(f, x) \leq \liminf_{h\to+\infty} \left\{\|y_h\|^2 + F(y_h) - 2(f, y_h)\right\} = \liminf_{h\to+\infty} G(y_h) = \lambda.$$

Concluimos que $G(x) = \min\limits_X G$.

Como $I + A$ es el operador asociado a la forma cuadrática $\|y\|^2 + F(y)$, por la proposición 3.2.6 tenemos que $f = Pf = (I + A)x$, por lo tanto $f \in R(I + A)$. Esto prueba que $R(I + A) = V$.

Por la proposición 3.1.10, sabemos que $R(I + A) = V$ es equivalente a A autoadjunto en V. ◻

Definición 3.2.8. Sea $F \colon X \to [0, +\infty]$ una forma cuadrática. Definimos el producto interno $(\cdot, \cdot)_F$ en $D(F)$ como

$$(x, y)_F = B(x, y) + (x, y)$$

donde B es la forma bilineal asociada a F. La norma correspondiente en $D(F)$ está dada por

$$\|x\|_F = (F(x) + \|x\|^2)^{1/2}.$$

Ejemplo 3.2.9. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, sea $X = L^2(\Omega)$, sea $F \colon L^2(\Omega) \to [0, +\infty]$ la forma cuadrática

$$F(u) = \begin{cases} \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx, & \text{si } u \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty, & \text{si no.} \end{cases}$$

Entonces, para toda $u \in D(F) = H_0^1(\Omega)$, el producto escalar $(u, v)_F$ coincide con el producto escalar $(u, v)_{H^1(\Omega)}$.

En el Capítulo 6, necesitaremos el siguiente resultado:

Proposición 3.2.10. *Sea $F\colon X \to [0, +\infty]$ una forma cuadrática semicontinua inferior y sea A su operador asociado en $V = \overline{D(F)}$. Entonces, $D(A)$ es denso en $D(F)$ para la norma $\|\cdot\|_F$.*

Demostración. Para ver que $D(A)$ es denso en $D(F)$ basta ver que si $y \in D(F)$ es tal que $(y, v)_F = 0$ para todo elemento v de $D(A)$, resulta $y = 0$. Tomo $y \in D(F)$ tal que $(y, v)_F = 0$ para todo elemento v de $D(A)$. Como A es positivo y autoadjunto en V (por el teorema 3.2.7), tenemos que $R(I + A) = V$, por la proposición 3.1.10. Sé que $y \in D(F) \subset V$, entonces existe un $x \in D(A)$ tal que $y = (I + A)x = x + Ax$. Como $(x, y)_F = 0$, tenemos que

$$\|y\|^2 = (y, y) = (x + Ax, y) = (x, y) + (Ax, y) = (x, y) + B(x, y) = (x, y)_F = 0$$

Por lo tanto, $y = 0$, que es lo que queríamos probar. Luego, $D(A)$ denso en $D(F)$. $\square$

Capítulo 4

Caracterización de $H_0^1(\Omega)$

En este capítulo, estudiamos algunos resultados del libro de Henrot y Pierre [15] sobre capacidad, cuasi-abiertos, cuasi-continuidad y el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. Uno de los objetivos es motivar la definición del espacio de Sobolev $H_0^1(A)$ para $A \subset \mathbb{R}^n$ cuasi-abierto.

4.1. Capacidad y cuasi-abiertos

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. La medida de Lebesgue de un subconjunto medible E de Ω la notamos $|E|$. Introducimos la noción de *capacidad* de un conjunto E en Ω.

Definición 4.1.1. Dado $E \subset \Omega$. Definimos la *capacidad* de E en Ω como

$$\operatorname{cap}(E) = \operatorname{ínf}\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx : \ u \in \mathcal{U}_E \right\}$$

donde $\mathcal{U}_E$ es el conjunto de todas las funciones u del espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ tal que $u \geq 1$ casi todo punto (c.t.p.) en un entorno de E.

Si una propiedad $P(x)$ ocurre para todo $x \in E$ salvo para elementos de un conjunto $Z \subset E$ con $\operatorname{cap}(Z) = 0$ diremos que $P(x)$ ocurre *cuasi-todo punto* de E (abreviaremos q.t.p. de E).

Definición 4.1.2. Un subconjunto A de Ω se dice *cuasi-abierto* si existe una sucesión decreciente de abiertos $(A_h)_h$, tal que $(\operatorname{cap}(A_h))_h$ tiende a cero y $A \cup A_h$ es abierto para toda $h \in \mathbb{N}$.

La clase de todos los subconjuntos cuasi-abiertos de Ω la notamos $\mathcal{A}(\Omega)$.

Definición 4.1.3. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice *cuasi-continua* (*-semicontinua inferior*) si para todo $\epsilon > 0$ existe una función $f_\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ continua (semicontinua inferior) tal que $\operatorname{cap}(\{f \neq f_\epsilon\}) < \epsilon$, donde $\{f \neq f_\epsilon\} = \{x \in \Omega : f(x) \neq f_\epsilon(x)\}$.

Proposición 4.1.4. *Sea $v \in H^1(\Omega)$ una función cuasi-continua tal que $v \geq 0$ c.t.p. de Ω. Entonces, $v \geq 0$ q.t.p.de Ω.*

Demostración. Sea $E = \{v < 0\} = \{x \in \Omega : v(x) < 0\}$. Sabemos que $|E| = 0$. Quiero ver que $\text{cap}(E) = 0$.

Como v es cuasi-continua, para cada $h \in \mathbb{N}$, existe $A_h \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $\text{cap}(A_h) < \frac{1}{h}$ y $v\big|_{\mathbb{R}^n \setminus A_h}$ es continua.

Tenemos que $E \cup A_h$ es abierto, para cada $h \in \mathbb{N}$. Pues,

$$E \cup A_h = [v^{-1}((-\infty, 0)) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)] \cup A_h$$

con A_h y $v^{-1}((-\infty, 0)) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)$ son abiertos. (El conjunto $v^{-1}((-\infty, 0)) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)$ es abierto pues $v\big|_{\mathbb{R}^n \setminus A_h}$ es continua).

Ahora, por definición de capacidad, dado $\epsilon > 0$, existen funciones v_h en $H_0^1(\Omega)$, tales que $v_h \geq 1$ c.t.p. de un entorno de A_h y

$$\int_\Omega |\nabla v_h|^2 dx \leq \text{cap}(A_h) + \epsilon < \frac{1}{h} + \epsilon.$$

Como $|E| = 0$ y $v_h \geq 1$ c.t.p. en un entorno de A_h, tenemos que $v_h \geq 1$ c.t.p. de un entorno de $A_h \cup E$. Por lo tanto, v_h es admisible en el conjunto de las funciones test para calcular la $\text{cap}(A_h \cup E)$. Entonces,

$$0 \leq \text{cap}(E) \leq \text{cap}(A_h \cup E) \leq \int_\Omega |\nabla v_h|^2 dx \leq \text{cap}(A_h) + \epsilon < \frac{1}{h} + \epsilon,$$

donde usamos, en la segunda desigualdad, la monotonía de la capacidad. Tomando límite de $h \to +\infty$ y de $\epsilon \to 0^+$, resulta $\text{cap}(E) = 0$. Esto nos dice, que $v \geq 0$ q.t.p. de Ω. □

Es conocido que toda función u del espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ tiene un representante cuasi-continuo, que está únicamente definido salvo un conjunto de capacidad cero.

Proposición 4.1.5. *Sea $u \in H_0^1(\Omega)$. Existe una función $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ cuasi-continua tal que $u = \tilde{u}$ c.t.p. de Ω. La función $\tilde{u}$ es única q.t.p. de Ω.*

Demostración. Existencia. Sean $u_h \in C_c^\infty(\Omega)$, para $h \in \mathbb{N}$, tales que $(u_h)_h$ converge a u en $H^1(\Omega)$ y c.t.p. de Ω. Como $(u_h)_h$ es una sucesión convergente en un espacio completo, en particular, es una sucesión de Cauchy. Entonces, puedo elegir una subsucesión de $(u_h)_h$, que seguimos notando con h, tal que

$$\sum_{h=1}^{\infty} 2^{2h} \|u_{h+1} - u_h\|^2_{H^1(\Omega)} < +\infty.$$

• Contrucción de los abiertos $(W_h)_h$ con $(\mathrm{cap}(W_h))_h$ tendiendo a cero.

Considero los siguientes conjuntos,

$$A_h = \Big\{|u_{h+1} - u_h| > 2^{-h}\Big\},$$

que resultan abiertos ya que cada u_h es continua. Ahora, tomo para cada $h \in \mathbb{N}$, el conjunto abierto $W_h = \cup_{k\geq h} A_k$.

Observemos que si llamo $v_h = 2^h|u_{h+1} - u_h|$, tenemos que $v_h > 1$ en A_h. Entonces, puedo tomarla como función test para el cálculo de la capacidad de A_h. así

$$\mathrm{cap}(A_h) \leq \int_\Omega |\nabla v_h|^2 dx \leq \|v_h\|^2_{H^1(\Omega)} = \|2^h|u_{h+1} - u_h|\|^2_{H^1(\Omega)} = 2^{2h}\|u_{h+1} - u_h\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Además, por la propiedad de subaditividad de la capacidad, tenemos que

$$\mathrm{cap}(W_h) \leq \sum_{k\geq h} \mathrm{cap}(A_k) \leq \sum_{k\geq h} 2^{2k}\|u_{k+1} - u_k\|^2_{H^1(\Omega)},$$

que tiende a cero cuando $h \to +\infty$ por ser la cola de una serie convergente. Luego, $(\mathrm{cap}(W_h))_h$ tiende a cero.

• Convergencia uniforme de $(u_k)_k$ a u en $\Omega \setminus W_h$.

Sea $x \in \Omega \setminus W_h = \cap_{k\geq h}(\Omega \setminus A_k) = \cap_{k\geq h}\Big\{|u_{k+1} - u_k| \leq 2^{-k}\Big\}$. Luego, $(u_k)_k$ converge uniformemente en $\Omega \setminus W_h$. Entonces, existe un límite uniforme que en principio depende de h, lo llamo v_h. Pero, observando que los abiertos $(W_k)_k$ verifican $W_{k+1} \subset W_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$, tenemos un único límite uniforme, independiente de h. Lo llamamos $\tilde{u}$. Por lo tanto, $(u_k)_k$ converge a $\tilde{u}$ uniformemente en $\mathbb{R}^n \setminus W_h$, para toda $h \in \mathbb{N}$.

Ahora, definimos $\tilde{u} = 0$ en $\cap_{h\in\mathbb{N}} W_h$, así $\tilde{u}$ está definida en todo Ω. Observemos que $\mathrm{cap}(\cap_{h\in\mathbb{N}} W_h) \leq \mathrm{cap}(W_k)$, y esta última es una sucesión que tiende a cero. Tenemos entonces que $|\cap_{h\in\mathbb{N}} W_h| = 0$.

Como $(u_k)_k$ converge a u c.t.p. de Ω y $(u_k)_k$ converge uniformemente a $\tilde{u}$ en $\Omega \setminus W_h$, para todo $h \in \mathbb{N}$, entonces $u = \tilde{u}$ c.t.p. de Ω.

Unicidad. Supongamos que $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ son funciones de $H^1(\Omega)$ cuasi-continuas tales que $\tilde{u} = u$ c.t.p. de Ω y $\tilde{v} = u$ c.t.p. de Ω. Entonces, $\tilde{u} - \tilde{v} = 0$ c.t.p. de Ω y es una función cuasi-continua. Por la proposición 4.1.4, resulta que $\tilde{u} - \tilde{v} = 0$ q.t.p. de Ω. Luego, $\tilde{u} = \tilde{v}$ q.t.p. de Ω. □

Se puede ver en el libro de Evans y Gariepy [14, Sección 4.8, Teorema 1] otra demostración de la existencia del representante cuasi-continuo de una función en $H^1(\Omega)$, que construye explícitamente dicho representante.

Lema 4.1.6. *Sea $u \in H^1(\Omega)$, $\tilde{u}$ su representante cuasi-continuo. Entonces,*

$$\mathrm{cap}(\Big\{|\tilde{u}| > 1\Big\}) \leq \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Demostración. Llamo $E = \left\{|\tilde{u}| > 1\right\}$. Como $\tilde{u}$ es cuasi-continua, existen $(W_h)_h$ abiertos decrecientes tal que $(\text{cap}(W_h))_h$ tiende a cero y $E \cup W_h$ es abierto, para toda $h \in \mathbb{N}$.

Como $(\text{cap}(W_h))_h$ tiende a cero, existen funciones $v_h \in H_0^1(\Omega)$ tales que $v_h \geq 1$ en W_h, $v_h \geq 0$ en Ω y $(\|v_h\|_{H^1(\Omega)})_h$ tiende a cero.

Tenemos que $|u| + v_h \geq 1$ en $E \cup W_h$, que es un conjunto abierto. Entonces, puedo tomarla como función test para el cálculo de la capacidad de $E \cup W_h$,

$$\text{cap}(E) \leq \text{cap}(E \cup W_h) \leq \||u| + v_h\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v_h\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Tomando límite de $h \to +\infty$, obtenemos la desigualdad que queríamos. □

4.2. Caracterización de $H_0^1(\Omega)$

Sea $A \subset \Omega$. Definimos el conjunto

$$\Gamma_A = \{v \in H_0^1(\Omega) \colon \exists (v_h)_h / (v_h)_h \to v \text{ en } H_0^1(\Omega) \text{ y } v_h \geq 1 \text{ en un entorno de } A\}$$

Si Γ_A es no vacío, se puede ver que el funcional $J(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx$, $J \colon \Gamma_A \to \mathbb{R}$, alcanza su mínimo valor.

Teorema 4.2.1. *Existe una única función $u_A \in \Gamma_A$ tal que*

$$\int_\Omega |\nabla u_A|^2 dx = \inf_{v \in \Gamma_A} \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \right\}.$$

Decimos que u_A es el potencial capacitario de A.

Demostración. Tenemos que Γ_A es un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de $H_0^1(\Omega)$. Aplicando el teorema de Stampacchia 2.3.4, resulta que existe $u_A \in \Gamma_A$ tal que alcanza el mínimo de J en Γ_A y es única. □

Lema 4.2.2. *Sea $(u_h)_h$ una sucesión en $C_c^\infty(\Omega)$ que converge a una función u en $H_0^1(\Omega)$. Entonces, existe una subsucesión $(u_{h_k})_k$ tal que $(\tilde{u}_{h_k})$ converge a $\tilde{u}$ q.t.p. de Ω.*

Demostración. La prueba es similar a la demostración de la proposición 4.1.5. Como $(u_h)_h$ es una sucesión convergente en un espacio completo, en particular, es una sucesión de Cauchy. Entonces, puedo elegir una subsucesión de $(u_h)_h$, que seguimos notando con h, tal que

$$\sum_{h=1}^{\infty} 2^{2h} \|u_{h+1} - u_h\|^2_{H^1(\Omega)} < +\infty.$$

Considero los siguientes conjuntos,

$$A_h = \left\{|\tilde{u}_{h+1} - \tilde{u}_h| > 2^{-h}\right\}.$$

Tomo para cada $h \in \mathbb{N}$, el conjunto $W_h = \cup_{k\geq h} A_k$. Al igual que en la proposición 4.1.5, se tiene que

$$\mathrm{cap}(W_h) \leq \sum_{k\geq h} \mathrm{cap}(A_k) \leq \sum_{k\geq h} 2^{2k} \|u_{k+1} - u_k\|^2_{H^1(\Omega)},$$

que tiende a cero cuando $h \to +\infty$ por ser la cola de una serie convergente. Luego, $(\mathrm{cap}(W_h))_h$ tiende a cero y procediendo como en la propocisión 4.1.5 se tiene que $(\tilde{u}_h)_h$ converge a $\tilde{u}$ q.t.p. de Ω. □

Teorema 4.2.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sea $A \subset \Omega$ un abierto. Entonces,*

$$u \in H_0^1(A) \Leftrightarrow u \in H_0^1(\Omega) \text{ y } \tilde{u} = 0 \text{ q.t.p. de } \Omega \setminus A.$$

Demostración. Si $u \in H_0^1(A)$, tomamos funciones $\phi_h \in C_c^\infty(A) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tales que $(\phi_h)_h$ converge a u en $H_0^1(A)$. Por lo tanto, $(\phi_h)_h$ converge a u en $H_0^1(\Omega)$. Por el lema 4.2.2, extrayendo una subsucesión, que seguimos notando con h, tenemos que $(\phi_h)_h$ converge a $\tilde{u}$ q.t.p. de Ω. Como $\phi_h = 0$ en $\Omega \setminus A$, resulta $\tilde{u} = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$.

Supongamos que $u \in H_0^1(\Omega)$ y que $\tilde{u} = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$. Queremos ver que $u \in H_0^1(A)$.

Podemos hacer las siguientes reducciones:

(1) $\Omega = \mathbb{R}^n$. Sino, extiendo las funciones por cero.

(2) $u \geq 0$. Recordando la descomposición $u = u^+ - u^-$.

(3) u acotada. Pues, si considero $v_h = u \vee h = \text{mín}\{u, h\} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $(v_h)_h$ converge a u en $H^1(\mathbb{R}^n)$, y como $H_0^1(A)$ es cerrado en $H^1(\mathbb{R}^n)$, si vemos que $v_h \in H_0^1(A)$ para toda $h \in \mathbb{N}$, luego, $u \in H_0^1(A)$.

(4) $\mathrm{sop}(u) \subset B_R(0)$, para algún $R > 0$. Sea $\xi \in C_c^\infty(B_2(0))$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi \equiv 1$ en $B_1(0)$, $\xi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$. Considero $\xi_h(x) = \xi(\frac{x}{h})$, $\mathrm{sop}(\xi_h) \subset B_{2h}(0)$, $\xi_h \equiv 1$ en $B_h(0)$ y $(\xi_h u)_h$ converge a u en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Entonces, suponemos $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, no negativa, acotada y con soporte contenido en una bola $B_R(0)$.

Como $\tilde{u}$ es cuasi-continua, existe una sucesión decreciente de abiertos $(W_h)_h$ tales que $(\mathrm{cap}(W_h))_h$ tiende a cero y $\tilde{u}\Big|_{\mathbb{R}^n\setminus W_h}$ es continua, para cada $h \in \mathbb{N}$.

Supongamos que contiene al conjunto de capacidad cero

$$V = \{x \in A^c : \tilde{u}(x) \neq 0\} \subset W_h,$$

recordemos que $\mathrm{cap}(V) = 0$. Entonces, $\tilde{u} = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus (A \cup W_h) = A^c \cap W_h^c$.

Sea $\delta > 0$. Considero los conjuntos $V_h = \{\tilde{u} < \delta\} \cup W_h$, que resultan abiertos ya que $\tilde{u}$ es continua en W_h^c y W_h es abierto. Así, $A^c \subset V_h$. Por lo tanto, $V_h^c \subset A$ y V_h^c es cerrado. Como además, $V_h^c \subset B_R(0)$. Entonces, V_h^c es compacto.

Sea u_{W_h} el potencial capacitario de W_h. Tenemos que

$$(u-\delta)^+(1-u_{W_h}) = 0 \text{ c.t.p. de } V_h.$$

Entonces,

$$(u-\delta)^+(1-u_{W_h}) = 0 \text{ c.t.p. de } A \setminus V_h.$$

Sea $(\rho_k)_k$ sucesión regularizante. Consideramos

$$z_{h,k} := \rho_k * [(u-\delta)^+(1-u_{W_h})] \in C_c^\infty(A),$$

para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $k = k(h, \delta)$.

Entonces, como $(1-u_{W_h})_h$ es una sucesión acotada y u es acotada, $(1-u_{W_h})_h$ converge a 1 en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y $\|u_{W_h}\|_{H^1}^2 = \operatorname{cap}(W_h)$ tiende a cero; tomando límite de $h \to +\infty$, $\delta \to 0^+$, resulta $(z_h)_h$ converge a u en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y como cada $z_h \in C_c^\infty(A)$, tenemos que, por definición de $H_0^1(A) = \overline{C_c^\infty(A)}^{\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}}$, $u \in H_0^1(A)$. □

Definición 4.2.4. Sea $A \subset \Omega$ cuasi-abierto. Defino

$$H_0^1(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) \colon \tilde{u} = 0 \text{ q.t.p. de } \Omega \setminus A\}.$$

Proposición 4.2.5. *Sea $A \subset \Omega$ un cuasi-abierto no vacío. Entonces,*

$$H_0^1(A) \textit{ es denso en } L^2(A).$$

Demostración. Como $L^2(A)$ es un espacio de Hilbert, basta ver que $H_0^1(A)^\perp = \{0\}$ con respecto al producto interno de $L^2(A)$.

Sea $f \in H_0^1(A)^\perp$. Es decir,

$$\int_A f v dx = 0,$$

para toda $v \in H_0^1(A)$. Quiero ver que $f = 0$ c.t.p. de A.

Como A es cuasi-abierto, existe una sucesión decreciente de abiertos $(W_h)_h$ tal que $(\operatorname{cap}(W_h))_h$ tiende a cero y $A \cup W_h$ es abierto para cada $h \in \mathbb{N}$.

Extiendo f a $A \cup W_h$, $f = 0$ en $W_h \setminus A$. Entonces, existe $f_h \in C_c^\infty(A \cup W_h)$ tal que $\|f_h - f\|_{L^2(A\cup W_h)} < \frac{1}{2^h}$, para cada $h \in \mathbb{N}$.

Considero u_{W_h} el potencial capacitario de W_h. Como $u_{W_h} = 1$ en W_h (ver [15, Teorema 3.3.21]), resulta que $f_h(1-u_{W_h}) \in H_0^1(A)$. Entonces,

$$0 = \int_A f f_h(1-u_{W_h}) dx, \ \forall h \in \mathbb{N}.$$

Ahora, $(f_h)_h$ converge a f en $L^2(\Omega)$ y $(1 - u_{W_h})_h$ es una sucesión acotada que converge a 1 en $H^1(\Omega)$. Por lo tanto,

$$\int_A f f_h (1 - u_{W_h}) dx \to \int_A f^2 dx.$$

Luego, $f = 0$ c.t.p. de A. □

Proposición 4.2.6. *Sea $A \subset \Omega$ un cuasi-abierto no vacío. Entonces,*

$$\{u_A^f : f \in L^\infty(\Omega)\} \textit{ es denso en } H_0^1(A).$$

Demostración. Sea $u \in H_0^1(A)$ y $g = -\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$. Entonces, $u = u_A^g$.

