UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN LUIS
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales
Departamento de Matemática

Un problema de diseño óptimo asociado al primer autovalor de Steklov

Tesis de Maestría

Juan Francisco Spedaletti

Director: Julián Fernández Bonder

Noviembre, 2014

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a CONICET por haberme financiado en estos años, sin este apoyo económico las cosas se hubieran hecho imposibles.

A Julián por dirigirme, es un placer y un lujo tenerlo de director.

A las únicas dos personas de mi familia que valen la pena: mi mamá y mi tía.

Al Instituto de Matemática Aplicada San Luis por aceptarme y haberme dado un lugar.

Un problema de diseño óptimo asociado al primer autovalor de Steklov.

(Resumen)

En esta Tesis se estudia un problema de diseño óptimo asociado al primer autovalor de Steklov.

Se considera un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y una ventana $\Gamma \subset \partial\Omega$, asociadas a esta se define el primer autovalor de Steklov como a la cantidad

$$\lambda(\Gamma) := \text{ínf} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p \, dx}{\int_{\partial\Omega} |v|^p \, dS},$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulan sobre Γ.

El problema de diseño óptimo es el siguiente: dado $\alpha \in (0,1)$, buscar $\Gamma^* \subset \partial\Omega$ con $|\Gamma^*|_{N-1} = \alpha|\partial\Omega|_{N-1}$ que verifique

$$\lambda(\Gamma^*) = \text{ínf}\, \lambda(\Gamma)$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las ventanas $\Gamma \subset \partial\Omega$ que verifican $|\Gamma|_{N-1} = \alpha|\partial\Omega|_{N-1}$.

Para este problema se demuestra existencia de la ventana óptima y algunas propiedades de la misma y de la autofunción asociada.

Luego, el problema que nos ocupa es el estudio de la dependencia de esta ventana óptima con respecto a perturbaciones en el dominio Ω. En esta tesis desarrollamos la teoría de la dependencia tanto del autovalor como de la ventana óptima cuando el dominio es perturbado periódicamente.

Como resultado principal se demuestra la convergencia a un problema límite homogeneizado.

Capítulo 1

Introducción

Las desigualdades de Sobolev han demostrado ser herramientas fundamentales en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Entre las desigualdades de Sobolev, una que ha recibido mucha atención recientemente es la desigualdad de trazas que dice

$$S\left(\int_{\partial\Omega} |u|^q \, dS\right)^{p/q} \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^p + |u|^p \, dx,$$

para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para cierta constante $S > 0$, $1 \leq q \leq p_*$, donde p_* es el exponente crítico en la inmersión de trazas de Sobolev, i.e. $p_* = p(N-1)/(N-p)$ si $1 < p < N$ y $p_* = \infty$ si $p \geq N$ (la igualdad $q = p_*$ no es cierta en el caso límite $p = N$). En esta tesis, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denotará un dominio suave (C^2 es suficiente en todos nuestros argumentos).

En estas desigualdades, las *constantes óptimas* juegan un rol fundamental junto con sus *extremales* asociados. Esto es, respectivamente, la constante más grande posible S en la desigualdad de trazas es definida como

$$S = S_{p,q}(\Omega) := \inf_{u \in W^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p + |u|^p \, dx}{\left(\int_{\partial\Omega} |u|^q \, dS\right)^{p/q}}$$

y los extremales son funciones $w \in W^{1,p}(\Omega)$ donde el ínfimo es alcanzado.

Es un hecho conocido que si $1 \leq q < p_*$ entonces la constante S es positiva y que, dado que la inclusión $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\partial\Omega)$ es compacta, se tiene la existencia de extremales.

Motivados por algunos problemas en diseño óptimo para energías almacenadas bajo cargas prescriptas, en [12] los autores estudian una variante de la desigualdad de trazas (ver [12] para una discusión detallada del problema): dado un conjunto $A \subset \Omega$, minimizar el *cociente de Rayleigh* sobre la clase de funciones que se anula sobre A, i.e.

$$S(A) := \inf_{u \in W^{1,p}_A(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p + |u|^p \, dx}{\left(\int_{\partial\Omega} |u|^q \, dS\right)^{p/q}}$$

donde

$$W^{1,p}_A(\Omega) := \{u \in W^{1,p}(\Omega) \colon u = 0 \text{ c.t.p. en } A\}.$$

Luego, en el artículo [12] se estudia el siguiente problema de optimización de forma: Minimizar $S(A)$ entre todos los conjuntos medibles $A \subset \Omega$ tales que $|A|_N = \alpha|\Omega|_N$ para alguna constante fija $0 < \alpha < 1$. Un conjunto A^* que minimiza $S(A)$ se llama *conjunto optimal*.

En [12] se demuestra la existencia de un conjunto optimal y se estudian algunas propiedades geométricas de esos conjuntos optimales. Más aún, en el caso en que $p = 2$, la regularidad interior de los conjuntos optimales es estudiada en [11].

Observemos que en los trabajos mencionados los conjuntos donde las funciones son obligadas a anularse son conjuntos *interiores*, i.e. $A \subset \Omega$ de medida de Lebesgue positiva. Sin embargo el caso de conjuntos sobre la frontera, i.e. $\Gamma \subset \partial\Omega$ no había sido tratado.

En esta tesis empezamos revisando los resultados de [6] donde el problema de conjuntos sobre la frontera fue tratado y nos concentraremos en el caso $p = q$.

Más precisamente, estudiamos la mejor constante de trazas de Sobolev de $W^{1,p}(\Omega)$ en $L^p(\partial\Omega)$ para funciones que se anulan en un subconjunto Γ de $\partial\Omega$, i.e.

$$\lambda(\Gamma) := \inf_{u \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p \, dx}{\int_{\partial\Omega} |u|^p \, dS} \tag{1.1}$$

donde

$$W^{1,p}_\Gamma(\Omega) := \{u \in W^{1,p}(\Omega) \colon u = 0 \text{ c.t.p. } \Gamma \text{ con respecto a la medida de superficie}\},$$

y asociado a (1.1) estudiamos el siguiente problema de optimización: dado $0 < \alpha < 1$,

$$\lambda(\alpha) := \inf \{\lambda(\Gamma) \colon \Gamma \subset \partial\Omega,\ |\Gamma|_{N-1} = \alpha|\partial\Omega|_{N-1}\}. \tag{1.2}$$

Un conjunto $\Gamma^* \subset \partial\Omega$ se denomina una *ventana optimal*, si realiza el ínfimo en (1.2), i.e. $\lambda(\Gamma^*) = \lambda(\alpha)$ y $|\Gamma^*|_{N-1} = \alpha|\partial\Omega|_{N-1}$.

En una primera parte, siguiendo lo realizado por [6] mostramos existencia de una ventana optimal junto con algunas propiedades de la misma y de sus extremales.

Finalmente nos dedicamos al estudio de la dependencia de las ventanas optimales junto con sus extremales cuando el dominio Ω es perturbado periódicamente. En [6] fue estudiado el problema de la dependencia de estas ventanas optimales bajo perturbaciones *regulares* del dominio Ω. La gran diferencia con el enfoque presentado en esta tesis es que las perturbaciones que consideramos degeneran cuando el parámetro de aproximación ε tiende a 0.

Estructura de la tesis

Luego de esta introducción, la tesis se compone de 5 capítulos que pasamos a describir.

En el Capítulo 2 se da un repaso de los espacios de Sobolev y se revisan sus propiedades más importantes que serán de gran utilidad en todo lo que sigue.

En el Capítulo 3 se dan las nociones básicas de la teoría de la $\Gamma-$convergencia. Si bien esta herramienta no es esencial para las demostraciones subsiguientes, nos brindan de un marco teórico unificado donde todos los teoremas de convergencia de los autovalores pueden ser vistos. Algunos de los resultados de este capítulo, si bien creemos que deben ser conocidos en la literatura, no hemos podido encontrarlos (por ejemplo, los resultados de la sección 3.3).

En el Capítulo 4 se da la definición del operador $p-$Laplaciano junto con sus propiedades más habituales y se estudia el problema de autovalores de Steklov para dicho operador.

En el Capítulo 5 se comienza el estudio del problema de optimización de forma repasando los resultados de [6] y se demuestra la existencia de una ventana optimal Γ^* junto con algunas de sus propiedades.

Finalmente, en el Capítulo 6 se estudia la dependencia de estas ventanas optimales junto con sus extremales con respecto a perturbaciones periódicas sobre el dominio Ω. La naturaleza de estas perturbaciones se dividen en tres tipos dependiendo de la relación que existe entre el período de estas perturbaciones y su amplitud:

- *Perturbación subcrítica*, cuando la amplitud es de menor orden que el período.
- *Perturbación supercrítica*, cuando la amplitud es de mayor orden que el período.
- *Perturbación crítica*, cuando la amplitud y el período son del mismo orden.

En el caso de la perturbación subcrítica, se observa un fenómeno de *engordamiento* de la frontera y en el límite se pierde el teorema de inmersión de trazas.