Como $L^\infty(\Omega)$ es denso en $H^{-1}(\Omega)$ (ver 2.2.9), existe una sucesión $(g_h)_h$ en $L^\infty(\Omega)$ que converge a g en $H^{-1}(\Omega)$. Es decir,

$$\|g_h - g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\left\{\langle g_h - g, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} : v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\right\}$$

tiende a cero. Entonces, $(u_A^{g_h})_h$ converge a $u_A^g = u$ en $H_0^1(A)$. En efecto,

$$\|u_A^{g_h} - u_A^g\|_{H_0^1(A)} = \|u_A^{g_h - g}\|_{H_0^1(A)} \leq c\|g_h - g\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

por la linealidad y continuidad del problema de Dirichlet. □

Notemos que la proposición anterior es muy importante ya que nos da un resultado *equivalente* a

$$L^\infty(\Omega) \text{ es denso en } H^{-1}(\Omega), \Omega \text{ abierto acotado}$$

para cuasi-abiertos, $\{u_A^f : f \in L^\infty(\Omega)\}$ es denso en $H_0^1(A)$.

Corolario 4.2.7. *Sea $A \subset \Omega$ un cuasi-abierto no vacío. Entonces,*

$$\{u_A^f : f \in L^\infty(\Omega)\} \textit{ es denso en } L^2(A).$$

Demostración. Sigue de las dos proposiciones anteriores. □

Capítulo 5

Γ-convergencia

En la primera sección, estudiamos propiedades básicas de la Γ-convergencia, teniendo como referencia los libros de Andrea Braides [2] y Gianni Dal Maso [8].

Definimos la γ-convergencia de una sucesión de conjuntos cuasi-abiertos contenidos en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y damos una caracterización variacional y otra, en término de operadores resolventes. Más adelante, vemos que la γ-convergencia de conjuntos cuasi-abiertos es un caso particular de la γ-convergencia de medidas borelianas, no negativas, que pueden tomar el valor $+\infty$ y que se anulan en todos los conjuntos de capacidad cero. Utilizamos como bibliografía, principalmente, los trabajos de Dal Maso y Mosco [9, Secciones 3 y 4] y Bucur [4].

5.1. Γ-convergencia

Definición 5.1.1. Sea X un espacio métrico. Sean $F_h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcionales. Decimos que $(F_h)_h$ Γ-converge a F en X, si

(i) para toda $u \in X$ y para toda sucesión $(u_h)_h$ en X tal que $u_h \to u$ en X, se tiene que

$$F(u) \leq \liminf_{h\to+\infty} F_h(u_h),$$

(ii) para toda $u \in X$ tal que $F(u) < \infty$, existe una sucesión $(u_h)_h$ en X tal que $u_h \to u$ en X y

$$F(u) = \lim_{h\to+\infty} F_h(u_h).$$

En tal caso, se dirá que F es el Γ-límite de $(F_h)_h$.

Observación 5.1.2. Notar que la condición (ii) de la definición de Γ-convergencia, es equivalente a que para toda $u \in X$, exista una sucesión $(u_h)_h$ en X tal que $u_h \to u$ en X y

$$F(u) \geq \limsup_{h\to+\infty} F_h(u_h).$$

La Γ-convergencia es estable bajo perturbaciones continuas.

Observación 5.1.3. Sean $F_h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $F, G : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcionales tales que $(F_h)_h$ Γ-converge a F en X y G es continua en X. Entonces, $(F_h + G)_h$ Γ-converge a $F + G$.

Demostración. Es inmediata de la definición de Γ-convergencia y la continuidad de G. □

El Γ-límite de formas cuadráticas en X, resulta ser también una forma cuadrática en X, (ver la definición de forma cuadrática en 3.2.1).

Teorema 5.1.4. *Sea $(F_h)_h$ una sucesión de formas cuadráticas no negativas en X tal que Γ-converge a F. Entonces, F es una forma cuadrática no negativa.*

Se puede encontrar una demostración en el libro de Gianni Dal Maso [8, Teorema 11.10].

Proposición 5.1.5. *Sean F_h, F, $G\colon X \to \mathbb{R}$ tales que $(F_h)_h$ Γ-converge a F y G es continua. Si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existe $K_\lambda \subset X$ compacto tal que*

$$\{v \in X\colon F_h(v) + G(v) \leq \lambda\} \subset K_\lambda \ \forall h \in \mathbb{N}.$$

Entonces, $F + G$ alcanza su mínimo en X y

$$\lim_{h\to+\infty} \inf_{v\in X}\{F_h(v) + G(v)\} = \min_{v\in X}\{F(v) + G(v)\}.$$

Si además, $F_h + G$ alcanza su mínimo en $u_h \in X$ y $F + G$ tiene un único mínimo u en X, entonces $(u_h)_h$ converge a u en X.

Demostración. Como la Γ-convergencia es estable por perturbaciones continuas, podemos olvidarnos de la función G. Pues, como la sucesión $(F_h)_h$ Γ-converge a F y G es continua, tenemos que $(F_h+G)_h$ Γ-converge a $F+G$. Definiendo $\tilde{F}_h = F_h+G$ y $\tilde{F} = F + G$, basta probar que si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existe $K_\lambda \subset X$ compacto tal que

$$\{v \in X\colon \tilde{F}_h(v) \leq \lambda\} \subset K_\lambda \ \forall h \in \mathbb{N},$$

entonces $\tilde{F}$ alcanza el mínimo en X y vale

$$\lim_{h\to+\infty} \inf_{v\in X}\{\tilde{F}_h(v)\} = \min_{v\in X}\{\tilde{F}(v)\}.$$

Para simplificar la notación, $\tilde{F} = F$ y $\tilde{F}_h = F_h$.

Por definición de ínfimo, para cada $h \in \mathbb{N}$, existe un $x_h \in X$ tal que

$$F_h(x_h) \leq \inf_X F_h + \frac{1}{h}.$$

Asumimos $X \neq \emptyset$. Tomo $x_0 \in X$. Por la segunda condición de la definición de Γ-convergencia, tenemos que existe una sucesión $(z_h)_h$ en X, tal que $(z_h)_h$ converge a x_0 en X y

$$\limsup_{h\to+\infty} F_h(z_h) \leq F(x_0) < \infty,$$

por lo tanto,

$$\sup_{h\in\mathbb{N}} F_h(z_h) < +\infty$$

Entonces,

$$F_h(x_h) \leq \inf_X F_h + \frac{1}{h} \leq F_h(z_h) + 1 \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} F_k(z_k) + 1 =: \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, $x_h \in \{v \in X\colon F_h(v) \leq \lambda\}$, para toda $h \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, existe K_λ compacto en X tal que

$$\{v \in X\colon F_h(v) \leq \lambda\} \subset K_\lambda, \text{ para toda } h \in \mathbb{N}.$$

Luego, $(x_h)_h \subset K_\lambda$. Por lo tanto, existe una subsucesión de $(x_h)_h$, que seguimos notando con h, que converge a un $x \in X$. Por la primera condición de la definición de la Γ-convergencia de $(F_h)_h$ a F, tenemos que

$$\liminf_{h\to+\infty} F_h(x_h) \geq F(x) \geq \inf_X F.$$

Entonces,

$$\liminf_{h\to+\infty} \inf_X F_h \geq \inf_X F.$$

Por otro lado, por la definición de ínfimo, dado $\epsilon > 0$, existe $y \in X$ tal que

$$F(y) \leq \inf_X F + \epsilon.$$

Por la segunda condición de la definición de Γ-convergencia de $(F_h)_h$ a F, tenemos que existe una sucesión $(y_h)_h$ que converge a y, tal que

$$\limsup_{h\to+\infty} F_h(y_h) \leq F(y).$$

Entonces,

$$\limsup_{h\to+\infty} \inf_X F_h \leq \limsup_{h\to+\infty} F_h(y_h) \leq \inf_X F + \epsilon.$$

Luego,

$$\limsup_{h\to+\infty} \inf_X F_h \leq \inf_X F + \epsilon,$$

para todo $\epsilon > 0$. Entonces,

$$\limsup_{h\to+\infty} \inf_X F_h \leq \inf_X F.$$

Además,

$$\limsup_{h\to+\infty} \inf_X F_h \le \inf_X F \le F(x) \le \liminf_{h\to+\infty} \inf_X F_h \le \limsup_{h\to+\infty} \inf_X F_h.$$

Entonces, valen las igualdades. Por lo tanto, F alcanza el mínimo en x y

$$\lim_{h\to+\infty} \inf_X F_h = \min_X F,$$

como queríamos ver.

Si además, existen $u_h \in X$ tal que $\min_X F_h = F_h(u_h)$ y existe un único $u \in X$ tal que $\min_X F = F(u)$, veamos que $(u_h)_h$ converge a u en X. En efecto, por lo probado anteriormente tenemos que

$$\lim_{h\to+\infty} F_h(u_h) = \lim_{h\to+\infty} \inf_X F_h = \min_X F = F(u).$$

Veamos que toda $(u_{h_k})_k$ subsucesión de $(u_h)_h$, admite una subsubsucesión $(u_{h_{k_j}})_j$ convergente a u. Luego, la sucesión *entera* $(u_h)_h$ converge a u. Sea $(u_{h_k})_k$ subsucesión de $(u_h)_h$. Como $\lim_h F_h(u_h) = F(u)$, resulta $\lim_k F_{h_k}(u_{h_k}) = F(u)$. Entonces, podemos suponer que $u_{h_k} \in \{v \in X\colon F_{h_k}(v) \le F(u) + 1\}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, existe un compacto K que contiene dicho conjunto. En particular contiene a la sucesión $(u_{h_k})_k$. Luego, existe una subsucesión $(u_{h_{k_j}})_j$ que converge a un cierto $x \in K$. Por la primera condición de la Γ-convergencia, tenemos que

$$F(x) \le \liminf_{j\to+\infty} F_{h_{k_j}}(u_{h_{k_j}}) = F(u) = \min_X F.$$

Como estamos suponiendo que F tiene un único punto mínimo, resulta $u = x$, lo que concluye la demostración. □

Proposición 5.1.6. *Sean X e Y espacios es Banach tales que $Y \subset X$. Y es reflexivo y separable. Y es denso en X. La inclusión $Y \hookrightarrow X$ es compacta. Sea $F_h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa para cada $h \in \mathbb{N}$ tal que $F_h(u) \ge \|u\|_Y^2$ para toda $u \in Y$ y $F_h(u) = +\infty$ si $u \notin Y$. Supongamos que existe una $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ semicontinua inferior y convexa tal que*

$$\lim_{h\to+\infty} \inf_{v\in X}\{F_h(v) + G(v)\} = \min_{v\in X}\{F(v) + G(v)\},$$

para toda $G : X \to \mathbb{R}$ continua y lineal. Entonces, $(F_h)_h$ Γ-converge a F en X.

Se demuestra usando algunos resultados de [1, Corolario 3.13]. Nos interesa la proposición anterior en el caso en que $X = L^2(\Omega)$, $Y = H_0^1(\Omega)$, para Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$.

5.2. γ-convergencia I

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sea $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, el operador de Laplace. Sea $A \subset \Omega$ un cuasi-abierto y sea el $R_A = (-\Delta)^{-1}$, el operador resolvente. Es decir, $R_A(f) = u_A^f$ para cada $f \in H^{-1}(\Omega)$. Esto es,

$$\begin{cases} -\Delta u_A^f = f \text{ en } A, \\ u_A^f \in H_0^1(A). \end{cases}$$

Notamos $\mathcal{A}(\Omega) = \{A \subset \Omega : A \text{ cuasi-abierto }\}$.

Definición 5.2.1. Sea $(A_h)_h$ una sucesión en $\mathcal{A}(\Omega)$. Decimos que

$$(A_h)_h \ \gamma\text{-converge a } A \in \mathcal{A}(\Omega)$$

si

$$(R_{A_h}(f))_h \text{ converge a } R_A(f) \text{ en } H_0^1(\Omega) \text{ para toda } f \in H^{-1}(\Omega).$$

Observación 5.2.2. Vimos en el teorema de *Independencia de f* 2.2.10, que si $(u^1_{A_h})_h$ converge a u^1_A fuerte en $L^2(\Omega)$, entonces $(u^f_{A_h})_h$ converge a u^f_A fuerte en $H_0^1(\Omega)$, para toda $f \in H^{-1}(\Omega)$. Por lo tanto, podemos decir que

$$(A_h)_h \ \gamma\text{-converge a } A \in \mathcal{A}(\Omega) \Leftrightarrow (R_{A_h}(1))_h \text{ converge a } R_A(1) \text{ en } L^2(\Omega).$$

A continuación, daremos dos caracterizaciones de la γ-convergencia de conjuntos cuasi-abiertos contenidos en un abierto acotado Ω. La primera se trata de una caracterización variacional y la segunda, en términos de operadores resolventes. Más adelante, veremos que la γ-convergencia de cuasi-abiertos es un caso particular de la γ-convergencia de ciertas medidas en el espacio de medidas borelianas, no negativas, que pueden tomar el valor $+\infty$ y que se anulan en todos los conjuntos de capacidad cero.

Para todo $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ consideramos el funcional $\Phi_A : L^2(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ definido por

$$\Phi_A(u) = \begin{cases} \int_A |\nabla u|^2 dx, & \text{si } u \in H_0^1(A), \\ +\infty, & \text{sino.} \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Proposición 5.2.3 (Caracterización variacional)**.** *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos y sea $A \in \mathcal{A}(\Omega)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $(A_h)_h$ γ-converge a A.

(ii) $(\Phi_{A_h})_h$ Γ-converge a Φ_A en $L^2(\Omega)$.

Demostración.

- Veamos que (i) $\Rightarrow$ (ii).

Llamo $Y = H_0^1(\Omega)$, $X = L^2(\Omega)$. Entonces, $Y \subset X$, Y es reflexivo y separable, Y es denso en X, la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacta. Las funciones Φ_{A_h} son convexas y $\Phi_{A_h}(v) = \|v\|^2_{H_0^1(A_h)}$ para toda $v \in H_0^1(A_h)$ y $\Phi_{A_h}(v) = +\infty$ si $v \notin H_0^1(A_h)$. Además, Φ_A es semicontinua inferior y convexa.

Veamos que para toda $G\colon X \to \mathbb{R}$ lineal y continua vale

$$\lim_h \inf_{v\in X}\{\Phi_{A_h}(v) + G(v)\} = \min_{v\in X}\{\Phi_A(v) + G(v)\}$$

Fijo una función $G\colon X \to \mathbb{R}$ lineal y continua. Por la definición de ínfimo, para cada $h \in \mathbb{N}$, existe una función $v_h \in H_0^1(A_h)$ tal que

$$\Phi_{A_h}(v_h) + G(v_h) \leq \inf_X\{\Phi_{A_h} + G\} + \frac{1}{h}$$

Como G es lineal, $G(0) = 0$. Entonces,

$$\Phi_{A_h}(v_h) + G(v_h) \leq \inf_X\{\Phi_{A_h} + G\} + \frac{1}{h} \leq \Phi_{A_h}(0) + G(0) + 1 = 1 < \infty$$

Por otro lado, como G es continua en $L^2(\Omega)$, existe una constante $M > 0$ tal que $|G(v)| \leq M\|v\|_{L^2(\Omega)}$ para toda $v \in L^2(\Omega)$. En particular, $|G(v_h)| \leq M\|v_h\|_{L^2(\Omega)}$ para toda $h \in \mathbb{N}$. Usando la desigualdad de Poincaré, pues cada $v_h \in H_0^1(A_h)$, y el hecho de que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, resulta

$$|G(v_h)| \leq M\alpha(c)\|v_h\|_{H_0^1(A_h)}, \ \forall h \in \mathbb{N}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\|v_h\|^2_{H_0^1(A_h)} - M\alpha(c)\|v_h\|_{H_0^1(A_h)} &= \Phi_{A_h}(v_h) - M\alpha(c)\|v_h\|_{H_0^1(A_h)}\\ &\leq \Phi_{A_h}(v_h) + G(v_h) \leq 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(v_h)_h$ es acotada en $Y = H_0^1(\Omega)$. Luego, existe una subsucesión, que seguiremos notando con h, y una función $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $(v_h)_h$ converge a v débil en $H_0^1(\Omega)$ y por el teorema de Rellich-Kondrachov, fuerte en $L^2(\Omega)$.

Como G es continua en $L^2(\Omega)$ y $(v_h)_h$ converge a v fuerte en $L^2(\Omega)$, resulta $G(v) = \lim_h G(v_h)$. Por la convergencia débil en $H_0^1(\Omega)$, tenemos que

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{h\to+\infty} \|v_h\|_{H_0^1(A_h)}$$

Entonces,

$$\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} + G(v) \leq \liminf_{h\to+\infty}\{\Phi_{A_h}(v_h) + G(v_h)\}$$

-Veamos que $v \in H_0^1(A)$.

Sea $f = -\Delta v \in H^{-1}(\Omega)$. Considero $u_h = u^f_{A_h}$, es decir, $R_{A_h}(f) = u_h \in H^1_0(A_h)$. Como $(A_h)_h$ γ-converge a A, tenemos que $(u_h)_h$ converge a u^f_A fuerte en $H^1_0(\Omega)$. Quiero ver que $v = u^f_A$. Llamo $u = u^f_A$.

Tomando $v_h - u_h \in H^1_0(A_h)$ como función test en la formulación débil de $-\Delta u_h = f$ en A_h y usando el hecho de que $f = -\Delta v$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(v_h - u_h)\nabla u_h dx &= \int_{A_h} \nabla(v_h - u_h)\nabla u_h dx = \int_{A_h} (v_h - u_h) f dx \\ &= \int_{A_h} (v_h - u_h)(-\Delta v) dx = \int_{A_h} \nabla(v_h - u_h)\nabla v dx \\ &= \int_\Omega \nabla(v_h - u_h)\nabla v dx\end{aligned}$$

Ahora, tomando límite en h, como $(v_h - u_h)_h$ converge a $v - u$ débil en $H^1_0(\Omega)$ y $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $H^1_0(\Omega)$, resulta

$$\int_\Omega \nabla(v - u)\nabla u dx = \int_\Omega \nabla(v - u)\nabla v dx$$

Entonces,

$$\int_\Omega |\nabla(v - u)|^2 dx = 0$$

Por lo tanto, $v = u^f_A$. Luego, $v \in H^1_0(A)$ como queríamos ver. Entonces, v pertenece al dominio de Φ_A y $\|v\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \|v\|^2_{H^1_0(A)} = \Phi_A(v)$. Luego,

$$\inf_X\{\Phi_A + G\} \leq \Phi_A(v) + G(v) \leq \liminf_{h\to+\infty}\{\Phi_{A_h}(v_h) + G(v_h)\} \leq \liminf_{h\to+\infty} \inf_X\{\Phi_{A_h} + G\}$$

Por lo tanto,

$$\inf_X\{\Phi_A + G\} \leq \liminf_{h\to+\infty} \inf_X\{\Phi_{A_h} + G\}$$

Sea $\epsilon > 0$. Por definicón de ínfimo y el hecho de que el ínfimo de $\Phi_A + G$ en $L^2(\Omega)$ coincide con el ínfimo de $\Phi_A + G$ en $H^1_0(A)$, existe $u \in H^1_0(A)$ tal que

$$\Phi_A(u) + G(u) \leq \inf_X\{\Phi_A + G\} + \epsilon$$

Considero $f = -\Delta u$, $f \in H^{-1}(\Omega)$ y vale que $u = u^f_A$. Tomo $z_h \in H^1_0(A_h)$ tal que $-\Delta z_h = f$ en A_h. Como $(A_h)_h$ γ-converge a A, tenemos que $(z_h)_h$ converge a u fuerte en $H^1_0(\Omega)$. En particular, la sucesión de normas $(\|z_h\|_{H^1_0(\Omega)})_h$ converge a $\|u\|_{H^1_0(\Omega)}$. Como cada $z_h \in H^1_0(A_h)$, tenemos que $\|z_h\|_{H^1_0(\Omega)} = \|z_h\|_{H^1_0(A_h)} = \Phi_{A_h}(z_h)^{1/2}$. Como $u \in H^1_0(A)$, $\|u\|_{H^1_0(\Omega)} = \|u\|_{H^1_0(A)} = \Phi_A(u)^{1/2}$. Entonces,

$$\lim_{h\to+\infty} \Phi_{A_h}(z_h) = \Phi_A(u).$$

Por la continuidad de G en $L^2(\Omega)$ y el hecho de que $(z_h)_h$ converge a u fuerte en $H_0^1(\Omega)$ (por lo tanto, en $L^2(\Omega)$), resulta que

$$\lim_{h\to+\infty} G(z_h) = G(u)$$

Luego,

$$\begin{aligned}\limsup_{h\to+\infty} \inf_{H_0^1(A_h)} \{\Phi_{A_h} + G\} &\le \lim_{h\to+\infty} \{\Phi_{A_h}(z_h) + G(z_h)\} \\ &= \Phi_A(u) + G(u) \\ &\le \inf_{H_0^1(A)} \{\Phi_A + G\} + \epsilon\end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto,

$$\limsup_{h\to+\infty} \inf_X \{\Phi_{A_h} + G\} \le \inf_X \{\Phi_A + G\}$$

Finalmente,

$$\limsup_{h\to+\infty} \inf_X \{\Phi_{A_h} + G\} \le \inf_X \{\Phi_A + G\} \le \Phi_A(v) + G(v) \le \liminf_{h\to+\infty} \inf_X \{\Phi_{A_h} + G\},$$

entonces, $\Phi_A + G$ alcanza el mínimo y

$$\lim_{h\to+\infty} \inf_X \{\Phi_{A_h} + G\} = \min_X \{\Phi_A + G\}$$

como queríamos ver.

Ahora, estamos en condiciones de aplicar la proposición 5.1.6, y por lo tanto, $(\Phi_{A_h})_h$ Γ-converge a Φ_A en $L^2(\Omega)$.

• Veamos (ii) $\Rightarrow$ (i).