En el caso de la perturbación supercrítica, se observa que el problema converge al problema sin perturbar.

Finalmente, en el caso de la perturbación crítica, se ve un fenómeno de *homogeneización* donde la medida de superficie converge a una medida homogeneizada sobre el borde.

Los resultados de este último capítulo son originales de esta tesis.

Capítulo 2

Espacios de Sobolev

En este capítulo presentamos los espacios de Sobolev que son los espacios sobre los cuales trabajaremos mas adelante dando las propiedades mas conocidas e importantes que tienen, comenzaremos el capítulo dando el concepto de derivada débil de una función que será necesario para definir los espacios antes mencionados dando también propiedades utiles, luego describiremos detalladamente la regularidad necesaria que vamos a asumir sobre los dominios con los cuales trabajaremos. En la sección 1.5 trataremos el importante concepto de reflexividad de un espacio que es un ingrediente importante para la existencia de mínimos. Por último terminamos el capítulo enunciando dos importantes teoremas de trazas que serán necesarios más adelante en este trabajo.

2.1. Derivada débil

Notación 2.1. $C_c^\infty(U)$ ($U \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto) denotará el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables $\phi\colon U \to \mathbb{R}$ con soporte compacto en U.

Definición 2.2. Sean $u, v \in L^1_{loc}(U)$, y $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ un multiíndice. Decimos que v es la $\alpha-$ésima derivada parcial débil de u, y se escribe:

$$D^\alpha u = v$$

si se cumple

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U). \tag{2.1}$$

En otras palabras, si dada una función u y existe otra función v que verifica (2.1) decimos que $D^\alpha u = v$ en el sentido débil. En el caso de no existir tal función v entonces u no posee $\alpha-$ésima derivada derivada parcial.

Un modo práctico de ver el concepto de derivada débil es interpretarla en el sentido de la identidad de Green.

La derivada débil es única y esto se sigue del siguiente lema.

Lema 2.3. *La derivada parcial débil de una función u, si esta existe, está unívocamente determinada salvo conjunto de medida cero.*

Demostración. Si v_1 y v_2 son ambas derivadas débiles de u entonces

$$\int_U uD^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v_1 \phi \, dx$$

y

$$\int_U uD^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v_2 \phi \, dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, usando estas dos ecuaciones se llega a

$$\int_U (v_1 - v_2)\phi \, dx = 0, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

y esto último dice que $v_1 - v_2 = 0$ casi en todo punto y así queda demostrado el lema. □

2.2. Definición de espacios de Sobolev

Sea $1 \leq p \leq \infty$ y k un entero no negativo. Definimos ahora cierto espacio funcional cuyos miembros tienen derivadas de varios ordenes en L^p.

Definición 2.4. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. El espacio de Sobolev $W^{k,p}(U)$, consiste de todas las funciones localmente integrables $u \colon U \to \mathbb{R}$ de modo tal que por cada multiíndice α con $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe en el sentido débil y corresponde a $L^p(U)$.

Observación 2.5.

1. Si $p = 2$, usualmente escribimos

$$H^k(U) = W^{k,2}(U) \quad (k = 0, 1 \ldots).$$

Se usa la letra H ya que se desea remarcar la estructura hilbertiana del espacio. Note que $H^0(U) = L^2(U)$.

2. De aquí en adelante identificamos funciones en $W^{k,p}$ las cuales coinciden a.e.

Definición 2.6. Si $u \in W^{k,p}(U)$, definimos su norma como:

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Observación 2.7. Observemos que en el caso $p = 2$ esta norma coincide con la inducida por el producto interno

$$(u, v)_{H^k(U)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_U D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

Observación 2.8. En el caso $k = 1$ es usual considerar la siguiente norma en $W^{1,p}(U)$,

$$\|u\|_{W^{1,p}(U)} := \left(\int_U |\nabla u|^p + |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Esta norma es equivalente a la definida en la Definición 2.6 que corresponde a tomar la norma p de vectores en $\mathbb{R}^n$ en lugar de la norma euclídea para $|\nabla u|$.

Definición 2.9. Sea $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}, u \in W^{k,p}(U)$. Decimos que $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a u en $W^{k,p}(U)$, y escribimos $u_m \to u$ en $W^{k,p}(U)$, si se cumple $\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0$.

Escribimos $u_m \to u$ en $W^{k,p}_{loc}(U)$ para decir que $u_m \to u$ en $W^{k,p}(V)$ por cada $V \subset\subset U$.

Definición 2.10. Denotamos por $W_0^{k,p}(U)$ a la clausura de $C_c^{\infty}(U)$ en $W^{k,p}(U)$.

De esta forma $u \in W_0^{k,p}(U)$ si y sólo si existen funciones $u_m \in C_c^{\infty}(U)$ tal que $u_m \to u$ en $W^{k,p}(U)$. Interpretamos los elementos del espacio $W_0^{k,p}(U)$ como las funciones $u \in W^{k,p}(U)$ tal que

$$\text{“}D^{\alpha}u = 0 \text{ en } \partial U\text{” para todo } |\alpha| \leq k-1.$$

Esto se hára mas claro con el concepto de traza.

Notación 2.11. Es costumbre escribir

$$H_0^k(U) = W_0^{k,2}(U)$$

Si $n = 1$ y U es un intervalo abierto en $\mathbb{R}^1$, entonces $u \in W^{1,p}(U)$ si y sólo si u es igual casi en todo punto a una función absolutamente continua cuyas derivadas ordinarias (las cuales existen casi en todo punto) corresponden a $L^p(U)$.

Tal caracterización es posible solo para el caso $n = 1$. En general una función puede corresponder a un espacio de Sobolev y ser discontinua y/o no acotada.

Ejemplo 2.12. Tomando $U = B^0(0,1)$, la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$, y

$$u(x) = |x|^{-\alpha} \quad (x \in U,\, x \neq 0).$$

¿Para qué valores $\alpha > 0, n, p$ la función u corresponde a $W^{1,p}(U)$?. Para responder esto, notamos primero que u es suave lejos de 0, con

$$u_{x_i}(x) = -\frac{\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}} \quad (x \neq 0)$$

y así

$$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \quad (x \neq 0).$$

Sea $\phi \in C_c^{\infty}(U)$ y fijemos $\epsilon > 0$. Entonces

$$\int_{U \setminus B(0,\epsilon)} u\phi_{x_i} \, dx = -\int_{U \setminus B(0,\epsilon)} u_{x_i}\phi \, dx + \int_{\partial B(0,\epsilon)} u\phi\nu^i \, dS,$$

donde $\nu = (\nu^1, \ldots, \nu^n)$ denota la normal unitaria apuntando hacia el interior en $\partial B(0, \epsilon)$. Ahora si $\alpha + 1 < n$, $|Du(x)| \in L^1(U)$. En este caso

$$\left| \int_{\partial B(0,\epsilon)} u\phi\nu^i \, dx \right| \leq \|\phi\|_\infty \int_{\partial B(0,\epsilon)} \epsilon^{-\alpha} \, dS \leq C\epsilon^{n-1-\alpha} \to 0.$$

De esta manera

$$\int_U u\phi_{x_i} \, dS = -\int_U u_{x_i}\phi \, dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$, con $0 \leq \alpha < n - 1$. Además $|Du(x)| = \alpha/|x|^{\alpha+1} \in L^p(U)$ si y sólo si $(\alpha + 1)p < n$. En consecuencia $u \in W^{1,p}(U)$ si y sólo si $\alpha < \frac{n-p}{p}$. En particular $u \notin W^{1,p}(U)$ por cada $p \geq n$.

2.3. Propiedades elementales

A continuación recordamos ciertas propiedades de las derivadas débiles. Varias de estas reglas son válidas para funciones suaves pero las funciones en un espacio de Sobolev no son necesariamente suaves. No daremos una demostración de estos hechos. El lector interesado la puede encontrar, por ejemplo, en el libro [7].

Teorema 2.13 (Propiedades de las derivadas débiles)**.** *Asumiendo $u, v \in W^{k,p}(U)$, $|\alpha| \leq k$, se tiene que*

1. *$D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ y $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ para todo multiíndice α, β con $|\alpha| + |\beta| \leq k$.*

2. *Por cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ y $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leq k$.*

3. *Si V es un subconjunto abierto de U, entonces $u \in W^{k,p}(V)$.*

4. *Si $\zeta \in C_c^\infty(U)$, entonces $\zeta u \in W^{k,p}(U)$ y*

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u \quad \textit{(fórmula de Leibnitz)}$$

donde $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ y $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!$.

2.4. Propiedades funcionales de los espacios de Sobolev

En esta sección estudiaremos las propiedades de los espacios de Sobolev como espacios de Banach. En particular nos interesa saber cuando estos espacios resultan separables y/o reflexivos. Ese es el contenido del siguiente teorema.

Teorema 2.14 (Espacios de Sobolev como espacios de funciones)**.** *Por cada $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Sobolev $W^{k,p}(U)$ es un espacio Banach.*

Si, además $1 \leq p < \infty$ el espacio de Sobolev $W^{k,p}(U)$ es separable.

Por último, si $1 < p < \infty$ el espacio de Sobolev $W^{k,p}(U)$ es reflexivo.

Demostración. Supongamos que $\{u_m\}_m$ es una sucesión de Cauchy en $W^{k,p}(U)$ por cada $|\alpha| \leq k$ las sucesiones $\{u_m\}_m$ y $\{D^\alpha u_m\}_m$ están en $L^p(U)$ y ser este espacio completo existen funciones u, g_α en $L^p(U)$ tal que

$$\|u_m - u\|_{L^p(U)} \to 0$$

y

$$\|D^\alpha u_m - g_\alpha\|_{L^p(U)} \to 0$$

por cada $|\alpha| \leq k$. Para terminar de ver que es un espacio de Banach solo hay que probar que $D^\alpha u = g_\alpha$, sea entonces $\phi \in C_c^\infty(U)$ arbitraria

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = \lim_{m\to\infty} \int_U u_m D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \lim_{m\to\infty} \int_U D^\alpha u_m \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U g_\alpha \phi \, dx$$

y en consecuencia

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U g_\alpha \phi \, dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$, pero esto dice que $D^\alpha u = g_\alpha$, se ha probado que $u \in W^{1,p}(U)$ y $\|u_m - u\|_{W^{1,p}(U)} \to 0$ si $m \to \infty$, por lo tanto $W^{k,p}(U)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

Para ver que es un espacio reflexivo se considera la isometría

$$i : W^{1,p}(U) \to \underbrace{L^p(U) \times \cdots \times L^p(U)}_{n+1-veces}$$

definida por $i(u) = (u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, para $1 < p < \infty$ el espacio $L^p(U)$ es reflexivo y así $L^p(U) \times \cdots \times L^p(U)$ es también relfexivo, $i(W^{1,p}(U))$ es un cerrado en un reflexivo y por lo tanto reflexivo, como i es una isometría y $i(W^{1,p}(U))$ es reflexivo será $W^{1,p}(U)$ reflexivo.

Considerando ahora $1 \leq p < \infty$ el espacio $L^p(U)$ será separable y así también es separable el conjunto

$$\underbrace{L^p(U) \times \cdots \times L^p(U)}_{n+1-veces}.$$

Teniendo en cuenta la misma isometría definida anteriormente resultará que $i(W^{1,p}(U)) \subseteq L^p(U) \times \cdots \times L^p(U)$ es separable y usando el hecho de que un subconjunto de un espacio métrico separable es también separable se cumple que $i(W^{1,p}(U))$ es separable y en consecuencia el conjunto $W^{1,p}(U)$ es también separable como se quería demostrar. □

2.5. Aproximación

El objetivo de esta sección es mostrar que las funciones de Sobolev pueden aproximarse mediante funciones regulares. Nuestro primer teorema nos da la aproximación local de funciones de Sobolev que se obtiene por el método de la regularización por convolución.

Antes de enunciar el teorema daremos la siguientes definiciones necesarias.

Definición 2.15. 1. Se define

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

la constante C es elegida de modo tal que $\int_{\mathbb{R}^N} \eta \, dx = 1$.

2. Para $\varepsilon > 0$ definimos

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\eta(\tfrac{x}{\varepsilon})$$

el núcleo regularizante estándar. Esta función η_ε satisface $\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon \, dx = 1$ y $\mathrm{sop}(\eta_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$.

3. Dada $u \in L^1(U)$, se define la función $u_\varepsilon \colon U_\varepsilon \to \mathbb{R}$ por la fórmula

$$u_\varepsilon(x) := u * \eta_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(0)} u(x-y)\eta_\varepsilon(y)\, dy = \int_U u(y)\eta_\varepsilon(x-y)\, dy$$

donde $U_\varepsilon := \{x \in U \colon \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$.

Teorema 2.16. *Sea $U \subset \mathbb{R}^N$ abierto entonces si $u \in W^{1,p}(U)$, la sucesión de funciones $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ definidas en el ítem 3 de la definición anterior, verifican que $u_\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ y*

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W^{1,p}_{loc}(U)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Demostración. Vamos a ver primero que $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset C^\infty(U)$. Sea $x \in U_\varepsilon, i \in \{1, \ldots, N\}$ y h lo suficientemente chico para que $x + he_i \in U_\varepsilon$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{u_\varepsilon(x+he_i) - u_\varepsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_U \frac{1}{h}\left\{\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right\} u(y)\, dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_V \frac{1}{h}\left\{\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right\} u(y)\, dy,\end{aligned}$$

para algún conjunto $V \subset\subset U$. Como

$$\frac{1}{h}\left\{\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right\} \to \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$$

uniformemente sobre V, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}$ existe y es igual a

$$\int_U \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)\,dy.$$

Con un argumento similar uno puede mostrar que $D^\alpha u_\varepsilon(x)$ existe y

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = \int_U D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \quad (x \in U_\varepsilon),$$

para cada multiíndice α, esto prueba que las funciones u_ε asi definidas corresponden al espacio $C^\infty(U_\varepsilon)$.

Vamos a probar ahora la convergencia de las funciones u_ε. A continuación probaremos primero lo siguiente $D^\alpha u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u$ en U_ε, en efecto

$$\begin{aligned} D^\alpha u_\varepsilon(x) = D^\alpha \int_U \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy &= \int_U D^\alpha_x \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_U D^\alpha_y \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy. \end{aligned}$$

Fijando ahora $x \in U_\varepsilon$ la función $\phi(y) = \eta_\varepsilon(x-y)$ corresponde a $C_c^\infty(U)$ y por la definición de derivada débil de orden α se tiene que

$$\int_U D^\alpha_y \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy = (-1)^{|\alpha|}\int_U \eta_\eta(x-y)D^\alpha u(y)\,dy$$

de esta manera tenemos que

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = (-1)^{|\alpha|+|\alpha|}\int_U \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)\,dy.$$

Es decir, hemos probado que $D^\alpha u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u$ en U_ε.

Ahora elegimos un conjunto abierto V que cumpla $V \subset\subset U$. Usando entonces que $D^\alpha u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u$ en U_ε y el hecho de que si $1 \leq p < \infty$ para $f \in L^p_{loc}(U)$ se cumple que $\eta_\varepsilon * f \to f$ en $L^p_{loc}(U)$ (ver [7]) se concluye que $D^\alpha u_\varepsilon(x) \to D^\alpha u(x)$ en $L^p_{loc}(U)$ para cualquier multiíndice $|\alpha| \leq 1$, por lo tanto

$$\|u_\varepsilon - u\|^p_{W^{1,p}(V)} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|^p_{L^p(V)} \to 0$$

cuando $\varepsilon \to 0$ y esto prueba la convergencia de la sucesión. $\square$

Con la ayuda del Teorema 2.16, se puede demostrar la densidad de las funciones test en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 2.17. *Dada $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, existe $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Probemos primero la densidad de las funciones con soporte compacto. Para esto se toma una función $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi \equiv 1$ en $B_1(0)$ y $\phi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus B_2(0)$ y se define $\phi_R(x) = \phi(x/R)$. Luego, $\phi_R \equiv 1$ en $B_R(0)$ y $\phi_R \equiv 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus B_{2R}(0)$.

Observemos que $0 \leq \phi_R \leq 1$ y que $|\nabla\phi_R| = R^{-1}|\nabla\phi| \leq C$ para $R > 1$.

Es ahora un ejercicio simple verificar que $u_R := \phi_R u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, que u_R tiene soporte compacto y que $u_R \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Queda entonces ver que si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tiene soporte compacto, puedo entonces aproximarla por funciones $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, pero esto lo consigo con las funciones u_ε del Teorema 2.16 dado que $(\mathbb{R}^N)_\varepsilon = \mathbb{R}^N$ y que $\operatorname{sop}(u_\varepsilon) \subset \operatorname{sop}(u) + \operatorname{sop}(\eta_\varepsilon) \subset \operatorname{sop}(u) + B_1(0)$ que es compacto. $\square$

El siguiente teorema muestra que, para dominios acotados, se tiene la aproximación global de funciones de Sobolev por funciones regulares. Primero enunciaremos la siguiente definición que nos será necesaria

Definición 2.18. Dados dos conjuntos abiertos U y V en $\mathbb{R}^N$ decimos que V esta compactamente contenido en U si $V \subset \bar{V} \subset U$ y $\bar{V}$ es compacto, denotaremos esto escribiendo

$$V \subset\subset U.$$

Teorema 2.19 (Aproximación global por funciones suaves)**.** *Sea U acotado, $u \in W^{1,p}(U)$ para algún $1 \leq p < \infty$ entonces existen funciones $u_m \in C^\infty(U) \cap W^{1,p}(U)$ tal que*

$$\|u_m - u\|_{W^{1,p}(U)} \to 0 \quad si \quad m \to \infty \quad en \quad W^{1,p}(U)$$

Demostración. Tenemos que $U = \bigcup_{i=1}^\infty U_i$ donde

$$U_i = \{x \in U \colon \operatorname{dist}(x, \partial U) > 1/i\} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Definimos también $V_i = U_{i+3} \setminus \bar{U}_{i+1}$ y elegimos V_0 de modo tal que $V_0 \subset\subset U$ y $U = \cup_{i=0}^\infty V_i$, ahora considerando $\{\zeta_i\}_i$ la partición de la unidad asociada al cubrimiento $\{V_i\}_{i=0}^\infty$ estas cumplen lo siguiente

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta_i \leq 1, & \zeta_i \in C_c^\infty(V_i) \\ \sum_{i=0}^\infty \zeta_i = 1, & U \end{cases}$$

sea $u \in W^{1,p}(U)$, por el Teorema 2.13 propiedad (iv) se cumple que $\zeta_i u \in W^{1,p}(U)$ y $\operatorname{sop}(\zeta_i u) \subset V_i$.