Llamo nuevamente $X = L^2(\Omega)$, $G\colon X \to \mathbb{R}$, $G(v) = -2\int_\Omega v\,dx$ es continua. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existe un compacto $K_\lambda \subset X$ tal que

$$E_\lambda = \{v \in L^2(\Omega)\colon \Phi_{A_h}(v) + G(v) \le \lambda\} \subset K_\lambda \ \forall h \in \mathbb{N}.$$

Pues, si tomo $v \in E_\lambda$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo, en particular $v \in H_0^1(A_h) \subset H_0^1(\Omega)$ y, usando las desigualdades de Hölder y Poincaré

$$-\frac{1}{2}G(v) = \int_\Omega v\,dx \le |\Omega|^{1/2}\|v\|_{L^2(\Omega)} \le c|\Omega|^{1/2}\|v\|_{H_0^1(A_h)} = c|\Omega|^{1/2}\Phi_{A_h}(v)^{1/2}$$

Entonces,

$$\Phi_{A_h}(v) - 2c|\Omega|^{1/2}\Phi_{A_h}(v)^{1/2} \le \Phi_{A_h}(v) + G(v) \le \lambda$$

Luego, $E_\lambda \subset K_\lambda$, donde K_λ es una bola cerrada en $H_0^1(\Omega)$ de radio que depende de λ. Esta bola resulta compacta en $L^2(\Omega)$ por Rellich-Kondrachov.

Por la proposición 5.1.5, resulta que $\Phi_A + G$ alcanza su mínimo y

$$\lim_{h\to+\infty} \inf_{v\in L^2(\Omega)} \{\Phi_{A_h}(v) + G(v)\} = \min_{v\in L^2(\Omega)} \{\Phi_A(v) + G(v)\},$$

es decir,

$$\lim_{h\to+\infty} \inf_{v\in H_0^1(A_h)} \left\{\int_{A_h} |\nabla v|^2 dx - 2\int_{A_h} v dx\right\} = \min_{v\in H_0^1(A)} \left\{\int_A |\nabla v|^2 dx - 2\int_A v dx\right\}.$$

Por la proposición 2.2.1 aplicada a cada A_h y a A, sabemos que

$$\min_{v\in H_0^1(A_h)} \left\{\int_{A_h} |\nabla v|^2 dx - 2\int_{A_h} v dx\right\} = \int_{A_h} |\nabla u^1_{A_h}|^2 dx - 2\int_{A_h} u^1_{A_h} dx$$

$$\min_{v\in H_0^1(A)} \left\{\int_A |\nabla v|^2 dx - 2\int_A v dx\right\} = \int_A |\nabla u^1_A|^2 dx - 2\int_A u^1_A dx.$$

Nuevamente, usando la segunda parte de la proposición 5.1.5 y el hecho de que $\Phi_{A_h} + G$ alcanza el mínimo en $u^1_{A_h}$ y $\Phi_A + G$ tiene un único punto mínimo u^1_A, tenemos que $(u^1_{A_h})_h$ converge a u^1_A en $L^2(\Omega)$. Por lo tanto, $(A_h)_h$ γ-converge a A en $\mathcal{A}(\Omega)$. □

Proposición 5.2.4 (Caracterización en términos de operadores resolventes)**.**

Sean $(A_h)_h$ una sucesión en $\mathcal{A}(\Omega)$, $A \in \mathcal{A}(\Omega)$. Son equivalentes:

(i) $(A_h)_h$ γ-converge a A en $\mathcal{A}(\Omega)$.

(ii) $(R_{A_h})_h$ converge a R_A en $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$.

Demostración.

• Veamos (i) ⇒ (ii).

Queremos ver que $(R_{A_h})_h$ converge a R_A en $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$, es decir,

$$\lim_{h\to+\infty} \sup_{\|f\|_{L^2(\Omega)}\leq 1} \|R_{A_h}(f) - R_A(f)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Recordemos la notación $R_A(f) = u^f_A$. Por definicón de supremo, para cada $h \in \mathbb{N}$, existe una $f_h \in L^2(\Omega)$, tal que

$$\sup_{\|f\|_{L^2(\Omega)}\leq 1} \|u^f_{A_h} - u^f_A\|_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{h} \leq \|u^{f_h}_{A_h} - u^{f_h}_A\|_{L^2(\Omega)}$$

con $\|f_h\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$. Veamos que $\|u^{f_h}_{A_h} - u^{f_h}_A\|_{L^2(\Omega)}$ tiende a cero, cuando $h \to +\infty$.

Como la sucesión $(f_h)_h$ es acotada en $L^2(\Omega)$, existe una subsucesión, que seguimos notando con h, y una f tal que $(f_h)_h$ converge a f débil en $L^2(\Omega)$. Como el operador inclusión $i\colon H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacto (por Rellich-Kondrachov), tenemos que su operador adjunto $i^*\colon L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ (que también es la inclusión) resulta compacto. Entonces, podemos afirmar que $(f_h)_h$ converge a f fuerte en $H^{-1}(\Omega)$.

Usando la linealidad y continuidad del problema de Dirichlet, tenemos que

$$\begin{aligned}\|u_{A_h}^{f_h} - u_A^{f_h}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_{A_h}^{f_h} - u_{A_h}^{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{A_h}^{f} - u_A^{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|u_A^{f} - u_A^{f_h}\|_{L^2(\Omega)}\\ &= \|u_{A_h}^{f_h-f}\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{A_h}^{f} - u_A^{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|u_A^{f-f_h}\|_{H^{-1}(\Omega)}\\ &\leq c\|f_h - f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u_{A_h}^{f} - u_A^{f}\|_{L^2(\Omega)} + c\|f - f_h\|_{H^{-1}(\Omega)}\\ &= 2c\|f_h - f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u_{A_h}^{f} - u_A^{f}\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Como $(f_h)_h$ converge a f fuerte en $H^{-1}(\Omega)$ y $\|u_{A_h}^{f} - u_A^{f}\|_{L^2(\Omega)}$ tiende a cero (porque $(A_h)_h$ γ-converge a A), resulta

$$\begin{aligned}\lim_{h\to+\infty} \sup_{\|g\|_{L^2(\Omega)}\leq 1} \|u_{A_h}^{g} - u_A^{g}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \lim_{h\to+\infty}\left\{\|u_{A_h}^{f_h} - u_A^{f_h}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{h}\right\}\\ &= \lim_{h\to+\infty} \|u_{A_h}^{f_h} - u_A^{f_h}\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq \lim_{h\to+\infty}\left\{2c\|f_h - f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u_{A_h}^{f} - u_A^{f}\|_{L^2(\Omega)}\right\} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión de operadores $(R_{A_h})_h$ converge a R_A en $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$.

• Veamos (ii) $\Rightarrow$ (i).

Para garantizar la γ-convergencia de $(A_h)_h$ a A, por el teorema 2.2.10, alcanza con ver que $(u_{A_h}^1)_h$ converge a u_A^1 en $L^2(\Omega)$. Por (ii), tomando $f = |\Omega|^{-1/2} \in L^2(\Omega)$, tenemos que $\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}0 = \lim_{h\to+\infty} \sup_{\|g\|_{L^2(\Omega)}\leq 1} \|u_{A_h}^{g} - u_A^{g}\|_{L^2(\Omega)} &\geq \lim_{h\to+\infty} \|u_{A_h}^{f} - u_A^{f}\|_{L^2(\Omega)}\\ &= |\Omega|^{-1/2} \lim_{h\to+\infty} \|u_{A_h}^{1} - u_A^{1}\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

5.3. El espacio de medidas capacitarias

Notamos con $\mathcal{M}_0$ al conjunto de medidas capacitarias de $\mathbb{R}^n$. Es decir, $\mathcal{M}_0$ es el conjunto de todas las medidas borelianas, no negativas, que pueden tomar el valor $+\infty$, que se anulan sobre todos los conjuntos de capacidad cero.

Ejemplo 5.3.1. Un ejemplo muy importante de medida capacitaria es

$$\infty_S(B) = \begin{cases} 0 & \text{si cap(B}\cap\text{S)=0} \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{5.3.1}$$

con $S \subset \mathbb{R}^n$.

A cada $\mu \in \mathcal{M}_0$ le asociamos un funcional cuadrático

$$F_\mu(u,\Omega) = \begin{cases} \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int\limits_\Omega |u|^2 d\mu & \text{si } u \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases} \tag{5.3.2}$$

donde Ω es un abierto acotado arbitrario de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 5.3.2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cuasi-abierto tal que $|A| < \infty$. El funcional asociado a ∞_{A^c} es

$$F_{\infty_{A^c}}(u,\Omega) = \begin{cases} \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int\limits_\Omega |u|^2 d\infty_{A^c} & \text{si } u \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

para todo abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Fijo Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$.

Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\int\limits_\Omega |u|^2 d\infty_{A^c} = 0$. Quiero ver que $u \in H_0^1(A \cap \Omega)$.

Llamo $E = \{u \neq 0\}$. Como $0 \leq \int_\Omega |u|^2 d\infty_{A^c} = 0$, tenemos que $u = 0$ ∞_{A^c}-casi todo punto. Es decir, $\infty_{A^c}(E) = 0$. Por definición de esta medida, $\text{cap}(E \cap A^c) = 0$. Luego, $u = 0$ q.t.p. de A^c. Además, $u = 0$ q.t.p. en Ω^c. Concluimos que $u = 0$ q.t.p. de $A^c \cup \Omega^c = (A \cap \Omega)^c$. Luego, $u \in H_0^1(A \cap \Omega)$.

Recíprocamente, si $u \in H_0^1(A \cap \Omega)$, en particular, $u \in H_0^1(A)$. Entonces, $u = 0$ q.t.p. de A^c. Nuevamente, llamo $E = \{u \neq 0\}$. Tenemos que $\text{cap}(E \cap A^c) = 0$, es decir, $\infty_{A^c}(E) = 0$. Por lo tanto,

$$\int\limits_\Omega |u|^2 d\infty_{A^c} = \int\limits_E |u|^2 d\infty_{A^c} = 0.$$

Entonces, el funcional asociado a ∞_{A^c} nos queda,

$$F_{\infty_{A^c}}(u,\Omega) = \begin{cases} \int\limits_{A\cap\Omega} |\nabla u|^2 dx & \text{si } u \in H_0^1(A \cap \Omega), \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Observemos que si A es acotado, para todo abierto Ω tal que $A \subset \Omega$, el funcional asociado a ∞_{A^c} nos queda,

$$F_{\infty_{A^c}}(u,\Omega) = \begin{cases} \int\limits_A |\nabla u|^2 dx & \text{si } u \in H_0^1(A), \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

que coincide con la definición de Φ_A (5.2.1).

A continuación, definimos una noción de convergencia de medidas en $\mathcal{M}_0$ que generaliza la noción de γ-convergencia de una sucesión $(A_h)_h$ de cuasi-abiertos uniformemente acotados, es decir, $A_h \subset \Omega$ para toda $h \in \mathbb{N}$, donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, ver 5.2.1.

Definición 5.3.3. Dadas $\mu_h, \mu \in \mathcal{M}_0$. Decimos que $(\mu_h)_h$ γ-converge a μ si para todo abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $F_{\mu_h}(\cdot, \Omega)$ Γ-converge a $F_\mu(\cdot, \Omega)$ en $L^2(\Omega)$.

Observación 5.3.4. Notemos que la notación es consistente con la definición de γ-convergencia de cuasi-abiertos uniformemente acotados $(A_h)_h$ a un cuasi-abierto A en $\mathcal{A}(\Omega)$. Pues, cada cuasi-abierto A_h representa la medida $\infty_{A_h^c}$ y, como vimos en el ejemplo 5.3.2, cada funcional Φ_{A_h} coincide con $F_{\infty_{A_h}}(\cdot, \Omega)$.

Podemos entonces, enunciar el siguiente resultado:

Proposición 5.3.5. *Sea una sucesión de cuasi-abiertos $(A_h)_h$ y un cuasi-abierto A contenidos en Ω. Son equivalentes:*

(i) $(A_h)_h$ γ-converge a A en $\mathcal{A}(\Omega)$.

(ii) $(\infty_{A_h^c})_h$ γ-converge a ∞_{A^c} en $\mathcal{M}_0$.

Demostración. Sigue del ejemplo 5.3.2, en el que se deduce que los funcionales Φ_{A_h}, Φ_A coinciden con los funcionales $F_{\infty_{A_h^c}}(\cdot, \Omega)$, $F_{\infty_{A^c}}(\cdot, \Omega)$ respectivamente, y de la proposición 5.2.3. □

Enunciamos unos resultados sobre una caracterización variacional y otra en términos de operadores resolventes de la definición de γ-convergencia de medidas capacitarias.

Proposición 5.3.6 (Caracterización variacional)**.** *Sea $(\mu_h)_h$ una sucesión en $\mathcal{M}_0$ y $\mu \in \mathcal{M}_0$. Son equivalentes:*

(i) $(\mu_h)_h$ γ-converge a μ.

(ii) La sucesión de mínimos $(m_h)_h$ converge a m, donde

$$m_h = \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \Big\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 d\mu_h + \int_\Omega f u dx \Big\}$$

$$m = \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \Big\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 d\mu + \int_\Omega f u dx \Big\},$$

para todo abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, para toda $f \in L^2(\Omega)$.

Demostración. Usando las proposiciones de Γ-convergencia 5.1.5 e 5.1.6 para $X = L^2(\Omega)$ y $Y = H_0^1(\Omega)$, la demostración resulta análoga a la prueba de la caracterización variacional de la γ-convergencia de cuasi-abiertos, 5.2.3. □

Para cada $\mu \in \mathcal{M}_0$ y cada abierto acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, notamos R_μ^Ω al operador resolvente

$$R_\mu^\Omega : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), R_\mu^\Omega(f) = u,$$

donde u es la solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Proposición 5.3.7 (Caracterización en términos de operadores resolventes)**.** *Sea $(\mu_h)_h$ una sucesión en $\mathcal{M}_0$ y $\mu \in \mathcal{M}_0$. Son equivalentes:*

(i) $(\mu_h)_h$ γ-converge a μ.

(ii) $(R_{\mu_h}^\Omega)_h$ converge a R_μ^Ω en $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$, para cada abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Demostración. Es análoga a la demostración que caracteriza a la γ-convergencia de cuasi-abiertos en términos de operadores resolventes, ver 5.2.4. □

Nuevamente, observamos que esta noción de convergencia de operadores resolventes de medidas en $\mathcal{M}_0$ generaliza la vista anteriormente para operadores resolventes de conjuntos cuasi-abiertos en $\mathcal{A}(\Omega)$.

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $f \in L^2(\Omega)$ y $\mu \in \mathcal{M}_0$. Llamamos al siguiente problema:

$$-\Delta u + \mu u = f \text{ en } \Omega \tag{5.3.3}$$

el *problema de Dirichlet relajado* en Ω.

Definición 5.3.8. Decimos que u es solución débil de (5.3.3) si

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, \mu), \\ \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv d\mu = \int_\Omega f v dx \ \forall v \in H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, \mu). \end{cases} \tag{5.3.4}$$

Ejemplo 5.3.9. Sea $A \subset \Omega$ un abierto. Tomamos la medida ∞_{A^c}, ver 5.3.1. Consideramos el problema de Dirichlet relajado

$$-\Delta u + \infty_{A^c} u = f \text{ en } \Omega.$$

Quiero ver que es equivalente al problema original de Dirichlet

$$u \in H_0^1(A), -\Delta u = f \text{ en } A.$$

Basta observar que

$$L^2(\Omega, \infty_{A^c}) = \{u \colon u = 0 \text{ q.t.p. de } A^c\},$$

entonces,

$$H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, \infty_{A^c}) = H_0^1(A).$$

Teorema 5.3.10 (Compacidad)**.** *Para toda sucesión* $(\mu_h)_{h\geq 0} \subset \mathcal{M}_0$ *existe una subsucesión* $(\mu_{h_k})_{k\geq 0}$ *tal que* γ*-converge a una* μ *en la clase* $\mathcal{M}_0$*.*

Se puede ver una demostración en [9, Teorema 4.14].

Este resultado de compacidad en el espacio de medidas capacitarias nos brinda un resultado de compacidad para los conjuntos cuasi-abiertos de medida de Lebesgue acotada. Si $(A_h)_h$ es una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$ (asociando a cada A_h con la medida $\infty_{A_h^c} \in \mathcal{M}_0$), tenemos que existe una subsucesión $(A_{h_k})_k$ y una medida $\mu \in \mathcal{M}_0$ tal que $(\infty_{A_{h_k}^c})_k$ γ-converge a μ. En tal caso, notaremos $(A_{h_k})_k$ γ-converge a μ.

5.4. γ-convergencia II

En esta sección, estudiaremos la γ-convergencia de una sucesión $(A_h)_h$ de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, con $c > 0$ una constante. Notar que está restricción no implica que la sucesión verifique $A_h \subset \Omega$, para algún Ω abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, $A_h = B_r(x_h)$ con $r > 0$ tal que $|A_h| = c$ y $(x_h)_h$ en $\mathbb{R}^n$, $\lim_h |x_h| = +\infty$.

Introducimos la notación que utilizaremos en el Capítulo 7.

Sea A un cuasi-abierto de $\mathbb{R}^n$. Notamos $R_A\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ al operador resolvente del problema de Dirichlet en A. Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $R_A(f) = u$, donde u es la solución débil de $-\Delta u = f$ en A:

$$\begin{cases} \int\limits_A \nabla u \nabla v dx = \int\limits_A f v dx, \ \forall v \in H_0^1(A), \\ u \in H_0^1(A). \end{cases}$$

Decimos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es un *abierto fino* si es unión arbitraria de intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\{u > r\}$ o $\{u < r\}$, donde $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ es una función super-armónica y $r \in \mathbb{R}$. Decimos que una función u es *super-armónica* en A, si $v \leq u$ en A, para toda v tal que $\Delta v = 0$ en A y $v \leq u$ en ∂A. La topología definida por los abiertos finos hace continuas a las funciones super-armónicas de $\mathbb{R}^n$. Se puede ver que una base de la clase de abiertos finos para un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es la clase de conjuntos de la forma

$$\bigcap_{h=1}^{k} \{y \in B\colon u_h(y) < r_h\},$$

donde B es una bola que contiene al punto x, u_h es super-armónica en B tal que $u_h(x) = 0$ y $r_h > 0$, para cada h. Se puede ver más en [11, Capítulo XI, Parte I].

Sea μ una medida de Borel positiva que se anula en todos los conjuntos de capacidad cero, es decir, $\mu \in \mathcal{M}_0$. El conjunto regular de la medida μ, lo notamos

A_μ.

$$A_\mu = \{A \colon A \text{ abierto fino}, \mu(A) < \infty\}$$

El operador resolvente asociado a μ es $R_\mu \colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $R_\mu(f) = u$, donde u es la solución débil de $-\Delta u + \mu u = f$ en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$\begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} uv d\mu = \int\limits_{A_\mu} f v dx, \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu), \\ u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu). \end{cases}$$

Notamos $R_A(1) = w_A$, $R_\mu(1) = w_\mu$, si $|A|$ y $|A_\mu|$ son finitas.

Ejemplo 5.4.1. Se tiene que

$$H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \infty_{A^c}) = H^1_0(A),$$

para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ cuasi-abeirto con $|A| < \infty$

Demostración. Sea $u \in H^1_0(A) \subset H^1(\mathbb{R}^n)$. Por definición del espacio $H^1_0(A)$, $u = 0$ q.t.p. de A^c. Es decir, $\operatorname{cap}(\{u \neq 0\} \cap A^c) = 0$. Por lo tanto, $\infty_{A^c}(\{u \neq 0\}) = 0$. Luego,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\infty_{A^c} = \int\limits_{\{u \neq 0\}} |u|^2 d\infty_{A^c} = 0.$$

Asì, $u \in L^2(\mathbb{R}^n, \infty_{A_c})$.

Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \infty_{A^c})$. Dado $\epsilon > 0$, usando la desigualdad de Chebyshev y que $u \in L^2(\mathbb{R}^n, \infty_{A^c})$, tenemos que

$$\infty_{A^c}(\{u \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\infty_{A^c} < \infty$$

Como ∞_{A^c} puede tomar sólo dos valores (0 ó $+\infty$), resulta $\infty_{A^c}(\{u \geq \epsilon\}) = 0$, para todo $\epsilon > 0$. Luego, $\infty_{A^c}(\{u > 0\}) = 0$. Haciendo la misma cuenta para $-u$ (que también pertenece a $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \infty_{A^c})$), se tiene que $\infty_{A^c}(\{u < 0\}) = 0$. Por lo tanto, $\infty_{A^c}(\{u \neq 0\}) = 0$. Es decir, $\operatorname{cap}(\{u \neq 0\} \cap A^c) = 0$. Entonces, $u = 0$ q.t.p. de A^c. Luego, $u \in H^1_0(A)$. □

El espacio $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, con producto interno

$$\langle u, v \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} uv dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} uv d\mu$$

resutla ser un espacio de Hilbert separable. Se puede ver una demostración en [5].

Observación 5.4.2. Si $|A_\mu| < \infty$, $\|u\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu$ es una norma equivalente en $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$.

Demostración. Es claro que $\|u\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu$ para cada función $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. Por otro lado, como $|A_\mu| < \infty$, podemos usar la desigualdad de Poincaré 2.1.22, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu &= \int_{A_\mu} |\nabla u|^2 dx + \int_{A_\mu} |u|^2 dx + \int_{A_\mu} |u|^2 d\mu \\
&\leq \int_{A_\mu} |\nabla u|^2 dx + M \int_{A_\mu} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu \\
&= (1+M)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu \Big),
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Observación 5.4.3. Sea $\mu \in \mathcal{M}_0$ tal que $|A_\mu| < \infty$. Entonces,

$$H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu) \subset H^1_0(A_\mu).$$

Demostración. Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. Recordemos que trabajamos con los representantes cuasi-continuos de las funciones en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Por [10, Proposición 3.6, Capítulo II], sabemos que u es continua fina q.t.p. de $\mathbb{R}^n$ por ser una función cuasi-continua en $\mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, $\{u > \epsilon\}$ es un abierto fino. Además, por la desigualdad de Chebyshev y el hecho de que $u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, tenemos que

$$\mu(\{u > \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu < \infty$$

Entonces, $\{u > 0\} \subset A_\mu$. Usando el mismo razonamiento para $-u$ (que también es una función de $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$), tenemos que $\{u < 0\} \subset A_\mu$. Por lo tanto, $\{u \neq 0\} \subset A_\mu$, cuasi todo punto. Luego, $u \in H^1_0(A_\mu)$. □

ba

Definición 5.4.4. Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$. Recordemos que podemos asignarle a cada cuasi-abierto A_h la medida $\infty_{A_h^c} \in \mathcal{M}_0$. Luego, por el teorema de compacidad en $\mathcal{M}_0$ 5.3.10, tenemos que $(\infty_{A_h^c})_h$ γ-converge a una medida $\mu \in \mathcal{M}_0$ (para una subsucesión que seguimos notando con h). En tal caso, diremos que $(A_h)_h$ γ-converge a μ en $\mathcal{M}_0$. Es decir, si $(F_{A_h}(\cdot, \Omega))_h$ Γ-converge a $F_\mu(\cdot, \Omega)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^n$, donde

$$F_{A_h}(u, \Omega) = F_{\infty_{A_h^c}}(u, \Omega) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \chi_{H^1_0(A_h \cap \Omega)}(u)$$

$$F_\mu(u, \Omega) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 d\mu + \chi_{H^1_0(\Omega)}(u)$$

Recordar que

$$\chi_{H_0^1(A)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in H_0^1(A) \\ +\infty & \text{sino.} \end{cases}$$

Definimos

$$F_h(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \chi_{H_0^1(A_h)}(u) \tag{5.4.1}$$

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu \tag{5.4.2}$$

Lema 5.4.5. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ-converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$. Sea $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Entonces, para toda sucesión $(u_h)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a u débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $F(u) \leq \liminf_{h\to+\infty} F_h(u_h)$.

Demostración. Sea $(u_h)_h$ una sucesión en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a u débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

-Si $\liminf_{h\to+\infty} F_h(u_h) = \infty$, el reusltado vale trivialmente.

-Supongamos $\liminf_{h\to+\infty} F_h(u_h) < \infty$. Es decir,

$$\liminf_{h\to+\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h|^2 dx + \chi_{H_0^1(A_h)}(u_h) \right\} < \infty$$

Entonces, existe una subsucesión de $(u_h)_h$ (que seguimos notando con h) tal que $u_h \in H_0^1(A_h)$ y $\lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h|^2 dx < \infty$. Luego, existe una constante $M > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h|^2 dx \leq M$ para toda $h \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $(u_h)_h$ es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces, existe una subsucesión (que seguimos notanto con h) y $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a v débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Pero, sé que $(u_h)_h$ converge a u débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luego, $v = u$.

Sea $R > 0$. Considero una función de corte $\rho_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\rho_R = 1$ en $B_R(0)$, $\rho_R = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}(0)$, $0 \leq \rho_R \leq 1$. Entonces, $\rho_R u_h, \rho_R u \in H^1(B_{2R}(0))$ y $(\rho_R u_h)_h$ converge a $\rho_R u$ débil en $H^1(B_{2R}(0))$. Por Rellich-Kondrachov, la inclusión $H^1(B_{2R}(0)) \hookrightarrow L^2(B_{2R}(0))$ es compacta. Entonces, $(\rho_R u_h)_h$ converge a $\rho_R u$ fuerte en $L^2(B_{2R}(0))$.

Como $(A_h)_h$ γ-converge a μ, sé que la sucesión de funcionales $(F_{A_h}(\cdot, \Omega))_h$ Γ-converge a $F_\mu(\cdot, \Omega)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, para todo abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ (ver 5.4.4). Considero $\Omega = B_{2R}(0)$. Entonces, $(F_{A_h}(\cdot, B_{2R}(0)))_h$ Γ-converge a $F_\mu(\cdot, B_{2R}(0))$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Por la primera condición de la definición de Γ-convergencia (ver 5.1.1) y el hecho de que $(\rho_R u_h)_h$ converge a $\rho_R u$ fuerte en $L^2(B_{2R}(0))$, tenemos que

$$F_\mu(\rho_R u, B_{2R}(0)) \leq \liminf_{h\to+\infty} F_{A_h}(\rho_R u_h, B_{2R}(0)),$$

es decir,

$$\int_{B_{2R}(0)} |\nabla(\rho_R u)|^2 dx + \int_{B_{2R}(0)} |\rho_R u|^2 d\mu \leq \liminf_{h\to+\infty} \int_{B_{2R}(0)} |\nabla(\rho_R u_h)|^2 dx$$

Desarrollando,

$$\int_{B_{2R}(0)} |\nabla(\rho_R u)|^2 dx = \int_{B_{2R}(0)} \left[|\nabla\rho_R|^2|u|^2 + 2\rho_R u\nabla\rho_R\nabla u + \rho_R^2|\nabla u|^2\right]dx$$

además,

$$\int_{B_{2R}(0)} |\nabla(\rho_R u_h)|^2 dx = \int_{B_{2R}(0)} \left[|\nabla\rho_R|^2|u_h|^2 + 2\rho_R u_h\nabla\rho_R\nabla u_h + \rho_R^2|\nabla u_h|^2\right]dx$$

(a) Veamos que

$$\lim_{h\to+\infty}\left\{\int_{B_{2R}(0)} 2\rho_R u_h\nabla\rho_R\nabla u_h dx\right\} = \int_{B_{2R}(0)} 2\rho_R u\nabla\rho_R\nabla u dx$$

Vamos a usar el hecho de que $(\rho_R u_h)_h$ converge a $\rho_R u$ fuerte en $L^2(B_{2R}(0))$.

$$\left|\int_{B_{2R}(0)} \rho_R u_h\nabla\rho_R\nabla u_h dx - \int_{B_{2R}(0)} \rho_R u\nabla\rho_R\nabla u dx\right| =$$

$$\left|\int_{B_{2R}(0)} \rho_R u_h\nabla\rho_R\nabla u_h - \rho_R u\nabla\rho_R\nabla u_h + \rho_R u\nabla\rho_R\nabla u_h - \rho_R u\nabla\rho_R\nabla u dx\right|$$

$$\left|\int_{B_{2R}(0)} (\rho_R u_h - \rho u)\nabla\rho_R\nabla u_h + \rho_R u\nabla\rho_R\nabla(u_h - u) dx\right|$$

Por un lado, usando la desigualdad de Hölder, $||\nabla\rho_R||_\infty \leq m$ y $||u_h||_{H^1} \leq k$ (es una sucesión acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$),

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_{2R}(0)} (\rho_R u_h - \rho u)\nabla\rho_R\nabla u_h dx\right| &\leq ||\rho_R||_\infty ||\rho_R u_h - \rho_R u||_{L^2}||\nabla u_h||_{L^2} \\ &\leq mk||\rho_R u_h - \rho_R u||_{L^2(B_{2R}(0))}\end{aligned}$$

Luego, tiende a cero, pues $(\rho_R u_h)_h$ converge a $\rho_R u$ fuerte en $L^2(B_{2R}(0))$.

Por otro lado,

$$\left| \int_{B_{2R}(0)} \rho_R u \nabla\rho_R \nabla(u_h - u)dx \right| =$$

$$\left| \int_{B_{2R}(0)} \rho_R u \nabla\rho_R \nabla(u_h - u) + \rho_R u \rho_R (u_h - u) - \rho_R u \rho_R (u_h - u)dx \right| =$$

$$\left| \int_{B_{2R}(0)} \rho_R u (\nabla\rho_R \nabla(u_h - u) + \rho_R (u_h - u)) - \rho_R u \rho_R (u_h - u)dx \right|$$

$$\leq \|\rho_R u\|_\infty (\rho_R, u_h - u)_{H^1} + \|\rho_R u\|_\infty \int_{B_{2R}(0)} |\rho_R (u_h - u)|dx$$

$$\leq \|\rho_R u\|_\infty (\rho_R, u_h - u)_{H^1} + \|\rho_R u\|_\infty |B_{2R}(0)|^{1/2} \|\rho_R (u_h - u)\|_{L^2(B_{2R}(0))}$$

Concluimos que tiende a cero, pues $(u_h)_h$ converge a u débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y $(\rho_R u_h)_h$ converge a $\rho_R u$ fuerte en $L^2(B_{2R}(0))$. Por lo tanto, vale (a).

(b) Veamos que

$$\lim_{h\to+\infty} \left\{ \int_{B_{2R}(0)} |\nabla\rho_R|^2 |u_h|^2 dx \right\} = \int_{B_{2R}(0)} |\nabla\rho_R|^2 |u|^2 dx$$

En efecto, como $\|\nabla\rho_R\|_\infty \leq m$,

$$\left| \int_{B_{2R}(0)} |\nabla\rho_R|^2 |u_h|^2 dx - \int_{B_{2R}(0)} |\nabla\rho_R|^2 |u|^2 dx \right| = \left| \int_{B_{2R}(0)} |\nabla\rho_R|^2 (|u_h|^2 - |u|^2) dx \right|$$

$$\leq \|\nabla\rho_R\|_\infty^2 \left| \int_{B_{2R}(0)} |u_h|^2 - |u|^2 dx \right|$$

$$\leq m^2 \left| \|u_h\|^2_{L^2(B_{2R}(0))} - \|u\|^2_{L^2(B_{2R}(0))} \right|$$

Como $(u_h)_h$ converge a u débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$, por Rellich-Kondrachov, tenemos que $(u_h)_h$ converge a u en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Tomando $K = \overline{B_{2R}(0)}$, resulta $(u_h)_h$ converge a u en $L^2(K)$. En particular, la sucesión de normas $(\|u_h\|_{L^2(K)})_h$ converge a $\|u\|_{L^2(K)}$. Entonces, vale (b). (El borde de K mide cero con respecto a la medida de Lebesgue y las funciones en $H^1(\mathbb{R}^n)$ están definidas cuasi-todo punto.)

Por **(a)** y **(b)**, resulta

$$\int_{B_{2R}(0)} \rho_R^2 |\nabla u|^2 dx + \int_{B_{2R}(0)} \rho_R^2 |u|^2 d\mu \leq \liminf_{h\to+\infty} \int_{B_{2R}(0)} \rho_R^2 |\nabla u_h|^2 dx$$

Tomando límite en R,

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu \leq \liminf_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h|^2 dx = \liminf_{h\to+\infty} F_h(u_h),$$

como queríamos ver.

□

Lema 5.4.6. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ-converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$.*

Entonces, para toda $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $F(u) < \infty$, existe una sucesión $(u_h)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $F(u) = \lim\limits_{h\to+\infty} F_h(u_h)$.

Demostración. Sea $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $F(u) < \infty$. Es decir,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu < \infty,$$

por lo tanto, $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$.

Sea $R > 0$. Considero una función de corte $\rho_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\rho_R = 1$ en $B_R(0)$, $\rho_R = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}(0)$, $0 \leq \rho_R \leq 1$. Entonces, $(\rho_R u)_R$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

(a) Veamos que $\lim\limits_{R\to+\infty} F(\rho_R u) = F(u)$.

$F(\rho_R u) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\rho_R u)|^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\rho_R u|^2 d\mu$

Desarrollando,

$F(\rho_R u) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[|\nabla \rho_R|^2 |u|^2 + 2\rho_R u \nabla \rho_R \nabla u + \rho_R^2 |\nabla u|^2 \right] dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_R^2 |u|^2 d\mu$

Por el teorema de convergencia mayorada para la medida de Lebesgue, tenemos que

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_R^2 |\nabla u|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$$

y, luego, para μ,

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_R^2 |u|^2 d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu$$

Puedo elegir la sucesión $(\rho_R)_R$ de modo que $\lim\limits_{R\to+\infty} \|\nabla \rho_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$. Por ejemplo, $\rho_R(x) = \rho_1(\frac{x_1}{R})$. Entonces,

$\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla \rho_R|^2 |u|^2 dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \lim\limits_{R\to+\infty} \|\nabla \rho_R\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$

Por otro lado, usando que $\rho_R \leq 1$, y la desigualdad de Hölder,

$\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_R u \nabla \rho_R \nabla u dx \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lim\limits_{R\to+\infty} \|\nabla \rho_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$

Por lo tanto, $\lim\limits_{R\to+\infty} F(\rho_R u) = F(u)$ como queríamos ver.

Como $(A_h)_h$ γ-converge a μ, sé que la sucesión de funcionales $(F_{A_h}(\cdot, \Omega))_h$ Γ-converge a $F_\mu(\cdot, \Omega)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, para todo abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ (ver 5.4.4).

Considero $\Omega = B_{2R}(0)$. Entonces, $(F_{A_h}(\cdot, B_{2R}(0)))_h$ Γ-converge a $F_\mu(\cdot, B_{2R}(0))$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, para cada $R > 0$, $\rho_R u \in L^2(B_{2R}(0))$ y $F(\rho_R u) < \infty$. Entonces, por la segunda condición de la definición de Γ-convergencia (ver 5.1.1), tenemos que existe una sucesión $(u_h^R)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h^R)_h$ converge a $\rho_R u$ fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\lim_{h\to+\infty} F_{A_h}(u_h^R, B_{2R}(0)) = F_\mu(\rho_R u, B_{2R}(0)),$$

es decir,

$$\lim_{h\to+\infty} F_h(u_h^R) = F(\rho_R u).$$

Con un argumento diagonal, exite una sucesión $(R_h)_h$ tal que $(u_h^{R_h})_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\lim_{h\to+\infty} F_h(u_h^{R_h}) = F(u),$$

lo que concluye la demostración. □

Proposición 5.4.7. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ-converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$.*

Entonces, la sucesión de funcionales $(F_h)_h$ Γ-converge a F en $L^2(\mathbb{R}^n)$ débil y fuerte.

Demostración. Sigue de las proposiciones 5.4.5 y 5.4.6 y el hecho de que convergencia fuerte implica convergencia débil. □

Proposición 5.4.8. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ-converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$ y $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Notamos $A = \{w > 0\}$.*

Entonces, $|A| \leq c$ y $A = A_\mu$, salvo un conjunto de capacidad cero.

Demostración.

- Veamos que $|A| \leq c$.

Dado $\epsilon > 0$, tenemos que

$$\{w \geq \epsilon\} \subset \{|w - w_{A_h}| \geq \epsilon/2\} \cup \{w_{A_h} \geq \epsilon/2\}$$

Entonces, usando la desigualdad de Chebyshev y que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\Big|\{w \geq \epsilon\}\Big| &\leq \Big|\{|w - w_{A_h}| \geq \epsilon/2\}\Big| + \Big|\{w_{A_h} \geq \epsilon/2\}\Big| \\ &\leq \frac{4}{\epsilon^2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |w - w_{A_h}|^2 dx + |A_h| \\ &\leq \frac{4}{\epsilon^2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |w - w_{A_h}|^2 dx + c\end{aligned}$$

Tomando límite en h, como $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$, resulta

$$|\{w \geq \epsilon\}| \leq \frac{4}{\epsilon^2} \liminf_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |w - w_{A_h}|^2 dx + c = c$$

Por lo tanto, $|\{w \geq \epsilon\}| \leq c$, para todo $\epsilon > 0$. Luego, $|A| = |\{w > 0\}| \leq c$.

- Veamos que $A = A_\mu$, salvo un conjunto de capacidad cero.

Como $(A_h)_h$ γ-converge a μ, por la proposición 5.4.7 sé que $(F_h)_h$ Γ-converge a F fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$, por la Γ-convergencia vale que

$$F(w) \leq \liminf_{h\to+\infty} F_h(w_{A_h})$$

Usando la desigualdad de Poincaré 2.1.22 y la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h}|^2 dx = \int_{A_h} w_{A_h} dx &\leq |A_h|^{1/2} \|w_{A_h}\|_{L^2(A_h)} \\ &\leq c^{1/2}\beta(|A_h|)\|\nabla w_{A_h}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c^{1/2}\beta(c)\|\nabla w_{A_h}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(w_{A_h})_h$ es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Usando la definición de los funcionales y que la sucesión $(w_{A_h})_h$ es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$, tenemos

$$\begin{aligned}F(w) \leq \liminf_{h\to+\infty} F_h(w_{A_h}) &= \liminf_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h}|^2 dx \\ &\leq M(c) = M < \infty\end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^n} w^2 d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} w^2 d\mu = F(w) < \infty$$

En particular, $w \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ y por ende $A = \{w > 0\} \subset A_\mu$. Pues, para cada $\epsilon > 0$, usando la desigualdad de Chebyshev, tenemos que

$$\mu(\{w > \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} w^2 d\mu < \infty$$

Por lo tanto, $A \subset A_\mu$.

Por otro lado, dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, si $(w_{A_h\cap\Omega})_h$ converge a w^Ω débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $A_\mu \cap \Omega = \{w^\Omega > 0\}$.

Por el principio de comparación del problema de Dirichlet, como $0 \leq 1_{A_h\cap\Omega} \leq 1_{A_h}$, resulta $0 \leq w_{A_h\cap\Omega} \leq w_{A_h}$. Entonces, tomando límite en la desigualdad, $0 \leq w^\Omega \leq w$. Por lo tanto, $\{w^\Omega > 0\} \subset \{w > 0\}$. Ahora, esto vale para todo Ω acotado arbitrario. Luego, $A_\mu \subset A$. Pues,

$$A_\mu = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_\mu \cap B_k(0)$$

y cada $A_\mu \cap B_k(0) \subset A$. □

Observación 5.4.9. Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ-converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$ y $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $w \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$.

Demostración. En la demostración de la proposición 5.4.8 se ve que $w \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. □

Teorema 5.4.10. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ-converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$ y $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Notamos $A = \{w > 0\}$. Definimos*

$$G_h(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \chi_{H_0^1(A_h)}(u) - \int_{A_h} u dx$$

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu - \int_A u dx$$

Entonces, la sucesión de funcionales $(G_h)_h$ Γ-converge a G en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Más aún, $G(w) = \min\limits_{L^2(\mathbb{R}^n)} G = \min\limits_{H^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n,\mu)} G.$

Demostración. Observemos que

$$G_h(u) = F_h(u) - \int_{A_h} u dx$$

$$G(u) = F(u) - \int_A u dx$$

(a) Sea $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Veamos que para toda sucesión $(u_h)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene $G(u) \leq \liminf\limits_{h\to+\infty} G_h(u_h)$.

Sea $(u_h)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

-Si $\liminf\limits_{h\to+\infty} G_h(u_h) = +\infty$, el resultado vale trivialmente.

-Supongamos $\liminf\limits_{h\to+\infty} G_h(u_h) < \infty$.

Por la proposición 5.4.7, sé que $(F_h)_h$ Γ-converge a F fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$F(u) \leq \liminf_{h\to+\infty} F_h(u_h).$$

En particular, $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu) \subset H_0^1(A_\mu) = H_0^1(A)$ (ver observación 5.4.3).

Veamos que $\lim\limits_{h\to+\infty} \int_{A_h} u_h dx = \int_A u dx$.

Por la proposición 5.4.8, sabemos que $|A| \leq c$. Entonces, usando la desigualdad de Hölder, y que $u_h \in H_0^1(A_h)$ y $u \in H_0^1(A)$,

$$\begin{aligned}\Big|\int_{A_h} u_h dx - \int_A u dx\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} u_h dx - \int_{\mathbb{R}^n} u dx\Big| = \Big|\int_{A_h \cup A} (u_h - u) dx\Big| \\ &\leq |A_h \cup A|^{1/2} \|u_h - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq (2c)^{1/2} \|u_h - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Tomando límite en h, como $(u_h)_h$ converge a u en $L^2(\mathbb{R}^n)$, resulta

$$\lim_{h\to+\infty} \Big|\int_{A_h} u_h dx - \int_A u dx\Big| = 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}G(u) = F(u) - \int_A u dx &\leq \liminf_{h\to+\infty} F_h(u_h) - \lim_{h\to+\infty} \int_{A_h} u_h dx \\ &= \liminf_{h\to+\infty} \Big\{F_h(u_h) - \int_{A_h} u_h dx\Big\} \\ &= \liminf_{h\to+\infty} G_h(u_h),\end{aligned}$$

como queríamos ver.

(b) Sea $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $G(u) < \infty$. Veamos que existe una sucesión $(u_h)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$G(u) = \lim_{h\to+\infty} G_h(u_h).$$

Por la proposicción 5.4.7, $(F_h)_h$ Γ-converge a F en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $F(u) < \infty$ (pues $G(u) < \infty$), tenemos que existe una sucesión $(u_h)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$F(u) = \lim_{h\to+\infty} F_h(u_h).$$

Al igual que en la parte **(a)**, tenemos que $\lim_{h\to+\infty} \int_{A_h} u_h dx = \int_A u dx$. Por lo tanto, vale

$$G(u) = \lim_{h\to+\infty} G_h(u_h).$$

De (a) y (b), concluimos que $(G_h)_h$ Γ-converge a G fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

• Por último, probemos que w es el mínimo de G.

Por la proposición 5.1.5 y el hecho de que w_{A_h} es el mínimo de G_h y G tiene un único punto mínimo (por ser extrictamente convexa), resulta que $(w_{A_h})_h$ converge a la función que alcanza el mínimo de G fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pero, por hipótesis, $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y además $w \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ (por la observación 5.4.9). Por lo tanto, $G(w) = \min G$. □

Corolario 5.4.11. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ-converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$ y $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Notamos $A = \{w > 0\}$.*

Entonces, $w = w_\mu$.