Consideremos ahora $\delta > 0$ arbitrario y elegimos $\varepsilon_i > 0$ lo suficientemente chico de modo que $u^i := \eta_{\varepsilon_i} * (\zeta_i u)$ satisface

$$\begin{cases} \|u^i - u\|_{W^{1,p}(U)} \leq \frac{\delta}{2^{i+1}} & (i = 1, 2, \dots) \\ \operatorname{sop}(u^i) \subset W_i & (i = 1, 2, \dots) \end{cases} \tag{2.2}$$

para $W_i := U_{i+4} \setminus \bar{U}_i \supset V_i$ $(i = 1, 2, \dots)$.

Por otro lado escribimos $v = \sum_{i=0}^{\infty} u^i$, esta función así definida corresponde a $C^\infty(U)$ ya que por cada conjunto abierto $V \subset\subset U$ la suma anterior que define a la función v es una suma finita, tenemos entonces

$$\|v - u\|_{W^{1,p}(V)} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|u^i - \zeta_i u\|_{W^{1,p}(U)} \leq \delta \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \delta$$

en la última desigualdad se usó (2.2), como el conjunto V era arbitrario tomando ahora supremo a ambos en la última desigualdad sobre los $V \subset\subset U$ se llega a $\|v-u\|_{W^{1,p}(U)} \leq \delta$ probando así el teorema. $\square$

Si deseamos conseguir la aproximación por funciones regulares hasta el borde, es necesario asumir cierta regularidad de la frontera de U. Daremos un teorema, que no es el más general posible, pero que será suficiente para lo que sigue en esta tesis.

Definición 2.20. Decimos que el $\partial\Omega$ es de clase C^k si por cada punto $x_0 \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ y una función $\gamma : R^{N-1} \to \mathbb{R}$ de clase C^k tal que (salvo reetiquetado y reorientación de los ejes coordenados si es necesario)

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) \colon x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{N-1})\}.$$

Decimos también que $\partial\Omega$ es de clase C^∞ si $\partial\Omega$ es de clase C^k para $k = 1, 2, \ldots,$ y $\partial\Omega$ es analítico si la función γ es analítica.

Teorema 2.21. *Si $U \subset \mathbb{R}^N$ es acotado y asumimos que ∂U es de clase C^1 entonces si $u \in W^{1,p}(U)$ y $1 \leq p < \infty$ existe una sucesión $\{u_m\}_m \in C^\infty(\bar{U})$ tal que*

$$\|u_m - u\|_{W^{1,p}(U)} \to 0 \quad si \quad m \to \infty.$$

Demostración. Sea $x_0 \in \partial U$, como ∂U es de clase C^1 por la Definición 2.20 existe un número $r > 0$ y una función $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$U \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) \colon x_N > \gamma(x_1, \ldots, x_{N-1})\}.$$

Definimos el conjunto $V := U \cap B(x_0, r/2)$ y el punto desplazado $x^\varepsilon := x + \lambda\varepsilon e_N$ para $x \in V$ y $\varepsilon > 0$. Considerando λ suficientemente grande la bola $B(x^\varepsilon, \varepsilon)$ queda dentro de $U \cap B(x_0, r)$ para todo $x \in V$ y ε pequeño.

Definimos ahora $u_\varepsilon(x) := u(x^\varepsilon)$ para $x \in V$ y $v_\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$, con esta definición de v_ε se cumple que $v_\varepsilon \in C^\infty(\bar{V})$.

Ahora afirmamos que

$$\|v_\varepsilon - u\|_{W^{1,p}(V)} \to 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0 \tag{2.3}$$

para ver esto consideramos $|\alpha| \leq 1$ entonces

$$\|D^\alpha v_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \leq \|D^\alpha v_\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}.$$

Teniendo en cuenta que la translación $u \to u_\varepsilon$ es continua en la norma L^p el segundo término al lado derecho en la desigualdad anterior tiende a cero si $\varepsilon \to 0$ y el primer término se va a cero por un razonamiento similar al hecho en la demostración del Teorema 2.16, queda demostrado de esta forma (2.3).

Sea ahora $\delta > 0$, al ser ∂U compacto se pueden seleccionar una cantidad finita de puntos $x_0^i \in \partial U$, radios $r_i > 0$, correspondientes conjuntos $V_i = U \cap B(x_0^i, r_i)$ y funciones $v_i \in C^\infty(\bar{V}_0)$ $(i = 1, \ldots, n)$ tal que $\partial U \subset \cup_{i=1}^n B(x_0^i, r_i/2)$ satisfaciendo

$$\|v_i - u\|_{W^{1,P}(V_i)} \leq \delta \tag{2.4}$$

esto último por (2.3).

Tomando ahora un conjunto abierto $V_0 \subset\subset U$ tal que $U \subseteq \cup_{i=0}^n V_i$, usando el Teorema 2.16 existe una función $v_0 \in C^\infty(\bar{V}_0)$ satisfaciendo

$$\|v_0 - u\|_{W^{1,p}(V_0)} \leq \delta. \tag{2.5}$$

Ahora considerando $\{\zeta_i\}_{i=0}^n$ la partición de la unidad asociada a $\{V_i\}_{i=0}^n$ definimos la función $v := \sum_{i=0}^n \zeta_i v_i$, de acuerdo a esta definición de la función v se cumple que $v \in C^\infty(\bar{U})$, como además $u = \sum_{i=0}^n \zeta_i u$ usando (2.4), (2.5) y el Teorema 2.13 se obtiene

$$\|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(U)} \leq \sum_{i=0}^n \|D^\alpha(\zeta_i v_i) - D^\alpha(\zeta_i u)\|_{L^p(V_i)} \leq CN\delta$$

probando así el teorema. □

2.6. Extensión

En esta sección enunciamos un teorema que permite extender funciones del espacio $W^{1,p}(U)$ para convertirlas en funciones de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, esto se debe hacer cuidadosamente si por ejemplo se extiende una función para que valga cero en $\mathbb{R}^N \setminus U$ se puede generar una discontinuidad tan mala sobre ∂U de modo tal que pierda derivada débil, el siguiente teorema dice como puede hacerse tal extensión adecuadamente.

Teorema 2.22. *Sea $1 \leq p \leq \infty$, $U \subset \mathbb{R}^N$ acotado y con ∂U de clase C^1. Si V es un conjunto acotado que cumple $U \subset\subset V$ entonces existe un operador lineal acotado $E : W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ de modo tal que para cada $u \in W^{1,p}(U)$ se cumple que:*

1. *$Eu = u$ casi en todo punto de U.*

2. *Eu tiene soporte dentro de V.*

3. *$\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$, donde la constante C depende solo de p, U y V.*

Se dice que Eu es una extensión de u a $\mathbb{R}^N$.

Demostración. Fijamos $x^0 \in \partial U$ y suponemos primero que

$$\partial U \text{ es plano cerca de } x^0 \text{ contenida en el plano } \{x_N = 0\}.$$

Podemos asumir entonces que existe un bola abierta B con centro en x^0 y radio r, tal que

$$\begin{cases} B^+ := B \cap \{x_N \geq 0\} \subset \bar{U} \\ B^- := B \cap \{x_N \leq 0\} \subset \mathbb{R}^N - U. \end{cases}$$

Asumimos por el momento que $u \in C^\infty(\bar{U})$, definimos entonces

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in B^+ \\ -3u(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N) & \text{si } x \in B^-. \end{cases} \tag{2.6}$$

Esta función $\bar{u}$ es llamada función de reflección de alto orden de B^+ en B^-.