Demostración. Por el teorema anterior, $w \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ y $G(w) = \min G$ y esto es equivalente a ser solución débil de $-\Delta w + \mu w = 1$ en $\mathbb{R}^n$. □

Proposición 5.4.12. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ-converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$ y $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Notamos $A = \{w > 0\}$. Sea $(f_h)_h$ sucesión en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $(f_h)_h$ converge a f débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\|f_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ para toda $h \in \mathbb{N}$. Definimos*

$$I_h(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \chi_{H_0^1(A_h)}(u) - \int_{A_h} f_h u dx$$

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\mu - \int_A f_h u dx$$

Entonces, la sucesión de funcionales $(I_h)_h$ Γ-converge a I en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Más aún, $I(w) = \min_{L^2(\mathbb{R}^n)} I = \min_{H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)} I$

Demostración. Por la proposición 5.4.7, sé que (F_h) Γ-converge a F en $L^2(\mathbb{R}^n)$ fuerte. Notar que

$$I_h(u) = F_h(u) - \int_{A_h} f_h u dx$$

$$I(u) = F(u) - \int_A f u dx.$$

De manera análoga a la prueba de 5.4.10, alcanza con ver que dada una función $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y una sucesión $(u_h)_h$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ que converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\liminf_h I_h(u_h) < \infty$, se tiene

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{A_h} f_h u_h dx = \int_A f u dx.$$

Como (F_h) Γ-converge a F, $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\liminf_h I_h(u_h) < \infty$, tenemos que

$$F(u) \leq \liminf_{h \to +\infty} F(u_h) < \infty$$

En particular, $u_h \in H_0^1(A_h)$ para cada $h \in \mathbb{N}$ y $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \subset H_0^1(A)$ (por la observación 5.4.3). Entonces, usando la desigualdad de Hölder y que $\|f_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{A_h} f_h u_h dx - \int_A f u dx &= \int_{A_h \cup A} f_h u_h - f u dx = \int_{A_h \cup A} f_h u_h - f_h u + f_h u - f u dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_h (u_h - u) dx + \int_{\mathbb{R}^n} (f_h - f) u dx \\ &\leq \|f_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u_h - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + (f_h - f, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|u_h - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + (f_h - f, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

Como $(f_h)_h$ converge a f débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$, tomando límite en h resulta

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{A_h} f_h u_h dx = \int_A f u dx,$$

como queríamos ver. □

Corolario 5.4.13. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que $(A_h)_h$ γ-converge a $\mu \in \mathcal{M}_0$ y $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Notamos $A = \{w > 0\}$. Sea $(f_h)_h$ sucesión en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $(f_h)_h$ converge a f débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\|f_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$ para toda $h \in \mathbb{N}$.*

Entonces, la sucesión $(R_{A_h}(f_h))_h$ converge a $R_\mu(f)$ fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Se puede ver que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ existe un compacto $K_\lambda \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$E_\lambda = \{v \in L^2(\mathbb{R}^n) \colon I_h(v) \leq \lambda\} \subset K_\lambda$$

Se prueba de manera análoga a la implicación (i)⇒(ii) de la proposición 5.2.3. Entonces, por la proposicón 5.1.5, tenemos que

$$\lim_{h \to +\infty} \inf_{L^2(\mathbb{R}^n)} I_h = \min_{L^2(\mathbb{R}^n)} I = I(w).$$

La última igualdad es consecuencia de la proposición 5.4.12. Como $R_{A_h}(f_h)$ es mínimo de I_h e I tiene un único punto mínimo (por ser estrictamente convexa), usando la segunda parte de la proposición 5.1.5, resulta que $(R_{A_h}(f_h))_h$ converge a $R_\mu(f)$ fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$, como queríamos ver. □

Capítulo 6

Diseño óptimo I

El objetivo de esta capítulo es estudiar la existencia de solución para el siguiente problema de optimización de forma

$$\text{mín}\{F(A)\colon A \subset \Omega, A \text{ cuasi-abierto}, |A| = c\} \tag{6.0.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, F es decreciente respecto de la inclusión de conjuntos y semicontinua inferior en $\mathcal{A}(\Omega)$ con respecto a la γ-convergencia; con $\mathcal{A}(\Omega) = \{A\colon A \subset \Omega,\ \text{cuasi-abierto}\}$.

Este resultado, se debe al trabajo de Buttazzo y Dal Maso [6].

6.1. Enunciado y ejemplo

Enunciamos el teorema principal de este capítulo.

Teorema 6.1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Notamos $\mathcal{A}(\Omega)$ a la clase de conjuntos cuasi-abiertos contenidos en Ω. Sea $F\colon \mathcal{A}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ una función que satisface*

(i) F es semicontinua inferior con respecto a la γ-convergencia.

(ii) F es decreciente, es decir, $F(A) \geq F(B)$, si $A \subset B$.

Entonces, para toda constante c entre 0 y $|\Omega|$, el mínimo

$$\text{mín}\{F(A) : A \in \mathcal{A}(\Omega),\ |A| = c\} \tag{6.1.1}$$

se alcanza.

Ejemplo 6.1.2 (Dominios con k-ésimo autovalor mínimo). Para todo $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ sea $\lambda_k(A)$ es k-ésimo autovalor del operador $-\Delta$ en $H^1_0(A)$, con la convención de que $\lambda_k(A) = +\infty$ si $\text{cap}(A) = 0$. Es conocido que las funciones $A \to \lambda_k(A)$ son decrecientes con respecto a la inclusión, ver [7, Capítulo VI, Teorema 3]. Más aún, son continuas respecto de la γ-convergencia, entonces podemos aplicar el teorema 6.1.1, y para todo $k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq c \leq |\Omega|$ obtenemos que el mínimo

$$\text{mín}\{\lambda_k(A) : A \in \mathcal{A}(\Omega),\ |A| = c\}$$

se alcanza.

Más generalmente, el mínimo

$$\text{mín}\{\Phi(\lambda(A)) \colon A \in \mathcal{A}(\Omega),\ |A| = c\}$$

se alcanza, donde $\lambda(A)$ denota la sucesión $(\lambda_k(A))_k$ y la función $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es semicontinua inferior y creciente en el sentido de que

$$\lambda_k^h \to \lambda_k\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \Phi(\lambda) \leq \liminf_{h\to+\infty} \Phi(\lambda^h),$$

$$\lambda_k \leq \mu_k\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \Phi(\lambda) \leq \Phi(\mu).$$

6.2. Demostraciones

Necesitaremos el siguiente resultado, que es una aplicación del teorema de obstáculo 2.3.7.

Definimos para $A \subset \Omega$ cuasi-abierto,

$$K_A = \{u \in H_0^1(\Omega) : u \leq 0 \text{ q.t.p. en } \Omega \setminus A\}.$$

Como K_A es convexo, cerrado y no vacío en $H_0^1(\Omega)$, el teorema 2.3.7 nos garantiza que existe una única u_A tal que

$$\begin{cases} u_A \in K_A, \\ \int_\Omega \nabla u_A \nabla(v - u_A)dx \geq \int_\Omega (v - u_A)dx \quad \forall v \in K_A \end{cases}$$

Para el problema anterior, vale el *principio del máximo*:

Proposición 6.2.1. *Sea u_A la solución de*

$$\begin{cases} u_A \in K_A, \\ \int_\Omega \nabla u_A \nabla(v - u_A)dx \geq \int_\Omega (v - u_A)dx \quad \forall v \in K_A \end{cases}$$

Entonces, $u_A \geq 0$ q.t.p. de Ω.

Demostración. Considero $w = \text{máx}\{u_A, 0\}$. Tenemos que $w \geq 0$ q.t.p. de Ω. Veamos que $w = u_A$.

De manera análoga a la demostración de 2.3.11, se puede ver que K_A es cerrado con respecto a tomar máximo de dos elementos en K_A. Por lo tanto, como u_A y 0 pertenecen a K_A, vale que $w \in K_A$. Entonces, puedo considerarla como función test en la desigualdad variacional que verifica u_A,

$$\int_\Omega \nabla u_A \nabla (w - u_A) dx \geq \int_\Omega (w - u_A) dx.$$

Como $w \geq u_A$, tenemos que

$$\int_\Omega \nabla u_A \nabla (w - u_A) dx \geq \int_\Omega (w - u_A) dx \geq 0,$$

por lo tanto,

$$\int_\Omega \nabla u_A \nabla (w - u_A) dx \geq 0.$$

Por otro lado, usando la definición de w, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_\Omega \nabla u_A \nabla (w - u_A) dx &= \int_{\{u_A > 0\}} \nabla u_A \nabla (w - u_A) dx + \int_{\{u_A \leq 0\}} \nabla u_A \nabla (w - u_A) dx \\ &= \int_{\{u_A > 0\}} \nabla u_A \nabla (u_A - u_A) dx + \int_{\{u_A \leq 0\}} \nabla u_A \nabla (0 - u_A) dx \\ &= - \int_{\{u_A \leq 0\}} |\nabla u_A|^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Concluimos que $u_A = 0$ q.t.p. de $\{u_A \leq 0\}$. Por lo tanto, $u_A \geq 0$ q.t.p. de Ω. □

Una demostración más general se puede ver en Kinderlehrer & Stampacchia [16, Capítulo II, Teorema 6.4]).

Recordamos que para cada $A \in \mathcal{A}(\Omega)$, llamamos w_A a la única solución de

$$-\Delta w_A = 1 \text{ en } A, \ w_A \in H_0^1(A) \tag{6.2.1}$$

en el sentido

$$\int_A \nabla w_A \nabla v dx = \int_A v dx \, , \forall v \in H_0^1(A)$$

Observación 6.2.2. Para la w_A definida arriba vale que

$$-\Delta w_A \leq 1 \ \text{ en } \Omega \tag{6.2.2}$$

y que

$$w_A \geq w \text{ q.t.p. } \in \Omega \tag{6.2.3}$$

para toda función $w \in H_0^1(\Omega)$ con $w \leq 0$ q.t.p. en $\Omega \setminus A$ y $-\Delta w \leq 1$ en Ω.

Demostración. Consideremos la solución u_A de la desigualdad variacional

$$u_A \in K_A, \int_\Omega \nabla u_A \nabla(v - u_A)dx \geq \int_\Omega (v - u_A)dx \quad \forall v \in K_A \tag{6.2.4}$$

donde

$$K_A = \{u \in H_0^1(\Omega) : u \leq 0 \text{ q.t.p. en } \Omega \setminus A\}. \tag{6.2.5}$$

(El problema anterior tiene solución, por lo visto al inicio de esta sección).

• Veamos que $u_A \in H_0^1(A)$

Por la proposición 6.2.1, tenemos que $u_A \geq 0$ q.t.p. en Ω. Además, $u_A \in K_A$, entonces $u_A \leq 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$. Por lo tanto, $u_A = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$. Luego, $u_A \in H_0^1(A)$.

Afirmo que $H_0^1(A) \subset K_A$. En efecto, si $z \in H_0^1(A)$, $z = 0$ q.t.p de $\Omega \setminus A$. En particular, $z \leq 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$. Por lo tanto, $z \in K_A$.

• Veamos que u_A es solución de (6.2.1).

Vimos que $u_A \in H_0^1(A)$. Basta ver que $-\Delta u_A = 1$ en A, en el sentido débil. Sea $v \in H_0^1(A)$. Como $u_A \in H_0^1(A)$, entonces, $v + u_A$ y $-v + u_A \in H_0^1(A) \subset K_A$. De modo que puedo tomar $v+u_A$ y $-v+u_A$ como funciones test en la desigualdad variacional (6.2.4):

$*$ Usando $v + u_A$ como función test, tenemos que

$$\int_\Omega \nabla u_A \nabla v dx \geq \int_\Omega v dx$$

$*$ Usando $-v + u_A$ como función test, tenemos que

$$\int_\Omega \nabla u_A \nabla v dx \leq \int_\Omega v dx$$

Luego, vale la igualdad

$$\int_\Omega \nabla u_A \nabla v dx = \int_\Omega v dx$$

para toda $v \in H_0^1(A)$, obteniendo que u_A es solución de la ecuación (6.2.1).

Por lo tanto, por unicidad de solución en el sentido débil, $w_A = u_A$.

Como todas las soluciones de desigualdades variacionales con condición de obstáculo de la forma (6.2.5) son subsoluciones de la correspondiente ecuación, concluimos que $-\Delta w_A \leq 1$ en Ω. En efecto, Sea $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$. En particular, $-v \leq 0$ en $\Omega \setminus A$. Luego, $-v \in K_A$. Tomo $-v$ como función test en la desigualdad variacional (6.2.4):

$$\int_\Omega \nabla u_A \nabla(-v - u_A)dx \geq \int_\Omega (-v - u_A)dx$$

$$-\int_\Omega \nabla u_A \nabla v dx - \int_\Omega |\nabla u_A|^2 dx \geq -\int_\Omega v dx - \int_\Omega u_A dx$$

Además, vimos que u_A es solución de $-\Delta u_A = 1$ en A. Entonces, tomando u_A como función test en la formulación débil, tenemos que

$$\int_\Omega |\nabla u_A|^2 dx = \int_\Omega u_A dx$$

Lo que nos permite simplificar la desigualdad, obteniendo

$$\int_\Omega \nabla u_A \nabla v dx \leq \int_\Omega v dx$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$. Es decir, $-\Delta u_A \leq 1$ en Ω. Luego, vale (6.2.2).

Sea $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que $w \leq 0$ en $\Omega \setminus A$ y $-\Delta w \leq 1$. Queremos ver que $w_A \geq w$ en Ω. Tenemos que

$$\begin{cases} -\Delta w_A = 1 \text{ en } A \\ -\Delta w \leq 1 \text{ en } A \\ w \leq 0 = w_A \text{ en } \partial A \end{cases}$$

Entonces, por el principio del máximo, $w \leq w_A$ en A. Más aún, $w \leq w_A$ en Ω. Pues, $w \leq 0 = w_A$ en $\Omega \setminus A$. □

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{K} = \{w \in H_0^1(\Omega) : w \geq 0, -\Delta w \leq 1 \text{ en } \Omega\}. \tag{6.2.6}$$

Notar que $\mathcal{K}$ es no vacío. Por la observación 6.2.2, $w_A \in \mathcal{K}$ para todo $A \in \mathcal{A}(\Omega)$. Pues, de (6.2.2), usando el principio del máximo, tenemos que $w_A \geq 0$ en A. Y como $w_A \in H_0^1(A)$, sigue que $w_A = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$. Luego, $w_A \geq 0$ en Ω. Y además vale (6.2.3).

Observación 6.2.3. $\mathcal{K}$ es convexo, cerrado y acotado en $H_0^1(\Omega)$. Además, $\mathcal{K}$ es compacto en $L^2(\Omega)$.

Demostración. Es claro que $\mathcal{K}$ es convexo.

- Veamos que $\mathcal{K}$ es cerrado en $H_0^1(\Omega)$.

Sea $(w_h)_h$ en $\mathcal{K}$ que converge a w fuerte en $H_0^1(\Omega)$. Quiero ver que $w \geq 0$ y que $-\Delta w \leq 1$ en Ω.

Como $(w_h)_h$ en $\mathcal{K}$, $(w_h)_h \geq 0$. La convergencia fuerte de $H_0^1(\Omega)$, implica la convergencia fuerte en $L^2(\Omega)$ y c.t.p. de Ω, extrayendo alguna subsucesión si es necesario. Así, $w \geq 0$. Por otro lado, $-\Delta w_h \leq 1$, es decir, para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$ se tiene que

$$\int_\Omega \nabla w_h \nabla v dx \leq \int_\Omega v dx$$

La convergencia fuerte en $H_0^1(\Omega)$ implica la convergencia débil en $H_0^1(\Omega)$. Esto último es, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ahora denota el producto interno en $H_0^1(\Omega)$,

$$\langle w_h, u \rangle \to \langle w, u \rangle \text{ cuando } h \to +\infty.$$

En particular,

$$\int_\Omega \nabla w \nabla v dx = \langle w, v \rangle = \lim_{h\to+\infty} \langle w_h, v \rangle = \lim_{h\to+\infty} \int_\Omega \nabla w_h \nabla v dx \leq \int_\Omega v dx$$

Luego, $-\Delta w \leq 1$.

- Veamos que $\mathcal{K}$ es acotado en $H_0^1(\Omega)$.

Sea $w \in \mathcal{K}$. Tomando w como función test en la desigualdad $-\Delta w \leq 1$ obtenemos que

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 dx \leq \int_\Omega w dx \tag{6.2.7}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla w|^2 dx \leq \int_\Omega w dx \leq \Big(\int_\Omega |w|^2 dx \Big)^{1/2} |\Omega|^{1/2} \\ &\leq c \Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx \Big)^{1/2} |\Omega|^{1/2} = c|\Omega|^{1/2} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Usamos en la segunda desigualdad, la desigualdad de Hölder, y en la tercera, la desigualdad de Poincaré. Simplificando, obtenemos que

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c|\Omega|^{1/2}$$

concluyendo que $\mathcal{K}$ es acotado en $H_0^1(\Omega)$.

- Veamos que $\mathcal{K}$ es compacto en $L^2(\Omega)$.

Un resultado conocido de análisis funcional nos dice que si un conjunto es cerrado fuerte en $H_0^1(\Omega)$ y convexo, entonces es cerrado débil en $H_0^1(\Omega)$. Además, por el teorema de Rellich-Kondrachov, la inclusión de $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacta, tenemos que si un conjunto es cerrado débil y acotado en $H_0^1(\Omega)$, resulta compacto en $L^2(\Omega)$. En efecto, sea $(w_h)_h$ una sucesión en $\mathcal{K}$. Veamos que admite una subsucesión convergente en $\mathcal{K}$, con respecto a la norma en $L^2(\Omega)$. Como $\mathcal{K}$ es acotado en $H_0^1(\Omega)$, la sucesión $(w_h)_h$ lo es. Luego, existe $(w_{h_j})_j$ subsucesión de $(w_h)_h$ que converge débil a una w en $H_0^1(\Omega)$. Como $\mathcal{K}$ es cerrado débil, $w \in \mathcal{K}$. Además, por Rellich-Kondrachov, $(w_{h_j})_j$ converge fuerte a w en $L^2(\Omega)$. □

Para demostrar la existencia de una solución del problema (6.1.1) seguiremos los siguientes pasos:

(1) Definiremos un funcional G en $\mathcal{K}$ tal que

$$\text{G es decreciente en } \mathcal{K}, \text{ es decir, } G(u) \geq G(v) \text{ donde } u \leq v \text{ q.t.p. en } \Omega, \tag{6.2.8}$$

$$\text{G es semicontinua inferior en } \mathcal{K} \text{ para la topología fuerte en } L^2(\Omega), \tag{6.2.9}$$

$$G(w_A) = F(A) \text{ para todo } A \in \mathcal{A}(\Omega). \tag{6.2.10}$$

(2) Probaremos que el problema

$$\text{mín}\{G(w) : w \in \mathcal{K},\ |\{w > 0\}| \leq c\}$$

tiene una solución w_0.

(3) Probaremos que $A_0 = \{w_0 > 0\}$ es un punto mínimo de

$$\text{mín}\{F(A) : A \in \mathcal{A}(\Omega),\ |A| \leq c\}.$$

(4) Finalmente, la solución de (6.1.1) se obtiene *ampliando* el conjunto A_0.

El primer paso es el más trabajaso. Los últimos tres, forman parte de la demostración del teorema 6.1.1.

Construcción de G.

Para toda $w \in \mathcal{K}$ consideramos

$$J(w) = \text{ínf}\{F(A) : A \in \mathcal{A}(\Omega), w_A \leq w\} \tag{6.2.11}$$

y definimos G como la envoltura semicontinua inferior de J en $\mathcal{K}$ con respecto a la topología fuerte de $L^2(\Omega)$, es decir,

$$G(w) = \text{ínf} \liminf_{h \to +\infty} J(w_h), \tag{6.2.12}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las sucesiones $(w_h)_h$ en $\mathcal{K}$ que convergen a w fuerte en $L^2(\Omega)$.

Proposición 6.2.4. *El funcional G definido arriba satisface las condiciones* (6.2.8) *y* (6.2.9).

Demostración. G resulta semicontinua inferior por construcción. Luego, G satisface (6.2.9).

Para probar (6.2.8) observemos que

• El funcional J es decreciente. Pues, si $u \leq v$, entonces

$$\{F(A) \colon A \in \mathcal{A}(\Omega)/w_A \leq u\} \subset \{F(A) \colon A \in \mathcal{A}(\Omega)/w_A \leq v\}$$

y tomando ínfimo resulta $J(u) \geq J(v)$.

• El supremo de dos funciones de $\mathcal{K}$ pertenece a $\mathcal{K}$. Ver Proposición 2.3.11. (Esto es una propiedad conocida de las subsoluciones de operadores elípticos, que puede encontrarse con más generalidad, en el libro de Kinderlehrer y Stampacchia [16, Teorema 6.6]).

Sean u y v en $\mathcal{K}$ con $u \leq v$ q.t.p. en Ω. Queremos ver que $G(u) \geq G(v)$.

Por (6.2.12) (definición de ínfimo), existe una sucesión $(u_h)_h$ en $\mathcal{K}$ que converge fuerte en $L^2(\Omega)$ a u tal que $\liminf_{h\to+\infty} J(u_h) = G(u)$. Por definición de límite inferior, existe una subsucesión, que seguimos notando u_h, tal que $G(u) = \lim_{h\to+\infty} J(u_h)$.

Si tomamos $v_h = v \vee u_h$ (recordemos que $v \vee u_h = \sup\{v, u_h\}$), como el supremo entre dos funciones de $\mathcal{K}$ también es una función de $\mathcal{K}$, resulta que las $v_h \in \mathcal{K}$. Además, tomar supremo es una aplicación continua en $L^2(\Omega)$ y $(u_h)_h$ converge a u en $L^2(\Omega)$, tenemos que $(v \vee u_h)_h$ converge a $v \vee u$ en $L^2(\Omega)$, es decir, $(v_h)_h$ converge a v en $L^2(\Omega)$. Notemos que $v \vee u = v$, ya que $u \leq v$. Entonces,

$$G(v) \leq \liminf_{h\to+\infty} J(v_h) \leq \lim_{h\to+\infty} J(u_h) = G(u),$$

donde la primera desigualdad se debe a la definición de G (6.2.12) y la segunda, ocurre gracias a que $v_h \geq u_h$ y el funcional J es decreciente. Así, $G(v) \leq G(u)$. □

Para probar que $G(w_A) = F(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ necesitamos los siguientes lemas.

Lema 6.2.5. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de subconjuntos cuasi-abiertos de Ω tal que $(w_{A_h})_h$ converge a una función w débil en $H_0^1(\Omega)$.*

Sea $(u_h)_h$ una sucesión en $H_0^1(\Omega)$ tal que cada $u_h \in H_0^1(A_h)$ y $(u_h)_h$ converge a una función u débil en $H_0^1(\Omega)$. Entonces, $u \in H_0^1(\{w > 0\})$.

Demostración. Observemos que la condición $u_h \in H_0^1(A_h)$ es equivalente a $u_h = 0$ q.t.p. en $\Omega \backslash A_h$, y $u \in H_0^1(\{w > 0\})$ es equivalente a $u = 0$ q.t.p. en $\{w = 0\}$ (sabemos que $w \geq 0$, pues cada $w_{A_h} \geq 0$, por principio de comparación del problema de Dirichlet y $(w_{A_h})_h$ converge a w débil en $H_0^1(\Omega)$, extrayendo una subsucesión, fuerte en $L^2(\Omega)$ y c.t.p.).

Consideramos los funcionales

$$\Phi_h(v) = \begin{cases} \int_{A_h} |\nabla v|^2 dx & \text{si } v \in H_0^1(A_h), \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

definimos en $L^2(\Omega)$. Notemos que cada Φ_h coincide con el funcional asociado a la medida $\infty_{A_h^c} \in \mathcal{M}_0$ (el espacio de medidad capacitarias), para cada $h \in \mathbb{N}$, ver el ejemplo 5.3.2.