Afirmamos ahora que

$$\bar{u} \in C^1(B). \tag{2.7}$$

En efecto escribimos $u^- := \bar{u}|_{B^-}$, $u^+ := \bar{u}|_{B^+}$. Demostramos primero que

$$u^-_{x_N} = u^+_{x_N} \text{ en } \{x_N = 0\}. \tag{2.8}$$

De acuerdo a (2.6) tenemos

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_N}(x) = 3\frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_N) - 2\frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_{N-1}, -\frac{x_N}{2})$$

y así

$$u^-_{x_N}|_{\{x_N=0\}} = u^+_{x_N}|_{\{x_N=0\}},$$

esto prueba (2.8). Ahora ya que $u^+ = u^-$ sobre $\{x_n = 0\}$ podemos ver que

$$u^-_{x_i}|_{\{x_N=0\}} = u^+_{x_i}|_{\{x_N=0\}} \tag{2.9}$$

para $i = 1, \cdots, N-1$. Pero (2.8) y (2.9) implican que

$$D^\alpha u^-|_{\{x_N=0\}} = D^\alpha u^+|_{\{x_N=0\}}$$

para cada $|\alpha| \leq 1$ y así queda demostrado (2.7). Usando ahora los cálculos hechos hasta ahora podemos ver facilmente que

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}, \tag{2.10}$$

para alguna constante C que no depende de la función u.

Consideramos ahora la situación en que la frontera ∂U no es necesariamente plana cerca del punto x^0. Usamos ahora el mapeo Φ con inversa Ψ que existe por las asumpciones de suavidad hechas sobre el dominio U, de este modo Φ “endereza”el borde ∂U cerca del punto x^0.

Escribimos ahora $y = \Phi(x), x = \Psi(y), u'(y) := u(\Psi(y))$ y elegimos una bola B como antes, de esta forma utilizando los pasos anteriores podemos extender la función u' de B^+ a una función $\bar{u}'$ sobre toda la bola B de manera que $\bar{u}' \in C^1$, teniendo además la siguiente estimación

$$\|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\|u'\|_{W^{1,p}(B^+)}.$$

Considerando $W = \Psi(B)$ y el cambio de variables $y = \Phi(x)$ obtenemos una extensión $\bar{u}$ de la función u sobre W con la estimación

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}. \tag{2.11}$$

Ya que ∂U es compacto existe un número finito de: $x_i^0 \in \partial U$, conjuntos abiertos W_i y extensiones $\bar{u}_i$ de u a W_i $(i = 1, \ldots, n)$, como se describió recién de modo que $\Gamma \subset \cup_{i=1}^n W_i$. Considerando un conjunto $W_0 \subset\subset U$ de modo que $U \subset \cup_{i=0}^n W_i$ y tomando $\{\zeta_i\}_{i=0}^n$ la partición de la unidad asociada escribimos $\bar{u} := \sum_{i=0}^n \zeta_i \bar{u}_i$, donde $\bar{u}_0 = u$, usando la estimación (2.11) (con u_i en lugar de u, $\bar{u}_i$ en lugar de $\bar{u}$) obtenemos la siguiente cota

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)} \tag{2.12}$$

para alguna constante C dependiendo de u, p y N, pero no de u. Además podemos hacer que el soporte de $\bar{u}$ quede dentro de $V \supset\supset U$.

Escribimos de aquí en adelante $Eu := \bar{u}$ y observamos que le mapeo $u \to Eu$ es lineal.

Recordamos que en la construcción hecha hasta aquí hemos asumido que $u \in C^\infty(\bar{U})$.

Supongamos ahora que $u \in W^{1,p}(U)$, la estimada (2.12) y la linealidad de E implican que

$$\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)}.$$

De esta forma la sucesión $\{Eu_m\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto converge a $\bar{u} := Eu$. Esta extensión la cual no depende de la opción particular de la de la sucesión aproximante $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ satsiface las conclusiones del teorema. $\square$

2.7. Teorema de inmersión

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema de inmersión compacta de Rellich-Kondrachov que utilizaremos mas adelante en el capítulo 5, pero para esto necesitaremos algunos resultados previos.

Teorema 2.23 (Desigualdad de interpolación). *Sea (E, Σ, μ) un espacio de medida, $u \in L^p(d\mu) \cap L^q(d\mu)$ con $1 \leq p < q < \infty$ y r es tal que $p \leq r < q$, entonces*

$$\|u\|_{L^r(d\mu)} \leq \|u\|_{L^p(d\mu)}^\alpha \|u\|_{L^q(d\mu)}^{1-\alpha}$$

donde $0 < \alpha \leq 1$ y $\alpha = p(q-r)/r(q-p)$.

Demostración. Se cumple que $1/q < 1/r \leq 1/p$, por lo tanto existe $0 < \alpha \leq 1$ tal que $1/r = (1-\alpha)1/q + \alpha 1/p$, considerando $p_1 = q/(r(1-\alpha))$ y $p_2 = p/(r\alpha)$ se tiene que $1/p_1 + 1/p_2 = 1$. Aplicando desigualdad de Hölder tenemos que

$$\int_E |u|^r \, d\mu = \int_E |u|^{r(1-\alpha)} |u|^{r\alpha} \, d\mu \leq \left\{ \int_E |u|^q \, d\mu \right\}^{r(1-\alpha)/q} \left\{ \int_E |u|^p \, d\mu \right\}^{r\alpha/p}. \tag{2.13}$$

Elevando a la $1/r$ a ambos lados en (2.13) queda

$$\|u\|_{L^r(d\mu)} \leq \|u\|_{L^q(d\mu)}^{1-\alpha} \|u\|_{L^p(d\mu)}^{\alpha}.$$

Por otro lado despejando α en $1/r = (1-\alpha)1/q + \alpha 1/p$ queda $\alpha = p(q-r)/r(q-p)$. De esta forma $\alpha > 0$. □

Teorema 2.24 (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Sea $1 \leq p < N$ entonces existe una constante C dependiente solo de p y N tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$$

donde $p^* = Np/(N-p)$.

Demostración. Se supone primero $p = 1$, ya que u tiene soporte compacto para cada $i = 1, \dots, N$ y $x \in \mathbb{R}^N$ tenemos que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_N) \, dy_i$$

y así

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_N)| \, dy_i \quad (i = 1, \dots, N)$$

en consecuencia

$$|u|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_N)| \, dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Integrando la última desigualdad a ambos lados con respecto a x_1 obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{N}{N-1}} \, dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_1 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_1 \qquad (2.14) \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \left(\prod_{i=2}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dx_1 \, dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}} \end{aligned}$$

en la última desigualdad se utilizo la desigualdad de Hölder generalizada, integrando ahora la desigualdad (2.14) respecto de x_2 tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{N}{N-1}}\, dx_1\, dx_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx_1\, dy_2\right)^{\frac{1}{N-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{N} I_i^{\frac{1}{N-1}}\, dx_2$$

donde $I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy_1$ y $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx_1\, dy_i$ para $(i = 3, \ldots, N)$. Aplicando una vez más la desigualdad de Hölder extendida encontramos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{N}{N-1}}\, dx_1\, dx_2 \leq &\left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx_1\, dy_2\right)^{\frac{1}{N-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy_1\, dx_2\right)^{\frac{1}{N-1}}\\ &\prod_{i=3}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx_1\, dx_2\, dy_i\right)^{\frac{1}{N-1}}.\end{aligned}$$

Continuamos integrando respecto de $x_3, \ldots, x_N$ para encontrar

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{N}{N-1}}\, dx &\leq \prod_{i=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx_1 \ldots dy_i \ldots dx_N\right)^{\frac{1}{N-1}}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |Du|\, dx\right)^{\frac{1}{N-1}}\end{aligned} \tag{2.15}$$

y de esta forma se prueba el resultado para $p = 1$.

Consideramos ahora el caso $1 < p < N$, aplicando la estimación (2.15) a la función $v := |u|^{\gamma}$ (donde $\gamma > 1$ será escogida adecuadamente) tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{\gamma N}{N-1}}\, dx\right)^{\frac{N-1}{N}} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |D|u|^{\gamma}|\, dx = \gamma\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\gamma-1}|Du|\, dx\\ &\leq \gamma\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |Du|^p\, dx\right)\end{aligned} \tag{2.16}$$

ahora elegimos γ de modo tal que $\gamma n/(N-1) = (\gamma-1)p/(p-1)$ despejando obtenemos $\gamma = p(N-1)/(N-p) > 1$ y asi $\gamma N/(N-1) = (\gamma-1)p/(p-1) = Np/(N-p) = p^*$ usando este valor de γ en (2.16) se llega a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\, dx\right)^{1/p^*} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |Du|^p\, dx\right)^{1/p}$$

□

Corolario 2.25. *La desigualdad de Gagliardo–Nirenberg–Sobolev es válida para cualquier función $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. En efecto, si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ existe $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Luego, por Gagliardo–Nirenberg–Sobolev, sigue que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.

Sea $v \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to v$ en $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Pero como $u_n \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$, se tiene (pasando a una subsucesión), que $u_n \to u$ c.t.p. y $u_n \to v$ c.t.p.

Luego $u = v$. Finalmente, como por Gagliardo–Nirenberg–Sobolev se tiene

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

pasando al límite $n \to \infty$ se concluye lo deseado. □

Demostraremos ahora el teorema de inmersión de Sobolev que afirma que una función en $W^{1,p}(U)$ es más integrable que lo esperado a priori.