Por el teorema de compacidad en $\mathcal{M}_0$ 5.3.10, existe una subsucesión, que seguimos notando con h, y una medida $\mu \in \mathcal{M}_0$ tales que $(\infty_{A_h^c})_h$ γ-converge a μ. Por la definición de γ-convergencia 5.3.3, tenemos que la sucesión de funcionales $(\Phi_h)_h$ Γ-converge a $F_\mu(\cdot, \Omega)$, que es el funcional asociado a μ en Ω, en $L^2(\Omega)$. Llamo $\Phi = F_\mu(\cdot, \Omega)$. Entonces, por la definición del funcional asociado a μ (5.3.2), tenemos que

$$\Phi(v) = \begin{cases} \int\limits_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int\limits_\Omega |v|^2 d\mu & \text{si } v \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Luego, Φ es una forma cuadrática semicontinua inferior en $L^2(\Omega)$ con dominio $D(\Phi)$ contenido en $H_0^1(\Omega)$. Más precisamente, $D(\Phi) = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, \mu)$.

Como $(u_h)_h$ converge débil en $H_0^1(\Omega)$, es acotada. Por otro lado, $(u_h)_h$ converge a u fuerte en $L^2(\Omega)$, usando el teorema de Rellich-Kondrachov y el hecho de que converge a u débil en $H_0^1(\Omega)$. Entonces, por la primera condición de la Γ-convergencia de $(\Phi_h)_h$ a Φ (ver 5.1.1), tenemos que

$$\Phi(u) \leq \liminf_{h\to+\infty} \Phi_h(u_h) = \liminf_{h\to+\infty} \int\limits_\Omega |\nabla u_h|^2 dx < +\infty;$$

entonces $u \in D(\Phi) = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, \mu)$.

Sea V la clausura de $D(\Phi)$ en $L^2(\Omega)$ y sea $B\colon D(\Phi) \times D(\Phi) \to \mathbb{R}$ la forma bilineal asociada a Φ, definida por

$$B(v, w) = \frac{1}{4}(\Phi(v + w) - \Phi(v - w)) = \int\limits_\Omega \nabla v \nabla w dx + \int\limits_\Omega vw d\mu.$$

También consideramos el operador lineal $T\colon D(T) \to L^2(\Omega)$ definido por

$$D(T) = \{v \in D(\Phi)\colon \exists f \in V \text{ tal que } B(v, w) = (f, w)\ \forall w \in D(\Phi)\},$$

donde $B(v, w) = (f, w)$ es

$$\int\limits_\Omega \nabla v \nabla w dx + \int\limits_\Omega vw d\mu = \int\limits_\Omega f w dx,$$

luego,

$$Tv = -\Delta v + \mu v = f,$$

(ver la definición 3.2.2).

Notemos que, en general, $D(T)$ no es denso en $L^2(\Omega)$. Sin embargo, por la proposición 3.2.10, tenemos que $D(T)$ es denso en $D(\Phi)$ respecto a la norma

$$||v||_\Phi = (||v||^2_{L^2(\Omega)} + \Phi(v))^{\frac{1}{2}},$$

es decir,

$$\|v\|_\Phi = (\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega |v|^2 d\mu)^{\frac{1}{2}} = (\|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega |v|^2 d\mu)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $\|v\|_\Phi \geq \|v\|_{H^1_0(\Omega)}$, obtenemos que $D(T)$ es denso en $D(\Phi)$ con respecto a la topología fuerte de $H^1_0(\Omega)$. Es decir,

$$\overline{D(T)}^{H^1_0(\Omega)} = D(\Phi) = H^1_0(\Omega) \cap L^2(\Omega, \mu).$$

Si vemos que para toda $v \in D(T)$, se tiene $v = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$, como $u \in D(\Phi)$, por un argumento de densidad, resulta $u = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$.

Fijemos $v \in D(T)$ y sea $f = Tv = -\Delta v + \mu v$; entonces v es un punto mínimo del funcional

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}\Phi(z) - (f, z) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |z|^2 d\mu - \int_\Omega fz dx,$$

ver proposición 3.2.6.

Sea v_h el punto mínimo del funcional

$$\Psi_h(z) = \frac{1}{2}\Phi_h(z) - (f, z) = \frac{1}{2}\int_{A_h} |\nabla z|^2 dx - \int_{A_h} fz dx.$$

entonces, v_h es solución del problema

$$-\Delta v_h = f \text{ en } A_h,\ v_h \in H^1_0(A_h).$$

Como $(\Phi_h)_h$ Γ-converge a Φ y la aplicación $z \longmapsto (f, z)$ es continua en $L^2(\Omega)$, tenemos que $(\Psi_h)_h$ Γ-converge a Ψ, por la observación 5.1.3. Entonces, la sucesión de mínimos $(v_h)_h$ converge débil a v en $H^1_0(\Omega)$, por la proposición 5.1.5.

Para todo $\epsilon > 0$ sea $f^\epsilon \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\|f^\epsilon - f\|_{L^2(\Omega)} < \epsilon$, y sea v^ϵ_h la solución de

$$-\Delta v^\epsilon_h = f^\epsilon \text{ en } A_h,\ v^\epsilon_h \in H^1_0(A_h).$$

Entonces, por linealidad y continuidad del problema de Dirichlet,

$$\|v^\epsilon_h - v_h\|_{H^1_0(\Omega)} \leq c\|f^\epsilon - f\|_{L^2(\Omega)} \leq c\epsilon.$$

Luego, existe una subsucesión que seguimos notando con h, tal que $(v^\epsilon_h)_h$ converge débil a una función v^ϵ en $H^1_0(\Omega)$.

$$v^\epsilon_h \rightharpoonup v^\epsilon \text{ y } v_h \rightharpoonup v \text{ en } H^1_0(\Omega) \Rightarrow v^\epsilon_h - v_h \rightharpoonup v^\epsilon - v \text{ en } H^1_0(\Omega)$$

Por lo tanto, por la semicontinuidad inferior de la norma, tenemos que

$$\|v^\epsilon - v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{h\to+\infty} \|v_h^\epsilon - v_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\epsilon.$$

Es suficiente mostrar que $v^\epsilon = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$ para todo $\epsilon > 0$. Tomando $c^\epsilon = \|f^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}$. Sabemos que

$$\begin{cases} -\Delta v_h^\epsilon = f^\epsilon \text{ en } A_h \\ v_h^\epsilon \in H_0^1(A_h). \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} -\Delta(c^\epsilon w_{A_h}) = c^\epsilon \text{ en } A_h \\ c^\epsilon w_{A_h} \in H_0^1(A_h) \end{cases}$$

Como $f^\epsilon \leq c^\epsilon$, por el principio de comparación del problema de Dirichlet, tenemos que $|v_h^\epsilon| \leq c^\epsilon w_{A_h}$ c.t.p. de A_h, entonces c.t.p. de Ω. Como $v_h^\epsilon \rightharpoonup v^\epsilon$ y $w_{A_h} \rightharpoonup w$ en $H_0^1(\Omega)$, tenemos que convergen en $L^2(\Omega)$ y c.t.p. de Ω. Así $|v^\epsilon| \leq c^\epsilon w$ c.t.p. de Ω, entonces q.t.p. de Ω, ya que v^ϵ, $w \in H^1(\Omega)$. Esto implica que $v^\epsilon = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$.

Como $\|v^\epsilon - v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\epsilon$, $v^\epsilon \to v$ en $H_0^1(\Omega)$ cuando $\epsilon \to 0$. Luego, q.t.p en Ω. Por lo tanto, $v = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$. Probamos que $v = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$ para toda $v \in D(T)$. Como $u \in D(\Phi)$ y $D(\Phi) = \overline{D(T)}^{\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}}$, $u = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$. □

Observación 6.2.6. Si suponemos en la demostración anterior, que $\mu = \infty_{A^c}$ para $A \in \mathcal{A}(\Omega)$, tenemos que $u \in D(\Phi) \subset H_0^1(A)$, pues $\Phi = \Phi_A$. Por el lema 2.2.8, tenemos que $w_A > 0$ en A, entonces $A \subset \{w_A > 0\}$. Como $w_A \in H_0^1(A)$, sé que $w_A = 0$ q.t.p. A^c. Por principio de comparación del problema de Dirichlet, vale que $w_A \geq 0$ en Ω. Por lo tanto, $\{w_A > 0\} \subset A$. Concluyendo que $A = \{w_A > 0\}$, salvo un conjunto de capacidad cero. Entonces, $H_0^1(A) = H_0^1(\{w_A > 0\})$. Luego, $u \in H_0^1(\{w_A > 0\})$.

Probaremos el siguiente lema técnico, que necesitaremos para concluir que G verifica (6.2.10).

Lema 6.2.7. *Sean A y A_h, $h \in \mathbb{N}$, subconjuntos cuasi-abiertos de Ω tales que $(w_{A_h})_h$ converge a una función w débil en $H_0^1(\Omega)$, con $w \leq w_A$ q.t.p. de Ω.*

Sea $A^\epsilon = \{w_A > \epsilon\}$. Asumimos que $(w_{A_h \cup A^\epsilon})_h$ converge a una función w^ϵ débil en $H_0^1(\Omega)$. Entonces, $w^\epsilon \leq w_A$ q.t.p. de Ω.

Demostración. La idea de la demostración es probar que $w^\epsilon \leq 0$ en q.t.p. de $\Omega \setminus A$ y que $-\Delta w^\epsilon \leq 1$ en Ω. Luego, la observación 6.2.2, nos dice que w_A es la más grande con esa propiedad, es decir, $w^\epsilon \leq w_A$.

Para todo $\epsilon > 0$ definimos

$$v^\epsilon = 1 - \frac{1}{\epsilon}(w_A \wedge \epsilon)$$

Recordemos que $w_A \wedge \epsilon = \inf\{w_A, \epsilon\}$. Entonces, tenemos que

$$v^\epsilon \in H^1(\Omega), 0 \leq v^\epsilon \leq 1 \text{ q.t.p. en } \Omega,$$

pues, $\frac{1}{\epsilon}(w_A \wedge \epsilon) \geq 0$ implica $v^\epsilon \leq 1$ y $\frac{1}{\epsilon}(w_A \wedge \epsilon) \leq 1$ implica $v^\epsilon \geq 0$.

En A^ϵ, sabemos que $w_A \wedge \epsilon = \epsilon$. Entonces, $v^\epsilon = 0$ q.t.p. en A^ϵ.

Como $w_A \in H^1_0(A)$, tenemos que $w_A = 0$ q.t.p. en $\Omega \setminus A$. Entonces, $w_A \wedge \epsilon = 0$ y $v^\epsilon = 1$ q.t.p. en $\Omega \setminus A$.

Ahora, considero

$$u_h = v^\epsilon \wedge w_{A_h \cup A^\epsilon}.$$

Entonces, $u_h = 0$ q.t.p. de A^ϵ, pues $v^\epsilon = 0$ en A^ϵ y $w_{A_h \cup A^\epsilon} \geq 0$ en A^ϵ por el principio del máximo.

Además, $u_h = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus (A_h \cup A^\epsilon)$, porque $w_{A_h \cup A^\epsilon} \in H^1_0(A_h \cup A^\epsilon)$.

Como $u_h = 0$ en A^ϵ y $\Omega \setminus (A_h \cup A^\epsilon)$, $u_h = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A_h$. Luego, $u_h \in H^1_0(A_h)$, para toda $h \in \mathbb{N}$.

Como $w_{A_H \cup A^\epsilon} \rightharpoonup w^\epsilon$ en $H^1_0(\Omega)$ y tomar mínimo es débil continuo en $H^1_0(\Omega)$, tenemos que $u_h = v^\epsilon \wedge w_{A_h \cup A^\epsilon} \rightharpoonup v^\epsilon \wedge w^\epsilon$. Por el lema 6.2.5, $v^\epsilon \wedge w^\epsilon = 0$ q.t.p. de $\{w = 0\}$.

Observemos que $0 \leq w \leq w_A$ q.t.p. de Ω, pues $w_{A_h} \geq 0$ q.t.p. de Ω y $w_{A_h} \rightharpoonup w$ en $H^1_0(\Omega)$. Además, $\Omega \setminus A \subset \{w_A = 0\} \subset \{w = 0\}$ q.t.p. Por lo tanto $v^\epsilon \wedge w^\epsilon = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$.

De $v^\epsilon \wedge w^\epsilon = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$ y $v^\epsilon = 1$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$, obtenemos que $w^\epsilon = 0$ q.t.p. de $\Omega \setminus A$. Entonces, $w^\epsilon \in H^1_0(A)$. En particular, $w^\epsilon \leq 0$ en $\Omega \setminus A$, como queríamos.

Finalmente, por la observación 6.2.2, sabemos que $w_{A_h \cup A^\epsilon}$ satisface

$$-\Delta w_{A_h \cup A^\epsilon} \leq 1 \text{ en } \Omega$$

Pasando al límite, como $w_{A_h \cup A^\epsilon} \rightharpoonup w^\epsilon$ en $H^1_0(\Omega)$, tenemos que

$$-\Delta w^\epsilon \leq 1 \text{ en } \Omega.$$

Entonces, $w^\epsilon \in H^1_0(A)$ y $-\Delta w^\epsilon \leq 1$ en Ω. Luego, (6.2.3) nos dice que w_A es la más grande con esa propiedad. Es decir, $w^\epsilon \leq w_A$ q.t.p. de Ω. □

Proposición 6.2.8. *El funcional G satisface la propiedad* (6.2.10)*, es decir,*

$$G(w_A) = F(A) \textit{ para todo } A \in \mathcal{A}(\Omega).$$

Demostración. La desigualdad $G(w_A) \leq F(A)$ sigue inmediatamente de la definición de G, ver (6.2.12).

Para la desiguladad opuesta, alcanza con ver que si $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ y $(w_h)_h$ es una sucesión en $\mathcal{K}$ que converge a w_A fuerte en $L^2(\Omega)$, se tiene

$$F(A) \leq \liminf_{h \to +\infty} J(w_h).$$

Por la definición de J (y definición de ínfimo) (ver (6.2.11)), para toda $h \in \mathbb{N}$,

$$\exists\, A_h \in \mathcal{A}(\Omega) \text{ tal que } w_{A_h} \leq w_h \text{ y } F(A_h) \leq J(w_h) + 1/h.$$

Vimos que $w_B \in \mathcal{K}$ para todo $B \in \mathcal{A}(\Omega)$, ver (6.2.6). Además, la observación 6.2.3 nos dice que $\mathcal{K}$ es acotado en $H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto, la sucesión $(w_{A_h})_h$ es acotada en $H_0^1(\Omega)$. Luego, existe una subsucesión, que seguimos notando $(w_{A_h})_h$, que converge débil a una función w en $H_0^1(\Omega)$.

Como $(w_h)_h$ converge a w_A fuerte en $L^2(\Omega)$ y $w_{A_h} \leq w_h$, tenemos que $w \leq w_A$.

Ahora, considero $A^\epsilon = \{w_A > \epsilon\}$. Nuevamente, como $w_{A_h \cup A^\epsilon} \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{K}$ es acotado en $H_0^1(\Omega)$, existe una subsucesión de $(w_{A_h \cup A^\epsilon})_h$ que seguimos notanto igual, y una función w^ϵ tal que $w_{A_h \cup A^\epsilon} \rightharpoonup w^\epsilon$ en $H_0^1(\Omega)$. Por el lema 6.2.7, resulta que $w^\epsilon \leq w_A$ q.t.p. en Ω.

• Veamos que $w_{A^\epsilon} = (w_A - \epsilon)^+$.

Sea $v \in H_0^1(A^\epsilon)$.

$$\begin{aligned}
\int_{A^\epsilon} \nabla (w_A - \epsilon)^+ \nabla v dx &= \int_{\{w_A > \epsilon\}} \nabla (w_A - \epsilon)^+ \nabla v dx = \int_{A^\epsilon} \nabla (w_A - \epsilon) \nabla v dx \\
&= \int_{A^\epsilon} \nabla w_A \nabla v dx = \int_{A} \nabla w_A \nabla v dx \\
&= \int_{A} v dx = \int_{A^\epsilon} v dx.
\end{aligned}$$

Más aún, por el principio de comparación del problema de Dirichlet, como $A^\epsilon \subset A_h \cup A^\epsilon$, tenemos la desigualdad $(w_A - \epsilon)^+ = w_{A^\epsilon} \leq w_{A_h \cup A^\epsilon}$. Entonces, $(w_A - \epsilon)^+ \leq w_{A_h \cup A^\epsilon}$ en q.t.p. de Ω. Pasando al límite, $(w_A - \epsilon)^+ \leq w^\epsilon$ q.t.p. de Ω.

Como cada w^ϵ es el límite débil de $(w_{A_h \cup A^\epsilon})_h \subseteq \mathcal{K}$ y $\mathcal{K}$ es cerrado para la topología débil de $H_0^1(\Omega)$ por ser convexo y cerrado fuerte, tenemos que $w^\epsilon \in \mathcal{K}$ para todo $\epsilon > 0$. Esto nos dice, ya que $\mathcal{K}$ es acotado en $H_0^1(\Omega)$, que $(w^\epsilon)_\epsilon$ tiene algún límite débil en $H_0^1(\Omega)$. Pero como además tenemos las desigualdades

$$(w_A - \epsilon)^+ \leq w^\epsilon \leq w_A$$

sigue que $(w^\epsilon)_\epsilon$ converge débil a w_A en $H_0^1(\Omega)$. Tenemos que

$$w_{A_h \cup A^\epsilon} \rightharpoonup w^\epsilon \text{ y } w^\epsilon \rightharpoonup w_A \text{ en } H_0^1(\Omega).$$

Por un argumento standar de diagonalización podemos encontrar una sucesión $(\epsilon_h)_h$ que converge a 0 tal que $(w_{A_h \cup A^{\epsilon_h}})_h$ converge a w_A débil en $H_0^1(\Omega)$. Por Rellich-Kondrachov, $(w_{A_h \cup A^{\epsilon_h}})_h$ converge a w_A fuerte en $L^2(\Omega)$. Luego, por el teorema (de independencia de f) 2.2.10, $(A_h \cup A^{\epsilon_h})_h$ γ-converge a A. Luego, como F es semicontinua inferior para la γ-convergencia y decreciente con respecto a la inclusión, tenemos que

$$F(A) \leq \liminf_{h\to+\infty} F(A_h \cup A^{\epsilon_h}) \leq \liminf_{h\to+\infty} F(A_h) \leq \liminf_{h\to\infty} J(w_h)$$

Esto concluye la demostración. □

Estamos en condiciones de demostrar el teorema principal de este capítulo, cuya prueba será sencilla gracias a los resultados estudiados anteriormente.

Teorema 6.2.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $\mathcal{A}(\Omega)$ la clase de conjuntos cuasi-abiertos contenidos en Ω y $F\colon \mathcal{A}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ una función que satisface*

(i) F es semicontinua inferior con respecto de la γ-convergencia.

(ii) F es decreciente, es decir, $F(A) \geq F(B)$, si $A \subset B$.

Entonces, para toda constante c entre 0 y $|\Omega|$, el mínimo

$$\min\{F(A)\colon A \in \mathcal{A}(\Omega),\ |A| = c\} \tag{6.2.13}$$

se alcanza.

Demostración. Dividiremos la demostración en tres pasos.

(1) Observemos que alcanza con resolver

$$\min\{F(A)\colon A \in \mathcal{A}(\Omega),\ |A| \leq c\}. \tag{6.2.14}$$

En efecto, si A_0 es un punto mínimo del problema (6.2.14), existe $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ tal que $A_0 \subset A$ y $|A| = c$. Para cada $r > 0$, considero $E_r = A_0 \cup (B_r(0) \cap \Omega) \subset \Omega$, y E_r es cuasi-abierto. Luego, por continuidad de la medida de Lebesgue, existe $r_0 > 0$ tal que $|E_{r_0}| = c$. Tomo $A = E_{r_0}$. Como F es decreciente, tenemos que $F(A) \leq F(A_0) \leq F(B)$ para todo $B \in \mathcal{A}(\Omega)$ con $|B| = c$, y esto implica que A es solución de (6.1.1).

(2) Consideremos el problema

$$\min\{G(w)\colon\ w \in \mathcal{K}, |\{w > 0\}| \leq c\}. \tag{6.2.15}$$

Veamos que tiene solución.

Observemos que $F(A) \geq F(\Omega)$ para todo $A \in \mathcal{A}(\Omega)$, pues F es decreciente con respecto a la inclusión de conjuntos. Luego, $\inf\{G(w)\colon\ w \in \mathcal{K}, |\{w > 0\}| \leq c\}$ es finito, ver la definición de G (6.2.12).

Sea $(w_h)_h$ una sucesión minimizante, es decir, $w_h \in \mathcal{K}$, $|\{w_h > 0\}| \leq c$ y $(G(w_h))_h$ tiende λ, donde

$$\lambda = \inf\{G(w)\colon\ w \in \mathcal{K}, |\{w > 0\}| \leq c\}.$$

Como $w_h \in \mathcal{K}$ para toda $h \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{K}$ es acotado en $H_0^1(\Omega)$, existe una subsucesión de $(w_h)_h$, que seguimos notando igual, y una w_0 tal que $w_h \rightharpoonup w_0$ en $H_0^1(\Omega)$. Además, $\mathcal{K}$ es débil cerrado por ser cerrado fuerte y convexo. Entonces, $w_0 \in \mathcal{K}$.

Como $w_h \rightharpoonup w_0$ en $H_0^1(\Omega)$, por Rellich-Kondrachov, $w_h \to w_0$ en $L^2(\Omega)$. Luego, ya que G es semicontinua inferior con respecto a la topología fuerte en $L^2(\Omega)$, tenemos que

$$G(w_0) \leq \liminf_{h\to+\infty} G(w_h) = \lambda = \inf\{G(w) \colon \ w \in \mathcal{K}, |\{w > 0\}| \leq c\}.$$

Además, $|\{w_0 > 0\}| \leq \liminf_{h\to+\infty} |\{w_h > 0\}| \leq c$. Pues, dado $\epsilon > 0$

$$\{w_0 \geq \epsilon\} \subset \{|w_0 - w_h| \geq \epsilon/2\} \cup \{w_h \geq \epsilon/2\}$$

$$|\{w_0 \geq \epsilon\}| \leq |\{|w_0 - w_h| \geq \epsilon/2\}| + |\{w_h \geq \epsilon/2\}|,$$

usando la desigualdad de Chebyshev,

$$\Big|\{|w_0 - w_h| \geq \epsilon/2\}\Big| \leq \frac{4}{\epsilon^2} \int_\Omega |w_0 - w_h|^2 dx$$

y tomando límite en h, como $(w_h)_h$ converge a w_0 en $L^2(\Omega)$, resulta $|\{w > 0\}| \leq c$. Por lo tanto, w_0 es una solución de (6.2.15).