Teorema 2.26. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado con ∂U de clase C^1, asumimos $1 \leq p < N$, entonces*

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}, \quad u \in W^{1,p}(U) \tag{2.17}$$

donde $p^* = Np/(N-p)$ y la constante C depende solo de p, N y U.

Demostración. Sea $u \in W^{1,p}(U)$, por el Teorema de extensión 2.22 existe una extensión $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\bar{u} = u \text{ en } U \text{ y } \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)} \tag{2.18}$$

donde la función extendida $\bar{u}$ tiene soporte compacto.

Ahora, por la desigualdad de Gagliardo–Nirenberg–Sobolev, tenemos que

$$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla \bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Luego,

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq \|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla \bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

como queríamos demostrar. □

Ahora terminamos esta sección con el importante teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov

Teorema 2.27 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado, ∂U de clase C^1 y $1 \leq p < N$ entonces se cumple que $W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$ para cada $1 \leq q < p^*$, donde $p^* = \frac{Np}{N-p}$ es el exponente crítico.*

Demostración. Sea $1 \leq q < p^*$, usando el hecho de que U es acotado y la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\int_U |u|^q\,dx \leq |U|^{1/(p^*/q)'} \left\{\int_U |u|^{p^*}\,dx\right\}^{q/p^*} = |U|^{1/(p^*/q)'}\|u\|^q_{L^{p^*}(U)}$$

de donde sacamos que $\|u\|_{L^q(U)} \le |U|^{1/q(p^*/q)'}\|u\|_{L^{p^*}(U)}$ y usando el Teorema 2.26 tenemos que

$$\|u\|_{L^q(U)} \le C|U|^{1/q(p^*/q)'}\|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

por lo tanto $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$ para $1 \le q < p^*$.

Vamos a probar ahora la compacidad de la inmersión, supongamos entonces una sucesión $\{u_m\}_m \in W^{1,p}(U)$ que esta uniformemente acotada, es decir

$$\|u_m\|_{W^{1,p}(U)} \le C \quad \forall m$$

tenemos que mostrar entonces que existe una subsucesión $\{u_{m_j}\}_j$ que converge en $L^q(U)$. Por el Teorema de extensión 2.22 podemos suponer que $U = \mathbb{R}^N$, que las funciones $\{u_m\}_m$ tienen todas soporte compacto en algún conjunto $V \subset \mathbb{R}^N$ y que

$$\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < \infty. \tag{2.19}$$

Vamos ahora a regularizar las funciones $\{u_m\}_m$ usando el núcleo regularizante η_ε dado por la Definición 2.15, tenemos entonces $u_m^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_m$ para $\varepsilon > 0$ y $m = 1, 2 \ldots$, podemos entonces también suponer que las funciones u_m^ε tiene soporte compacto en el conjunto V.

Primero probaremos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} = 0 \tag{2.20}$$

uniformemente en m, para probar esto hacemos usó de la suavidad de las funciones

$$\begin{aligned} u_m^\varepsilon - u_m &= \int_{B(0,1)} \eta(y)(u_m(x-\varepsilon y) - u_m(x))\,dy \\ &= \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \frac{d}{dt} u_m^\varepsilon(x-\varepsilon t y)\,dt\,dy \\ &= -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 Du_m^\varepsilon(x-\varepsilon t y) y\,dt\,dy \end{aligned}$$

de esta forma

$$\int_V |u_m^\varepsilon - u_m|\,dx \le \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_V |Du_m(x-\varepsilon t y)|\,dx\,dt\,dy \le \varepsilon \int_V |Du_m(z)|\,dz$$

por aproximación de funciones la estimación anterior se tiene también para funciones en $W^{1,p}(V)$. Teniendo en cuenta que el conjunto V es acotado y usando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)} \le \varepsilon\|Du_m\|_{L^1(V)} \le \varepsilon C\|Du_m\|_{L^p(V)}$$

usando ahora (2.19) en la última desigualdad tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)} = 0, \quad \forall m. \tag{2.21}$$

Teniendo en cuenta que $1 \leq q < p^*$ podemos usar la desigualdad de interpolación (2.23) para llegar a

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\alpha \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\alpha}$$

donde $\alpha = (p^* - q)/q(p^* - 1)$ de esta forma $\alpha > 0$, usando ahora (2.19) llegamos a

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq C\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\alpha$$

usando ahora (2.21) en la última desigualdad obtenemos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} = 0, \quad \forall m$$

de esta forma queda demostrado (2.20).

Ahora con la idea de usar mas adelante el teorema de Arzela-Ascoli, vamos a demostrar entonces que por cada $\varepsilon > 0$ la sucesión $\{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$ es uniformemente acotada y equicontinua, en efecto sea $x \in \mathbb{R}^N$ entonces

$$|u_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|u_m(y)|\, dy \leq \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u_m^\varepsilon\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^N} < \infty$$

para $m = 1, 2, \ldots$, esto último muestra que la sucesión $\{u_m^\varepsilon\}_m$ es uniformemente acotada. Por otro lado

$$|Du_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} |D\eta_\varepsilon(x-y)||u_m(y)|\, dy \leq \|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^{N+1}} < \infty$$

así que

$$|Du_m^\varepsilon(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon^{N+1}} < \infty$$

y esta última desigualdad dice que la sucesión $\{u_m^\varepsilon\}_m$ es equicontinua.

Ahora dado $\delta > 0$ arbitrario vamos a demostrar que

$$\limsup_{j,k \to 0} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta \tag{2.22}$$

para ver esto usamos (2.20) con ε pequeño de modo que

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \delta/2 \quad para \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2.23}$$

Observamos que las funciones u_m^ε y u_m tienen soporte compacto en algún conjunto $V \subset \mathbb{R}N$, podemos usar el teorema de Arzela-Ascoli para obtener una subsecuencia $\{u_{m_j}^\varepsilon\}_{j=1}^\infty \subset \{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$ la cual converge uniformemente sobre V, en particular tenemos que

$$\limsup_{j,k \to \infty} \|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon\|_{L^q(V)} \tag{2.24}$$

usando (2.23) y (2.24) obtenemos

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta$$

de esta forma probamos (2.22), usamos ahora (2.22) con $\delta = 1, 1/2, \ldots$ para encontrar una subsecuencia $\{u_{m_j}\}_j \subset \{u_m\}_m$ de modo que

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} = 0$$

a su vez esto último dice que $\lim_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} = 0$, por lo tanto esta subsucesión es de Cauchy en $L^q(V)$ y por lo tanto convergente. □

2.8. Teorema de Trazas

Asumiendo $U \subset \mathbb{R}^N$ acotado y de clase C^1 en esta sección mostramos que $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(\partial U)$ para $1 \leq q \leq p_*$ donde $p_* = (N-1)p/(N-p)$ y que esta inmersión es compacta para $1 \leq q < p_*$. Primero comenzaremos enunciando una variante de la desigualdad de Gagliardo-Niremberg-Sobolev y una versión del teorema de trazas que involucra el exponente crítico p_* antes mencionado.

Teorema 2.28. *Sea $1 \leq p < N$ entonces existe una constante C dependiente solo de p y N tal que*

$$\|u\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)} \quad \forall u \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$$

donde $p_* = (N-1)p/(N-p)$.

Demostración. Sea $u \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$ arbitraria, considerando $x' = (x_1, \ldots, x_{N-1})$ entonces

$$u(x', 0) = -\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t)\, dt$$

por lo tanto

$$|u(x', 0)| \leq \int_0^\infty |\nabla u(x', t)|\, dt$$

tomando entonces integral respecto de x' a ambos lados en la última desigualdad queda

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x', 0)|\, dx' \leq \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u(x)|\, dx. \tag{2.25}$$

Aplicando ahora la desigualdad (2.25) a la función $|u|^\gamma$ (donde el parámetro γ sera ajustado adecuadamente después) y la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u|^\gamma\, dx' \leq \int_{\mathbb{R}^N_+} \gamma |u|^{\gamma-1} |\nabla u|\, dx \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u|^p\, dx \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |u|^{(\gamma-1)p'}\, dx \right)^{1/p'}$$

ahora ajustamos el parámetro γ de modo que $(\gamma-1)p' = p^*$ y así resulta $\gamma = p_*$ quedando entonces

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u|^{p_*}\,dx' \leq p^* \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |u|^{p^*}\,dx\right)^{1/p'}. \tag{2.26}$$

Aplicando ahora el Teorema 2.24 a $(\int_{\mathbb{R}^N_+} |u|^{p^*}\,dx)^{1/p'}$ nos queda

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |u|^{p^*}\,dx\right)^{1/p'} = \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |u|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{p^*}{p^*p'}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{p^*}{pp'}} \tag{2.27}$$

poniendo ahora (2.27) en (2.26) se llega a

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u|^{p_*}\,dx' \leq p^* \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}(1+\frac{p^*}{pp'})}.$$

Como $1 + \frac{p^*}{pp'} = 1 + \frac{Np}{N-p}\frac{p-1}{p} = \frac{(N-1)p}{N-p} = p_*$ la última desigualdad se convierte en

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u|^{p_*}\,dx' \leq p^* \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{p_*}{p}} \tag{2.28}$$

por último elevando a la $1/p_*$ a ambos lados de (2.28) llegamos a

$$\|u\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \frac{Np}{N-p}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Queda entonces demostrado el teorema. □

Teorema 2.29. *Sea $1 \leq p < \infty$ asumiendo $U \subseteq \mathbb{R}^N$ conjunto acotado y ∂U de clase C^1 entonces existe un operador lineal acotado*

$$T : W^{1,p}(U) \to L^{p_*}(\partial U)$$

donde $p_* = (N-1)p/(N-p)$ tal que

1. *$Tu = u|_{\partial U}$ si $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$.*

2. *$\|Tu\|_{L^{p_*}(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$ para cada $u \in W^{1,p}(U)$, con la constante C dependiente solo de p y de U.*

Demostración. Se supone primero $u \in C^1(\bar{U})$. Sea $x_0 \in \partial U$, suponemos también que cerca de x_0 la frontera ∂U es plana, podemos entonces asumir que existe una bola B con centro en x_0 de modo que los conjuntos $B^+ = B \cap \{x_N \geq 0\}$ y $B^- = B \cap \{x_N \leq 0\}$ cumplen que $B^+ \subset \bar{U}$ y $B^- \subset \mathbb{R}^N \setminus U$, se define la bola $\hat{B} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leq r/2\}$, considerando una función $\zeta \in C_c^\infty(B)$ con $\zeta \geq 0$ en B y $\zeta = 1$ en $\hat{B}$ usando el Teorema 2.28 aplicado a la función ζu y la suavidad de ζ tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma |u|^{p_*}\,dx' &\leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\zeta u|^{p_*}\,dx' \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla(\zeta u)|^p\,dx\right)^{\frac{p_*}{p}} \\
&= C\left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |(\nabla\zeta)u + (\nabla u)\zeta)|^p\,dx\right)^{\frac{p_*}{p}} \\
&= C\left(\int_{B^+} |(\nabla\zeta)u + (\nabla u)\zeta)|^p\,dx\right)^{\frac{p_*}{p}} \\
&\leq C\left(\int_{B^+} |u|^p + |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{p_*}{p}}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

donde Γ es la porción de ∂U contenida dentro de $\hat{B}$ y $x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1} = \{x_N = 0\}$.

Si cerca del punto x_0 la frontera no es plana hacemos el alisamiento cercano al punto x_0 de la siguiente forma: por ser ∂U de clase C^1 existe un difeomorfismo $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ y un número $r > 0$ de modo que $V = U \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) : x_N > \gamma(x')\}$ a partir de esto definimos los siguientes mapeos

$$\begin{cases} y_i = x_i := \Phi^i(x) & i = 1, \ldots, N-1 \\ y_N = x_N - \gamma(x') := \Phi^N(x) \end{cases} \tag{2.30}$$

y

$$\begin{cases} x_i = y_i := \Psi^i(x) & i = 1, \ldots, N-1 \\ x_N = y_N + \gamma(y') := \Psi^N(y) \end{cases} \tag{2.31}$$

de esta forma $y = \Phi(x)$ y $x = \Psi(y) = \Phi^{-1}(y)$, poniendo ahora el cambio $x = \Phi(y)$ $(\det(D\Phi) = \det(D\Psi) = 1)$ y usando (2.29) se llega a

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma |u|^{p_*}\,dx' = \int_{\Phi(\Gamma)} |u\circ\Psi|^{p_*}\,dy' &\leq C\left(\int_{\Phi(V)} |u\circ\Psi|^p + |\nabla(u\circ\Psi)|^p\,dy\right)^{\frac{p_*}{p}} \\
&= C\left(\int_V |u|^p + |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{p_*}{p}} \\
&\leq C\left(\int_U |u|^p + |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{p_*}{p}}.
\end{aligned}$$

Usando ahora que el borde ∂U es compacto existen finitos puntos $x_0^i \in \partial U$ y conjuntos abiertos asociados $\Gamma_i \subset \partial U$ $(i = 1, \ldots, n)$ tal que $\partial U = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$, se llega a

$$\|u\|_{L^{p_*}(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}. \tag{2.32}$$

Luego, definiendo ahora $Tu := u|_{\partial U}$ y usando (2.32) se obtiene

$$\|Tu\|_{L^{p_*}(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)} \tag{2.33}$$

donde la constante no tiene dependencia de la función u.

Hasta ahora hemos considerado $u \in C^1(\bar{U})$, supongamos ahora que $u \in W^{1,p}(U)$, por la regularidad asumida sobre el dominio existe una sucesión $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de clase $C^\infty(\bar{U})$ de modo que $\|u_m - u\|_{W^{1,p}(U)} \to 0$ si $m \to \infty$ esto último junto con (2.33) dicen que la sucesión $\{Tu_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^p(\partial U)$ definimos entonces

$$Tu := \lim_{m\to\infty} Tu_m$$

donde el límite esta tomado en $L^{p_*}(\partial U)$, como además por (2.33) se tiene

$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^{p_*}(\partial U)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)} \tag{2.34}$$

el operador Tu esta bien definido. Si $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$ por la construcción de las u_m hecha en el Teorema 2.21 las u_m convergen uniformemente a la función u sobre $\bar{U}$ por lo tanto $Tu = u|_{\partial U}$. □

Con todos los resultados previos a mano podemos enunciar el teorema de inclusión compacta de trazas.

Teorema 2.30 (Inmersión). *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^N$ acotado y de clase $C^1(U)$ entonces $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(\partial U)$ para todo q con $1 \leq q \leq p_* = \frac{(N-1)p}{N-p}$, más aún si $q < p_*$ la inmersión es compacta.*

Demostración. Dada $u \in W^{1,p}(U)$ probamos primero que existe constante C (independiente de u) tal que $\|u\|_{L^1(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$, en efecto aplicando la desigualdad Hölder y teniendo en cuenta que el dominio U es acotado se tiene

$$\int_{\partial U} |u|\, dS \leq |\partial U|^{1/p'_*} \left\{ \int_{\partial U} |u|^{p_*}\, dS \right\}^{1/p_*}. \tag{2.35}$$

En consecuencia, del Teorema 2.29, concluimos que

$$\|u\|_{L^1(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}. \tag{2.36}$$

Consideramos ahora $1 \leq q < p_*$, usando el Teorema 2.23 tenemos que $\|u\|_{L^q(\partial U)} \leq \|u\|^{\alpha}_{L^1(\partial U)}\|u\|^{1-\alpha}_{L^*(\partial U)}$, por uso de (2.36) y nuevamente el Teorema 2.29 se tiene que

$$\|u\|_{L^q(\partial U)} \leq C\|u\|^{\alpha}_{W^{1,p}(U)}\|u\|^{1-\alpha}_{W^{1,p}(U)} = C\|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Esto último prueba la inmersión $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(\partial U)$ para $1 \leq q \leq p_*$.

Vamos a probar ahora la compacidad de la inmersión cuando $q < p_*$. Vamos a dividir la prueba en dos partes, primero demostraremos que $W^{1,p}(U) \subset\subset L^1(\partial U)$ y luego usaremos el Teorema 2.23 para probar que $W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(\partial U)$ para $1 \leq q < p^*$. Supongamos ahora que $\{u_m\}_m \in W^{1,p}(U)$ es una sucesión que cumple

$$\|u_m\|_{W^{1,p}(U)} \leq M, \quad \forall m. \tag{2.37}$$

Sea $\varepsilon_n > 0$ tal que $\varepsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y consideremos las funciones $u_m^{\varepsilon_n}$ como las obtenidas por el método de regularización del Teorema 2.16 a Eu_m donde E es el operador de extensión. Luego, por (2.35), se tiene

$$\|u_m^{\varepsilon_n} - u_m\|_{L^1(\partial U)} \leq C\|u_m^{\varepsilon_n} - u_m\|_{W^{1,p}(U)}. \tag{2.38}$$

Vamos a probar ahora las hipótesis del teorema de Arzela-Ascoli para la sucesión $\{u_m^{\varepsilon_n}\}_{m\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}|u_m^{\varepsilon_n}(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} \eta_{\varepsilon_n}(x-y)Eu_m(y)\,dy\right| \leq \|\eta_{\varepsilon_n}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|Eu_m\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\\ &\leq \|\eta_{\varepsilon_n}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_m\|_{W^{1,p}(U)} \leq \|\eta_{\varepsilon_n}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}M,\end{aligned}$$

donde hemos usado que Eu_m tiene soporte compacto, el Teorema de inmersión de Sobolev y el Teorema de extensión. Así

$$|u_m^{\varepsilon_n}(x)| \leq \|\eta_{\varepsilon_n}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}M. \tag{2.39}$$

Por (2.37) la constante M no depende de m y así el lado derecho en (2.39) es una constante que no depende de m.