(3) Afirmamos que $A_0 = \{w_0 > 0\}$ es una solución de (6.2.14).

Como $w_0 \in \mathcal{K}$, tenemos que $w_0 \in H_0^1(\Omega)$, $w_0 \leq 0$ en $\Omega \setminus A_0$ y $-\Delta w_0 \leq 1$ en Ω. Por la observación 6.2.2, $w_0 \leq w_{A_0}$ q.t.p. de Ω.

Como w_0 y $w_{A_0} \in \mathcal{K}$, $w_0 \leq w_{A_0}$ y G es decreciente en $\mathcal{K}$, tenemos que $G(w_{A_0}) \leq G(w_0)$. Por la proposición 6.2.8, $F(A_0) = G(w_{A_0}) \leq G(w_0)$.

Si $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ y $|A| \leq c$, entonces $w_A \in \mathcal{K}$, ver la observación 6.2.2. Además, como $\{w_A > 0\} \subset A$, $|\{w_A > 0\}| \leq c$. Entonces, por la minimalidad de w_0 y la proposición 6.2.8,

$$G(w_0) \leq G(w_A) = F(A).$$

Por lo tanto, $F(A_0) \leq F(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ con $|A| \leq c$. Esto implica que los problemas (6.2.14) y (6.2.15) tienen solución. $\square$

Capítulo 7

Diseño óptimo II

El propósito de este capítulo es dar una idea de la resolución del problema

$$\text{mín}\left\{\Phi(\lambda_1(A), \lambda_2(A)) \colon A \subset \mathbb{R}^n \text{ cuasi-abierto } |A| \leq c\right\},$$

donde Φ es decreciente y semicontinua inferior en cada variable, y $\lambda_k(A)$ denota al k-ésimo autovalor del $-\Delta$ en A, para $k = 1, 2$. Utilizaremos, en este capítulo, la misma notación que en la sección *γ-convergencia II* del capítulo de Γ-convergencia.

Este resultado se debe al trabajo de Dorin Bucur [4].

7.1. Un resultado de compacidad para dominios

Recordemos $R_A(1) = w_A$, para A cuasi-abierto de $\mathbb{R}^n$, $|A| < \infty$; es decir, $-\Delta w_A = 1$ en A y $w_A \in H_0^1(A)$.

Lema 7.1.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cuasi-abierto tal que $|A| \leq c$. Entonces, existe una constante $M > 0$ que sólo depende de $|A|$ tal que*

$$||w_A||_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq M$$

Demostración. Como $w_A \in H_0^1(A)$ y $|A| \leq c$, podemos usar la desigualdad de Poincaré 2.1.22.

$$||w_A||^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \beta ||\nabla w_A||^2_{L^2(A)} = \beta \int_A |\nabla w_A|^2 dx$$

Sé que $-\Delta w_A = 1$ en A. Tomando como función test w_A en la formulación débil, resulta

$$\int_A |\nabla w_A|^2 dx = \int_A w_A dx$$

Luego, usando la desigualdad de Hölder,

$$||w_A||^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \beta \int\limits_A w_A dx \leq \beta |A|^{1/2} ||w_A||_{L^2(A)} \leq \beta |A|^{1/2} ||w_A||_{H^1(\mathbb{R}^n)},$$

simplificando,

$$||w_A||_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \beta |A|^{1/2} =: M,$$

lo que concluye la demostración. □

Dada una sucesión acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$, el siguiente teorema nos afirma que ocurre compacidad, vanishing o dicotomía.

Teorema 7.1.2 (Principio de concentración-compacidad de Lions)**.**

Sea $(u_h)_h$ una sucesión acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_h \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_h^2 dx = \lambda > 0$. Existe una subsucesión, que seguimos notando con h, tal que ocurre alguna de las siguientes:

(i) compacidad: Existe una sucesión $(y_h)_h$ en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\forall \epsilon > 0, \exists R > 0, \int\limits_{y_h + B_R(0)} u_h^2 dx \geq \lambda - \epsilon$$

(ii) vanishing: Para todo $R > 0$ se tiene

$$\lim_{h \to +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int\limits_{y + B_R(0)} u_h^2 dx = 0$$

(iii) dicotomía: Existe un $\alpha \in (0, \lambda)$ y funciones u_h^1, u_h^2 no negativas, tales que

1. $||u_h - (u_h^1 + u_h^2)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$
2. $\lim\limits_{h \to +\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_h^1)^2 dx = \alpha$, *y* $\lim\limits_{h \to +\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_h^2)^2 dx = \lambda - \alpha$
3. $\lim\limits_{h \to +\infty} d(sop\, u_h^1, sop\, u_h^2) = +\infty$
4. $\liminf\limits_{h \to +\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} [|\nabla u_h|^2 - (|\nabla u_h^1|^2 + |\nabla u_h^2|^2)] dx \geq 0$

Se puede ver una demostración en el trabajo de Lions [18].

A continuación, demostraremos algunos resultados que nos facilitarán la prueba del principio de concentración-compacidad para dominios.

7.1.1. Resultados de compacidad

Lema 7.1.3. *Sea $\mu \in \mathcal{M}_0$ tal que $|A_\mu| < \infty$. Sea $(f_h)_h$ una sucesión en $L^2(\mathbb{R}^n)$ que converge débil a f en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $(R_\mu(f_h))_h$ converge a $R_\mu(f)$ débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Llamo $u_h = R_\mu(f_h)$ y $u = R_\mu(f)$. Como $u_h, u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, basta ver que $(u_h)_h$ converge a u débil en $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. Notar que como A_μ tiene medida de Lebesgue finita, podemos considerar en $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ el producto interno

$$\langle z, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla z \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} z v d\mu,$$

ver la observación 5.4.2. Usando que $-\Delta u_h + \mu u_h = f$ y $-\Delta u + \mu u = f$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_h \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_h v d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f_h v dx, \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} u v d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f v dx, \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$$

Como $(f_h)_h$ converge débil a f en $L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_h v dx = \int_{\mathbb{R}^n} f v dx$$

para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$\lim_{h\to\infty} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_h \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_h v d\mu \Big\} = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} u v d\mu$$

para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, lo que concluye la demostración. □

Proposición 7.1.4. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$, $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$ tal que $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $(A_h)_h$ γ-converge a μ. Entonces, la sucesión de operadores resolventes $(R_{A_h})_h$ converge a R_μ en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$.*

Demostración. Queremos ver que

$$\lim_{h\to+\infty} \sup_{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \|R_{A_h}(f) - R_\mu(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Por definición de supremo, para cada $h \in \mathbb{N}$, existe una $f_h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\sup_{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \|R_{A_h}(f) - R_\mu(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \frac{1}{h} \leq \|R_{A_h}(f_h) - R_\mu(f_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

y $\|f_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1$.

Veamos que $\|R_{A_h}(f_h) - R_\mu(f_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ tiende a cero.

Como la sucesión $(f_h)_h$ es acotada en $L^2(\mathbb{R}^n)$, existe una subsucesión (que seguimos notando con h) y una función $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $(f_h)_h$ converge a f débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Tenemos

$$\|R_{A_h}(f_h) - R_\mu(f_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|R_{A_h}(f_h) - R_\mu(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|R_\mu(f) - R_\mu(f_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Veamos que *cada uno* tiende a cero.

Por el corolario 5.4.13, como $(f_h)_h$ converge a f débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $(R_{A_h}(f_h))_h$ converge a $R_\mu(f)$ fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $\|R_{A_h}(f_h) - R_\mu(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ tiende a cero.

Por el lema 7.1.3, como $(f_h)_h$ converge a f débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $(R_\mu(f_h))_h$ converge a $R_\mu(f)$ débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Pero, $R_\mu(f_h)$, $R_\mu(f) \in H_0^1(A)$, donde $A = A_\mu$; y la inclusión $H_0^1(A) \hookrightarrow L^2(A)$ es compacta ya que $|A| \leq c$. Entonces, $(R_\mu(f_h))_h$ converge a $R_\mu(f)$ fuerte en $L^2(A)$. Por lo tanto, $\|R_\mu(f) - R_\mu(f_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ tiende a cero.

Concluimos que $\lim_{h\to+\infty} \|R_{A_h}(f_h) - R_\mu(f_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$. Entonces,

$$\limsup_{h\to+\infty} \sup_{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \|R_{A_h}(g) - R_\mu(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\leq \limsup_{h\to+\infty}\left\{ \sup_{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \|R_{A_h}(g) - R_\mu(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \frac{1}{h}\right\}$$

$$\leq \lim_{h\to+\infty} \|R_{A_h}(f_h) - R_\mu(f_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

Por lo tanto, la sucesión de operadores $(R_{A_h})_h$ converge a R_μ en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$. □

Corolario 7.1.5. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, $(A_h)_h$ γ-converge a μ y $(w_{A_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $(\lambda_k(A_h))_h$ converge a $\lambda_k(\mu)$, donde $\lambda_k(A_h)$ denota el k-ésimo autovalor del Laplaciano, contado con multiplicidad, en $H_0^1(A_h)$.*

Se puede ver una demostración en [12, Lema XI.9.5].

7.1.2. Resultados de vanishing

Observación 7.1.6. Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{h\to+\infty} \lambda_1(A_h) = +\infty.$$

Entonces, para toda sucesión $(u_h)_h$ acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_h \in H_0^1(A_h)$, se tiene que $(u_h)_h$ converge a 0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $(u_h)_h$ una sucesión acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$, $\|u_h\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \le M$, tal que $u_h \in H_0^1(A_h)$. Entonces, usando la desigualdad de Poincaré 2.1.22,

$$\|u_h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_h\|^2_{L^2(A_h)} \le \frac{1}{\lambda_1(A_h)}\|\nabla u_h\|^2_{L^2(A_h)} \le \frac{1}{\lambda_1(A_h)}\|u_h\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \le \frac{M^2}{\lambda_1(A_h)}$$

y tomando límite de $h \to +\infty$, resulta $(u_h)_h$ converge a 0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$. □

Lema 7.1.7 (Lieb)**.** *Sean A, $E \subset \mathbb{R}^n$ abiertos no vacíos.*

Dado $\epsilon > 0$, existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\lambda_1(A \cap (E + z)) < \lambda_1(A) + \lambda_1(E) + \epsilon$. Equivalentemente, $\lambda_1(A) + \lambda_1(E) \ge \inf_{z\in\mathbb{R}^n} \lambda_1(A \cap (E + z))$.

Si A y E son acotados, existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\lambda_1(A \cap (E + z)) < \lambda_1(A) + \lambda_1(E)$. Equivalentemente, $\lambda_1(A) + \lambda_1(E) > \inf_{z\in\mathbb{R}^n} \lambda_1(A \cap (E + z))$.

Se puede ver una demostración en [17], y el resultado se extiende a A y E cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Lema 7.1.8. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal que $|A_h| \le c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, $(w_{A_h})_h$ converge a w débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y para todo $R > 0$ se tiene que*

$$\lim_{h\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{y+B_R(0)} w^2_{A_h} dx = 0.$$

Entonces, $\lim\limits_{h\to+\infty} \lambda_1(A_h) = +\infty$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Veamos que existe un $R > 0$ y una sucesión $(y_h)_h$ en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\lambda_1(A_h \cap B_R(y_h)) \le \lambda_1(A_h) + \epsilon$$

En efecto, dado ese $\epsilon > 0$, tomo $R > 0$ tal que $\delta := \epsilon - \lambda_1(B_R(0)) > 0$. Por el lema 7.1.7, tenemos que $\lambda_1(A_h) + \lambda_1(B_R(0)) \ge \inf_{z\in\mathbb{R}^n} \lambda_1(A_h \cap (B_R(z)))$. Usando la definición de ínfimo, existe un $y_h \in R^n$ tal que

$$\lambda_1(A_h \cap B_R(y_h)) \le \inf_{z\in\mathbb{R}^n} \lambda_1(A_h \cap (B_R(z))) + \delta \le \lambda_1(A_h) + \lambda_1(B_R(0)) + \delta = \lambda_1(A_h) + \epsilon.$$

Como $0 \le 1_{A_h\cap B_R(y_h)} \le 1_{A_h}$, por el principio de comparación del problema de Dirichlet, tenemos que $0 \le w_{A_h\cap B_R(y_h)} \le w_{A_h}$. Entonces, $0 \le w^2_{A_h\cap B_R(y_h)} \le w^2_{A_h}$. Luego,

$$\begin{aligned}\int_{A_h\cap B_R(y_h)} w^2_{A_h\cap B_R(y_h)} dx &\le \int_{A_h\cap B_R(y_h)} w^2_{A_h} dx \le \int_{B_R(y_h)} w^2_{A_h} dx = \int_{y_h+B_R(0)} w^2_{A_h} dx \\ &\le \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{y+B_R(0)} w^2_{A_h} dx\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $h \to +\infty$, resulta

$$\limsup_{h\to+\infty} \int_{A_h\cap B_R(y_h)} w^2_{A_h\cap B_R(y_h)} dx \leq \lim_{h\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{y+B_R(0)} w^2_{A_h} dx = 0$$

Entonces, la sucesión $(w_{A_h\cup B_R(y_h)})_h$ converge a 0 fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Llamo $E_h = A_h \cap B_R(y_h)$. Entonces, $(E_h)_h$ es una sucesión de cuasi-abiertos tal que $|E_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$. Por el teorema 5.3.10, existe una subsucesión (que seguimos notando con h) y una medida $\nu \in \mathcal{M}_0$ tales que $(E_h)_h$ γ-converge a ν. Además, $(w_{E_h})_h$ converge a 0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, por 5.4.11, $0 = w_\nu$. En consecuencia, $\nu = \infty_\emptyset \in \mathcal{M}_0$. Entonces, $(E_h)_h$ γ-converge a $\emptyset$.

Luego, por el corolario 7.1.5, tenemos que $(\lambda_1(E_h))_h$ converge a $\lambda_1(\emptyset) = +\infty$. Como teníamos la desigualdad

$$\lambda_1(E_h) = \lambda_1(A_h \cap B_R(y_h)) \leq \lambda_1(A_h) + \epsilon,$$

resulta que $(\lambda_1(A_h))_h$ tiende a $+\infty$, como queríamos probar. □

Proposición 7.1.9. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, $(w_{A_h})_h$ converge a w débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y para todo $R > 0$ se tiene que*

$$\lim_{h\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{y+B_R(0)} w^2_{A_h} dx = 0.$$

Entonces, la sucesión de operadores resolventes $(R_{A_h})_h$ converge a 0 en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

Demostración. Por el lema 7.1.8, sabemos que $(\lambda_1(A_h))_h$ tiende a $+\infty$. Entonces, por la observación 7.1.6 aplicada a la sucesión $(w_{A_h})_h$ (que es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$ por el lema 7.1.1 y el hecho de que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$), tenemos que $(w_{A_h})_h$ converge a $0 = w_{\infty_\emptyset}$ fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por último, aplicando la proposición 7.1.4, tenemos que $(R_{A_h})_h$ converge a $R_{\infty_\emptyset} = 0$ en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$, lo que concluye la demostración. □

7.1.3. Resultados de dicotomía

Lema 7.1.10. *Sean A, B cuasi-abiertos tales que $B \subset A$. Entonces, $w_B = P(w_A)$, donde $P\colon H^1_0(A) \to H^1_0(B)$ es la proyección ortogonal.*

Demostración. Observemos que $w_B = P(w_A)$ si y sólo si $w_A - w_B \in (H^1_0(B))^\perp$, es decir,

$$(w_A - w_B, v) = 0 \ \forall v \in H^1_0(B),$$

donde $(\cdot, \cdot)$ es el producto interno de $H^1_0(A)$ usual.

Sea $v \in H_0^1(B) \subset H_0^1(A)$. Tomo v como función test en la formulación débil de $-\Delta w_A = 1$ en A y en $-\Delta w_B = 1$ en B. Entonces,

$$\int_B \nabla w_B \nabla v dx = \int_B v dx$$

$$\int_B \nabla w_B \nabla v dx = \int_A \nabla w_A \nabla v dx = \int_A v dx = \int_B v dx$$

Restando, tenemos que

$$(w_A - w_B, v) = \int_B \nabla(w_A - w_B)\nabla v dx = 0,$$

para toda $v \in H_0^1(B)$. Luego, queda probada la igualdad que queríamos. □

Lema 7.1.11. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que existe un $\alpha \in (0, \lambda)$ y funciones u_h^1, $u_h^2 \in H_0^1(A_h)$ no negativas, tales que*

$$\lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} w_{A_h}^2 dx = \lambda > 0 \tag{7.1.1}$$

$$\|w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0 \tag{7.1.2}$$

$$\lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u_h^1)^2 dx = \alpha \text{ y } \lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u_h^2)^2 dx = (\lambda - \alpha) \tag{7.1.3}$$

$$\lim_{h\to+\infty} d(sop\, u_h^1, sop\, u_h^2) = +\infty \tag{7.1.4}$$

$$\liminf_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} [|\nabla w_{A_h}|^2 - (|\nabla u_h^1|^2 + |\nabla u_h^2|^2)]dx \geq 0 \tag{7.1.5}$$

Definimos $A_h^1 = \{u_h^1 > 0\}$ y $A_h^2 = \{u_h^2 > 0\}$, $B_h = A_h^1 \cup A_h^2$. Entonces, se tiene que $(w_{A_h} - w_{B_h})_h$ converge a 0 fuerte en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Como $w_{A_h} - w_{B_h} \in H_0^1(A_h)$, basta ver que $(\nabla(w_{A_h} - w_{B_h}))_h$ converge a 0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$, por la desigualdad de Poincaré 2.1.22 y el hecho de que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$.

Como $B_h \subset A_h$, por el lema 7.1.10, tenemos que $w_{B_h} = P_{H_0^1(B_h)}(w_{A_h})$ para cada $h \in \mathbb{N}$. Como $u_h^1 + u_h^2 \in H_0^1(B_h)$ y $P_{H_0^1(B_h)}(w_{A_h})$ es la función de $H_0^1(B_h)$ que realiza la distancia mínima de w_{A_h} a $H_0^1(B_h)$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h} - \nabla w_{B_h}|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h} - \nabla(u_h^1 + u_h^2)|^2 dx$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h}|^2 dx - 2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla w_{A_h} \nabla (u_h^1 + u_h^2) dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla (u_h^1 + u_h^2)|^2 dx$$

Pero, tomando como función test w_{A_h} y luego $u_h^1 + u_h^2$ en $-\Delta w_{A_h} = 1$ en A_h, tenemos que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h}|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} w_{A_h} dx$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla w_{A_h} \nabla (u_h^1 + u_h^2) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_h^1 + u_h^2) dx$$

Por lo tanto,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h} - \nabla w_{B_h}|^2 dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} w_{A_h} dx - 2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_h^1 + u_h^2) dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla (u_h^1 + u_h^2)|^2 dx$$

Sumo $\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_{A_h} dx$ y resto $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h}|^2 dx$ (que son términos iguales). Entonces,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_{A_h} - \nabla w_{B_h}|^2 dx \leq 2 \Big\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} [w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)] dx \Big\} + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla (u_h^1 + u_h^2)|^2 - |\nabla w_{A_h}|^2 dx$$

(a) Observemos que $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla (u_h^1 + u_h^2)|^2 - |\nabla w_{A_h}|^2 dx \leq 0$. En efecto,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla (u_h^1 + u_h^2)|^2 - |\nabla w_{A_h}|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h^1|^2 + |\nabla u_h^2|^2 + 2 \nabla u_h^1 \nabla u_h^2 - |\nabla w_{A_h}|^2 dx$$

Por (7.1.4), tenemos que para h suficientemente grande

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla u_h^1 \nabla u_h^2 dx = 0$$

pues la distancia entre los soportes de u_h^1 y u_h^2 tiende a $+\infty$. Entonces, tomando límite inferior en h y usando (7.1.5), resulta

$$\liminf_{h \to +\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla (u_h^1 + u_h^2)|^2 - |\nabla w_{A_h}|^2 dx = \liminf_{h \to +\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h^1|^2 + |\nabla u_h^2|^2 - |\nabla w_{A_h}|^2 dx \leq 0$$

(b) Veamos que $\int\limits_{\mathbb{R}^n} [w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)] dx$ tiende a cero.

En efecto,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} [w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)] dx = \int\limits_{A_h} [w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)] dx \leq |A_h|^{1/2} \| w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Como $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$ y vale (7.1.2) ($\|w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ tiende a cero), queda probado (b).

De **(a)** y **(b)**, concluimos que $(\nabla w_{A_h} - \nabla(u_h^1 + u_h^2))_h$ converge a 0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por último, usando que $w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2) \in H_0^1(A_h)$, la desigualdad de Poincaré 2.1.22 y el hecho de que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} &= \|w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2)\|_{H_0^1(A_h)} \\
&\leq M(|A_h|)\|\nabla w_{A_h} - \nabla(u_h^1 + u_h^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq M(c)\|\nabla w_{A_h} - \nabla(u_h^1 + u_h^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

y por lo tanto, $(w_{A_h} - (u_h^1 + u_h^2))_h$ converge a 0 fuerte en $H^1(\mathbb{R}^n)$, como queríamos ver. □

El siguiente lema es un resultado similar al teorema de la *independencia de f* 2.2.10 en el caso acotado. Nos dice que la norma de la resta de dos operadores es *gobernada* por la norma de la resta de soluciones con $f = 1$.

Lema 7.1.12. *Sean A, B cuasi-abiertos de* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $B \subset A$ *y* $|A| < \infty$. *Entonces, existen constantes K y* α *que sólo dependen de* $|A|$ *y la dimensión n tales que*

$$\|R_A - R_B\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq K\|w_A - w_B\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\alpha}$$

Se puede ver una demostración en [4], donde se usa teoría de interpolación de operadores.

Proposición 7.1.13. *Sea* $(A_h)_h$ *sucesión de cuasi-abiertos de* $\mathbb{R}^n$, $|A_h| \leq c$ *para toda* $h \in \mathbb{N}$, *tales que existe un* $\alpha \in (0, \lambda)$ *y funciones* u_h^1, $u_h^2 \in H_0^1(A_h)$ *no negativas, que verifican* (7.1.1)-(7.1.5). *Entonces, existe una sucesión* $(B_h)_h$ *de cuasi-abiertos tal que*

$$B_h \subset A_h, B_h = A_h^1 \cup A_h^2 \tag{7.1.6}$$

$$\lim_{h\to+\infty} d(A_h^1, A_h^2) = +\infty \tag{7.1.7}$$

$$\liminf_{h\to+\infty} |A_h^i| > 0, \text{ para } i = 1, 2. \tag{7.1.8}$$

$$\lim_{h\to+\infty} \|R_{A_h} - R_{B_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = 0 \tag{7.1.9}$$

Demostración. Definimos $A_h^1 = \{u_h^1 > 0\}$ y $A_h^2 = \{u_h^2 > 0\}$, $B_h = A_h^1 \cup A_h^2$. Es claro que $(B_h)_h$ es una sucesión de cuasi-abiertos (recordemos que trabajamos con los representantes cuasi-continuos de las funciones de $H^1(\mathbb{R}^n)$), y $B_h \subset A_h$. Luego, vale (7.1.6). Por (7.1.4), que nos dice que la distancia entre los soportes de u_h^1 y u_h^2 tiende a $+\infty$, vale (7.1.7). Por (7.1.3), vale (7.1.8). En efecto, si $\liminf_{h\to+\infty} |A_h^1| = 0$, existe una subsucesión que sigo notando $(A_h^1)_h$ tal que $\lim_h |A_h^1| = 0$. Entonces,

$$0 = \lim_{h\to+\infty} \int_{A_h} (u_h^1)^2 dx = \lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u_h^1)^2 dx = \alpha > 0,$$

lo que es absurdo. Luego, $\liminf_{h\to+\infty} |A_h^1| > 0$. Análogamente, $\liminf_{h\to+\infty} |A_h^2| > 0$.

Por último, veamos que vale (7.1.9).

Por el lema 7.1.12, existen constantes $K_h = K(|A_h|, n)$ y $M_h = M(|A_h|, n)$ tales que

$$\|R_{A_h} - R_{B_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq K_h \|w_{A_h} - w_{B_h}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{M_h}$$

Como $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, existen constantes $K = K(c, n)$ y $M = M(c, n)$ tales que

$$\|R_{A_h} - R_{B_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq K \|w_{A_h} - w_{B_h}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{M}$$

Además,

$$\begin{aligned} \|R_{A_h} - R_{B_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} &\leq K \|w_{A_h} - w_{B_h}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{M} \\ &\leq K \|w_{A_h} - w_{B_h}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^{M} \end{aligned}$$

Por el lema 7.1.11, tenemos que $(w_{A_h} - w_{B_h})_h$ converge a 0 fuerte en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, vale (7.1.9). □

Corolario 7.1.14. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que existe un $\alpha \in (0, \lambda)$ y funciones u_h^1, $u_h^2 \in H_0^1(A_h)$ no negativas, que verifican* (7.1.1)-(7.1.5).

Si $A_h^1 = \{u_h^1 > 0\}$ y $A_h^2 = \{u_h^2 > 0\}$, $B_h = A_h^1 \cup A_h^2$, entonces

$$\lim_{h\to+\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k(A_h)} - \frac{1}{\lambda_k(B_h)} \right| = 0,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Se puede ver una demostración en [12, Corolario XI.9.4], donde se usa la proposición 7.1.13.

Ahora, estamos en condiciones de demostrar el teorema más importante de esta sección, el *principio de concentración-compacidad de dominios.*

Teorema 7.1.15 (Principio de concentración-compacidad de dominios)**.**

Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$. Entonces, existe una subsucesión, que seguimos notando con h, tal que ocurre alguna de las siguientes:

(i) compacidad: Existe una sucesión $(y_h)_h$ en $\mathbb{R}^n$ y una medida $\mu \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$ tales que $(A_h + y_h)_h$ γ-converge a μ y $(R_{A_h+y_h})_h$ converge a R_μ en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

(ii) dicotomía: Existe una sucesión de cuasi-abiertos $(B_h)_h$ de $\mathbb{R}^n$ tal que para cada $h \in \mathbb{N}$ $B_h \subset A_h$, $\lim_h \|R_{B_h} - R_{A_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = 0$, $B_h = A_h^1 \cup A_h^2$ con $\lim_h d(A_h^1, A_h^2) = +\infty$ y $\liminf_h |A_h^i| > 0$ para $i = 1, 2$.

Demostración. Consideramos la sucesión $(w_{A_h})_h$ en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Por el lema 7.1.1 y el hecho de que $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, la sucesión $(w_{A_h})_h$ es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Pues,

$$||w_{A_h}||_{H^(\mathbb{R}^n)} \leq M(|A_h|) \leq M(c)$$

para toda $h \in \mathbb{N}$. Luego, existe una subsucesión de $(w_{A_h})_h$ (que seguimos notando con h), y una función $w \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tales que $(w_{A_h})_h$ converge a w débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$, débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y fuerte en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad, extrayendo una subsucesión, que

$$\lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} w_{A_h}^2 dx = \lambda \geq 0$$

Si $\lambda = 0$, $(w_{A_h})_h$ converge a 0 fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Recordando que cada A_h está asociado a la medida $\infty_{A_h^c}$ en $\mathcal{M}_0$ y el teorema de compacidad 5.3.10, tenemos que (para una subsucesión que seguimos notando con h) existe una medida $\mu \in \mathcal{M}_0$ tal que $(A_h)_h$ γ-converge a μ. Por la proposición 7.1.4, tenemos que $(R_{A_h})_h$ converge a R_μ en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$. Es decir, vale (i) tomando $y_h = 0$ para toda $h \in \mathbb{N}$.

Si $\lambda > 0$, podemos aplicar el principio de concentración-compacidad de Lions para $(w_{A_h})_h$. Entonces, existe una subsucesión (que seguimos notando con h) tal que ocurre la compacidad, el vanishing o la dicotomía de $(w_{A_h})_h$.

• Si ocurre la *compacidad* para $(w_{A_h})_h$, existe una sucesión $(z_h)_h$ en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\forall \epsilon > 0, \exists R > 0, \int_{z_h+B_R(0)} w_{A_h}^2 dx \geq \lambda - \epsilon$$

Llamo $B_h = A_h - z_h$, entonces, $w_{B_h}(x) = w_{A_h}(x + z_h)$ y

$$\forall \epsilon > 0, \exists R > 0, \int_{B_R(0)} w_{B_h}^2 dx \geq \lambda - \epsilon$$

Como $(w_{A_h})_h$ es acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$, $(w_{B_h})_h$ también lo es, pues la norma en $\mathbb{R}^n$ es invariante por traslaciones. Entonces, existe una subsucesión de $(w_{B_h})_h$ (que seguimos notando con h) y una función u tales que $(w_{B_h})_h$ converge a u débil en $H^1(\mathbb{R}^n)$, débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$y fuerte en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. En particular, por la convergencia débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$, tenemos que

$$\lambda = \lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} w_{A_h}^2 dx = \liminf_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} w_{B_h}^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx$$

Por otro lado, como $B_R(0)$ es compacto,

$$\lambda - \epsilon \leq \lim_{h\to+\infty} \int_{B_R(0)} w_{B_h}^2 dx = \int_{B_R(0)} u^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx \leq \lambda$$

para todo $\epsilon > 0$. Luego, $\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \lambda$. Como $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert y tenemos que $(w_{B_h})_h$ converge a u débil en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y converge las normas, resulta que $(w_{B_h})_h$ converge a u fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Por el teorema 5.3.10, la proposición 5.4.8 y el corolario 5.4.11, tenemos que existe una subsucesión de $(B_h)_h$ (que seguimos notando con h) y una medida $\mu \in \mathcal{M}_0$ tales que $(B_h)_h$ γ-converge a μ y $u = u_\mu$ y $A_\mu = \{u > 0\}$ salvo conjunto de capacidad cero.

Ahora, estamos en condiciones de aplicar la proposición 7.1.4. Entonces,

$$\lim_{h\to+\infty} \|R_{B_h} - R_\mu\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = 0.$$

Tomando $y_h = -z_h$, vale (i).

• Si ocurre el *vanishing* para $(w_{A_h})_h$, para todo $R > 0$, tenemos que

$$\lim_{h\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{y+B_R(0)} w^2_{A_h}\, dx = 0$$

Por la proposición 7.1.9, resulta $\lim\limits_{h\to+\infty} \|R_{A_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = 0$. Por lo tanto, nuevamente vale (i).

• Si ocurre la *dicotomía* para $(w_{A_h})_h$, existe un $\alpha \in (0,\lambda)$ y funciones no negativas u^1_h, $u^2_h \in H^1_0(A_h)$ que verifican (7.1.2)-(7.1.5). Aplicando la proposición 7.1.13, tenemos que existe una sucesión $(B_h)_h$ de cuasi-abiertos que satisface (7.1.6)-(7.1.9), lo que concluye la demostración. □

7.2. Aplicación a diseño óptimo

Lema 7.2.1. *Sea $(A_h)_h$ una sucesión de cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $|A_h| \leq c$ para toda $h \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\lim_{h\to+\infty} \lambda_1(A_h) = x \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \lim_{h\to+\infty} \lambda_2(A_h) = y \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Entonces, existe al menos un cuasi-abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $|A| \leq c$, $\lambda_1(A) \leq x$, $\lambda_2(A) \leq y$.

Demostración. Aplico el principio de concentración-compacidad para dominios, 7.1.15, a la sucesión $(A_h)_h$. Entonces, para una subsecusión de $(A_h)_h$ (que seguimos notando con h) ocurre la *compacidad* o la *dicotomía*.

• Si ocurre la compacidad, existen una medida $\mu \in \mathcal{M}_0$ y una sucesión en $\mathbb{R}^n$ $(y_h)_h$ tales que $(A_h + y_h)_h$ γ-converge a μ y la sucesión de operadores $(R_{A_h+y_h})_h$ converge a R_μ en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

Por la convergencia de operadores, tenemos que $(w_{A_h+y_h})_h$ converge a w fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, por la proposición 5.4.8, tenemos que $\{w > 0\} = A_\mu$ y, además, $|\{w > 0\}| \leq c$. Tomo $A = \{w > 0\}$, que es un conjunto cuasi-abierto, porque trabajamos con los representantes cuasi-continuos de las funciones de $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Por el corolario 7.1.5, tenemos que

$$\lim_{h\to+\infty} \lambda_k(A_h + y_h) = \lambda_k(\mu),$$

para toda $k \in \mathbb{N}$, donde

$$\lambda_k(\mu) = \inf \frac{\int_A |\nabla v|^2 dx + \int_A |v|^2 d\mu}{\int_A |v|^2 dx}, \quad \lambda_k(A_h) = \inf \frac{\int_{A_h} |\nabla v|^2 dx}{\int_{A_h} |v|^2 dx}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las funciones ortogonales a las primeras k autofunciones. Entonces,

$$\lambda_1(A) \leq \lambda_1(\mu) = \lim_{h\to+\infty} \lambda_1(A_h) = x$$

$$\lambda_2(A) \leq \lambda_2(\mu) = \lim_{h\to+\infty} \lambda_2(A_h) = y.$$

Luego, A verifica $|A| \leq c$, $\lambda_1(A) \leq x$, $\lambda_2(A) \leq y$.

• Si ocurre la dicotomía, existe una sucesión $(B_h)_h$ de cuasi-abiertos que verifica (7.1.6)-(7.1.9). Por el corolario 7.1.14, tenemos que

$$\lim_{h\to+\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k(A_h)} - \frac{1}{\lambda_k(B_h)} \right| = 0,$$

Como, además, por hipótesis sé que

$$\lim_{h\to+\infty} \lambda_1(A_h) = x, \quad \lim_{h\to+\infty} \lambda_2(A_h) = y,$$

resulta

$$\lim_{h\to+\infty} \lambda_1(B_h) = x, \quad \lim_{h\to+\infty} \lambda_2(B_h) = y.$$

Observemos que si U, V son cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$ disjuntos, tenemos que $\lambda_1(U \cup V) = \min\{\lambda_1(U), \lambda_1(V)\}$. Si suponemos $\lambda_1(U \cup V) = \lambda_1(U)$, entonces, $\lambda_2(U \cup V) = \min\{\lambda_2(U), \lambda_1(V)\}$.

Por (7.1.7), podemos suponer que A_h^1 y A_h^2 son disjuntos. Entonces, por la observación anterior, para cada $h \in \mathbb{N}$ocurre (a) o (b):

$$(a) \begin{cases} \lambda_1(B_h) = \lambda_1(A_h^1), \\ \lambda_2(B_h) = \lambda_1(A_h^2). \end{cases}, \text{ o } (b) \begin{cases} \lambda_1(B_h) = \lambda_1(A_h^1), \\ \lambda_2(B_h) = \lambda_2(A_h^1). \end{cases}$$

Como la sucesión es infinita y para cada $h \in \mathbb{N}$ hay dos posibilidades, existen infinitos valores de h tal que ocurre (a) o infinitos valores de h tal que ocurre (b).

Extrayendo una subsucesión, puede suponer que para todo $h \in \mathbb{N}$ ocuure (a), o para todo $h \in \mathbb{N}$ ocurre (b). Veamos qué sucede en cada caso.

(a) $\begin{cases} \lambda_1(B_h) = \lambda_1(A_h^1), \\ \lambda_2(B_h) = \lambda_1(A_h^2). \end{cases}$

Por rearreglos de Schwartz, existen bolas disjuntas E_h^1 y E_h^2 tales que

$$|E_h^1| + |E_h^2| \leq c \text{ y } \lambda_k(E_h^1 \cup E_h^2) \leq \lambda_k(B_h), \text{ para } k = 1, 2.$$

Entonces, para una subsucesión, existen bolas disjuntas E^1 y E^2 tales que $(E_h^1 \cup E_h^2)_h$ γ-converge a $E^1 \cup E^2$. (Eventualmente trasladando los centros de las bolas E_h^i, armo una nueva sucesión de bolas con radios $r_h \leq m$, m una constante, y luego, extraigo una subsucesión $(r_{h_k})_k$ convergente a r. Tomando como $E^i = B_r(p)$, con $p \in \mathbb{R}^n$).

Considero $A = E^1 \cup E^2$. Notar que ahora estoy en la situación de compacidad de la sucesión $(E_h^1 \cup E_h^2)_h$. Por el corolario 7.1.5, tenemos que

$$\lim_{h \to +\infty} \lambda_k(E_h^1 \cup E_h^2) = \lambda_k(A), \; k = 1, 2.$$

Además, como $\lambda_k(E_h^1 \cup E_h^2) \leq \lambda_k(B_h)$ para $k = 1, 2$,

$$\lambda_1(A) = \lim_{h \to +\infty} \lambda_1(E_h^1 \cup E_h^2) \leq \lim_{h \to +\infty} \lambda_1(B_h) = x,$$

$$\lambda_2(A) = \lim_{h \to +\infty} \lambda_2(E_h^1 \cup E_h^2) \leq \lim_{h \to +\infty} \lambda_2(B_h) = y.$$

Por lo tanto, $A = E^1 \cup E^2$ satisface el enunciado.

(b) $\begin{cases} \lambda_1(B_h) = \lambda_1(A_h^1), \\ \lambda_2(B_h) = \lambda_2(A_h^1). \end{cases}$

Por (7.1.8), $\alpha := \liminf_{h \to +\infty} |A_h^2| > 0$, $\beta := \liminf_{h \to +\infty} |A_h^1| > 0$, con $\alpha + \beta \leq c$. Existe $\epsilon > 0$ tal que

$$m_\epsilon = \max\left\{\left(\frac{x+\epsilon}{x}\right)^{1/2}, \left(\frac{y+\epsilon}{y}\right)^{1/2}\right\} < \left(\frac{c}{\beta+\epsilon}\right)^{1/n}.$$

En efecto, como $\beta < c$, tenemos que $1 < \left(\frac{c}{\beta}\right)^{1/n}$ y

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} m_\epsilon = 1 < \left(\frac{c}{\beta}\right)^{1/n} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\frac{c}{\beta+\epsilon}\right)^{1/n}$$

Para ese ϵ, existe $h_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x - \epsilon < \lambda_1(A_h^1) < x + \epsilon,$$

$$y - \epsilon < \lambda_2(A_h^1) < y + \epsilon,$$

$$|A^1_h| < \beta + \epsilon$$

para toda $h \geq h_0$. Tomo $t > 0$. Notamos $tA^1_{h_0}$ a la dilatación de $A^1_{h_0}$ de radio t con respecto al origen. Entonces,

$$\lambda_1(tA^1_{h_0}) = t^{-2}\lambda_1(A^1_{h_0}) < t^{-2}(x+\epsilon), \quad \lambda_2(tA^1_{h_0}) = t^{-2}\lambda_2(A^1_{h_0}) < t^{-2}(y+\epsilon)$$

Elijo t tal que $t \geq (\frac{x+\epsilon}{x})^{1/2}$, $t \geq (\frac{y+\epsilon}{y})^{1/2}$ y $t \leq (\frac{c}{\beta+\epsilon})^{1/n}$. Existe tal t pues, elegimos el $\epsilon > 0$ tal que

$$m = \max\left\{\Big(\frac{x+\epsilon}{x}\Big)^{1/2}, \Big(\frac{y+\epsilon}{y}\Big)^{1/2}\right\} < \Big(\frac{c}{\beta+\epsilon}\Big)^{1/n},$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\lambda_1(tA^1_{h_0}) \leq x, \ \lambda_2(tA^1_{h_0}) \leq y,$$

$$|tA^1_{h_0}| = t^n|A^1_{h_0}| < t^n(\beta+\epsilon) \leq c.$$

Considerando $A = tA^1_{h_0}$, concluimos la demostración. □

Teorema 7.2.2. *Sea $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ semicontinua inferior y creciente en cada variable. Entonces, el problema*

$$\min\left\{\Phi(\lambda_1(A), \lambda_2(A))\colon A \subset \mathbb{R}^n \textit{ cuasi-abierto, } |A| \leq c\right\} \tag{7.2.1}$$

admite al menos una solución, para toda $c > 0$.

Demostración. Por el teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos (ver [13, Apéndice E, Teorema 6]), sabemos que $(\lambda_j(A))_j$ es una sucesión creciente, positiva, que tiende a $+\infty$, para cada $A \subset \mathbb{R}^n$ cuasi-abierto tal que $|A| \leq c$. En particular, $\lambda_j(A) \geq 0$ para $j = 1, 2$. Como Φ es creciente en cada variable, $G(A) = \Phi(\lambda_1(A), \lambda_2(A)) \geq \Phi(0, 0)$. Por lo tanto, G es acotada inferiormente. Entonces, el ínfimo de G sobre todos los cuasi-abiertos de $\mathbb{R}^n$ de medida de Lebesgue menor o igual a c, es finito.

Sea $(A_h)_h$ una sucesión minimizante para el problema

$$\alpha := \inf\left\{\Phi(\lambda_1(A), \lambda_2(A))\colon A \subset \mathbb{R}^n \text{ cuasi-abierto, } |A| \leq c\right\}$$

tal que

$$\lim_{h\to+\infty} \lambda_1(A_h) = x, \quad \lim_{h\to+\infty} \lambda_2(A_h) = y.$$

En principio, x,y podrían valer $+\infty$. Si $x = +\infty$, existe una subsucesión $(A_{h_k})_k$, que sigue siendo una sucesión minimizante para el problema, tal que $\lambda_1(A_{h_k}) > k$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\lambda_2(A_{h_k}) > \lambda_1(A_{h_k})$, entonces, como Φ es creciente en cada variable,

$$+\infty = \lim_{k\to+\infty} \Phi(k, k) \leq \lim_{k\to+\infty} \Phi(\lambda_1(A_{h_k}), \lambda_2(A_{h_k})) = \alpha < \infty,$$

que es una contradicción. Luego, $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Análogamente, $y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Por el lema 7.2.1, existe al menos un cuasi-abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $|A| \leq c$, $\lambda_1(A) \leq x$ y $\lambda_2(A) \leq y$. Entonces, como Φ es semicontinua inferior y creciente en cada variable, tenemos que

$$\Phi(\lambda_1(A), \lambda_2(A)) \leq \liminf_{h \to +\infty} \Phi(\lambda_1(A_h), \lambda_2(A_h)) = \alpha,$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Bibliografía

[1] H. Attouch, *Variational convergence for functions and operators*, Applicable Mathematics Series, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984. MR 773850 (86f:49002)

[2] Andrea Braides, Γ-*convergence for beginners*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 22, Oxford University Press, Oxford, 2002. MR 1968440 (2004e:49001)

[3] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983, Théorie et applications. [Theory and applications]. MR 697382 (85a:46001)

[4] Dorin Bucur, *Uniform concentration-compactness for Sobolev spaces on variable domains*, J. Differential Equations **162** (2000), no. 2, 427–450. MR 1751712 (2001d:49008)

[5] Giuseppe Buttazzo and Gianni Dal Maso, *Shape optimization for Dirichlet problems: relaxed formulation and optimality conditions*, Appl. Math. Optim. **23** (1991), no. 1, 17–49. MR 1076053 (92e:49055)

[6] ______, *An existence result for a class of shape optimization problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **122** (1993), no. 2, 183–195. MR 1217590 (94i:49052)

[7] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations*, (Vol. II by R. Courant.), Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons), New York-Lon don, 1962. MR 0140802 (25 #4216)

[8] Gianni Dal Maso, *An introduction to* Γ-*convergence*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 8, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993. MR 1201152 (94a:49001)

[9] Gianni Dal Maso and Umberto Mosco, *Wiener's criterion and* Γ-*convergence*, Appl. Math. Optim. **15** (1987), no. 1, 15–63. MR 866165 (88e:49031)

[10] J. Deny and J. L. Lions, *Les espaces du type de Beppo Levi*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **5** (1953–54), 305–370 (1955). MR 0074787 (17,646a)

[11] J. L. Doob, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 262, Springer-Verlag, New York, 1984. MR 731258 (85k:31001)

[12] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz, *Linear operators. Part II: Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space*, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Interscience Publishers John Wiley & Sons New York-London, 1963. MR 0188745 (32 #6181)

[13] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR 2597943 (2011c:35002)

[14] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. MR 1158660 (93f:28001)

[15] Antoine Henrot and Michel Pierre, *Variation et optimisation de formes*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], vol. 48, Springer, Berlin, 2005, Une analyse géométrique. [A geometric analysis]. MR 2512810 (2009m:49003)

[16] David Kinderlehrer and Guido Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Classics in Applied Mathematics, vol. 31, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000, Reprint of the 1980 original. MR 1786735 (2002d:49001)

[17] Elliott H. Lieb, *On the lowest eigenvalue of the Laplacian for the intersection of two domains*, Invent. Math. **74** (1983), no. 3, 441–448. MR 724014 (85e:35090)

[18] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), no. 2, 109–145. MR 778970 (87e:49035a)