Por otro lado, de manera análoga, se obtiene

$$\begin{aligned}|D_x u_m^{\varepsilon_n}(x)| &= \left|\int_{B_\varepsilon(x)} D_x\eta_\varepsilon(x-y)Eu_m(y)\,dy\right| \leq \int_{B_\varepsilon(x)} |D_x\eta_\varepsilon(x-y)||Eu_m(y)\,|dy\\ &\leq C\|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_m\|_{W^{1,p}(U)} \leq C\|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}M\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$|D_x u_m^{\varepsilon_n}(x)| \leq C\|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}M \tag{2.40}$$

La desigualdad (2.40) dice que la sucesión $\{u_m^{\varepsilon_n}\}_m$ es equicontinua. Por (2.39) y (2.40) vale entonces el Teorema de Arzela-Ascoli, existe por lo tanto una subsucesión $\{u_{m_k}^{\varepsilon_n}\}_k \subseteq \{u_m^{\varepsilon_n}\}_m$ tal que $|u_{m_k}^{\varepsilon_n}(x) - u_{m_j}^{\varepsilon_n}(x)| \to 0$ si $j, k \to \infty$ sobre compactos en $\mathbb{R}^N$, en particular sobre ∂U que es compacta, esto junto con el hecho de que $\{u_{m_k}^{\varepsilon_n}\}_k$ son $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ implica entonces

$$\|u_{m_k}^{\varepsilon_n} - u_{m_j}^{\varepsilon_n}\|_{L^1(\partial U)} \to 0 \quad si \quad j, k \to \infty. \tag{2.41}$$

Usando ahora (2.38) con $m = n = m_k$ despues con $m = n = m_j$ junto con (2.41) y la desigualdad triangular se llega a

$$\|u_{m_k} - u_{m_j}\|_{L^1(\partial U)} \to 0 \quad si \quad j, k \to \infty.$$

Se ha encontrado entonces una subsucesión de Cauchy en $L^1(\partial U)$, y como este espacio es completo es convergente, todo esto prueba que $W^{1,p}(U) \subset\subset L^1(\partial U)$.

Supongamos ahora que $1 \leq q < p^* = \frac{(N-1)p}{N-p}$, si $\|u_m\|_{W^{1,p}(U)} \leq M \ \forall m$ por lo anterior podemos encontrar una subsucesión $\{u_{m_k}\}_k$ de Cauchy en $L^1(\partial U)$ y por la desigualdad de interpolación 2.23 con $p = 1, r = q$ y $q = p^*$ se tiene que

$$\|u_{m_k} - u_{m_j}\|_{L^q(\partial U)} \leq \|u_{m_k} - u_{m_j}\|^{\alpha}_{L^1(\partial U)} \|u_{m_k} - u_{m_j}\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\partial U)}$$

donde $\alpha = (p^* - q)/q(p^* - 1)$ y $1 - \alpha = p^*(q-1)/q(p^* - 1)$ (al estar considerando $q < p^*$ sera $\alpha > 0$), como $\|u_{m_k} - u_{m_j}\|^{\alpha}_{L^1(\partial U)} \to 0$ si $j, k \to \infty$ y $\|u_{m_k} - u_{m_j}\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\partial U)} \leq C\|u_{m_k} - u_{m_j}\|^{1-\alpha}_{W^{1,p}(U)} \leq CM$, donde las constantes no dependen de j, k, tenemos entonces que

$$\|u_{m_k} - u_{m_j}\|_{L^q(\partial U)} \leq CM\|u_{m_k} - u_{m_j}\|^{\alpha}_{L^1(\partial U)}$$

al ser $\alpha > 0$ llegamos a que $\{u_{m_k}\}_k$ es de Cauchy en $L^q(\partial U)$ con $1 \leq q < p^*$ y al ser este completo esta subsucesión es convergente. Se ha probado entonces que

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(\partial U).$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Capítulo 3

$\Gamma-$ convergencia

El objeto de introducir el concepto de Γ-convergencia es analizar el comportamiento asintótico de sucesiones de problemas de mínimos, desde su introducción a principio de la década del 70 por el matemático italiano Ennio De Giorgi. El concepto de Γ-convergencia ha ganado un rol indiscutible en la noción de convergencia de problemas variacionales y también ha sido ampliamente usado fuera del campo del cálculo de variaciones y de las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales.

Para una referencia general sobre el tema, recomendamos el libro [3]. En este capítulo, sólo daremos las definiciones básicas y demostraremos aquellos resultados necesarios para esta tesis.

3.1. Definiciones

Daremos ahora la definición de $\Gamma-$convergencia, y haremos algunos comentarios.

Definición 3.1. Dada una sucesión de números $\{a_n\}_n$ se definen los límites superiores e inferiores como

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_k \sup_{n\geq k}\{a_n\} \tag{3.1}$$

y

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_k \inf_{n\geq k}\{a_n\} \tag{3.2}$$

respectivamente.

Observemos que siempre se tiene que $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$ y que el límite de la sucesión existe si y sólo si $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$

Teniendo en cuenta este concepto se puede definir la noción de semicontinuidad.

Definición 3.2. Sea X un espacio topológico. Una función $J\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ se dice secuencialmente semicontinua inferior en un punto $u \in X$ si por cada sucesión $u_n \to u$ se cumple que

$$J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n) \tag{3.3}$$

es decir

$$J(u) = \text{mín}\left\{\liminf_{n\to\infty} J(u_n) \colon u_n \to u\right\}.$$

Se dice que J es secuencialmente semicontinua inferior en X si es secuencialmente semicontinua inferior en u, $\forall u \in X$.

Observación 3.3. Usaremos comúnmente esta noción en el siguiente contexto. X es un espacio de Banach y la topología considerada es la topología débil. Luego, $J \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ es débilmente semicontinua inferior en un punto $u \in X$ si por cada sucesión $u_n \rightharpoonup u$ se cumple:

$$J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n). \tag{3.4}$$

Definición 3.4. Decimos que una sucesión de funciones, $J_n \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$, $\Gamma-$converge en X a la función $J \colon X \to \bar{R}$ si para todo $u \in X$ se cumple lo siguiente:

(i) (Desigualdad del límite inferior) para cada sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$ convergiendo a $u \in X$ se cumple:

$$J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J_n(u_n) \tag{3.5}$$

(ii) (Desigualdad del límite superior) existe una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$ con $u_n \to u$ de modo que:

$$\limsup_{n\to\infty} J_n(u_n) \leq J(u). \tag{3.6}$$

La función J es el $\Gamma-$límite de la sucesión $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y escribimos

$$\Gamma-\lim_{n\to\infty} J_n = J.$$

Observación 3.5. Observemos que si se tiene que $J_n \to J$ puntualmente, entonces automáticamente se verifica la desigualdad del límite superior. En efecto, basta entonces considerar la sucesión constante $u_n := u$, de donde

$$J(u) = \lim_{n\to\infty} J_n(u) = \limsup_{n\to\infty} J_n(u_n).$$

3.2. Convergencia de mínimos

En estas sección daremos condiciones para garantizar que los mínimos de una suceción de funciones J_n convergen al mínimo de la función límite J. La noción de $\Gamma-$convergencia juega un rol preponderante.

Teorema 3.6. *Sean* $J_n, J\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ *funciones tales que* $\Gamma\text{−}\lim_{n\to\infty} J_n = J$. *Asumamos que* $\inf_X J_n, \inf_X J > -\infty$ *y que existe un compacto* $K \subset X$ *tal que* $\inf_X J_n = \inf_K J_n$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \inf_X J_n = \inf_X J.$$

Más aún, si $u_n \in X$ *verifica que* $J_n(u_n) = \inf_X J_n + o(1)$ *y existe* $u_0 \in X$ *tal que* $u_n \to u_0$, *entonces* $J(u_0) = \inf_X J$.

Demostración. Sea $u_n \in X$ tal que $J_n(u_n) = \inf_X J_n + o(1)$. Observemos que tales u_n existen, pues $\inf_X J_n > -\infty$.

Más aún, como $\inf_X J_n = \inf_K J_n$, podemos suponer que los puntos u_n pertenecen al compacto K.

Existe entonces un punto $u_0 \in X$ y una subsucesión de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (que seguimos notando por $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$), tales que $u_n \to u_0$. Ahora, por la desigualdad del $\liminf$, se tiene que

$$\inf_X J \leq J(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} J_n(u_n) = \liminf_{n\to\infty} \inf_X J_n.$$

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ existe $u_\varepsilon \in X$ tal que $J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon$ (tal u_ε existe pues $\inf_X J > -\infty$). Por la desigualdad del $\limsup$, existe $u_n \in X$ tal que $u_n \to u_\varepsilon$ y

$$\limsup_{n\to\infty} J_n(u_n) \leq J(u_\varepsilon).$$

Pero entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \inf_X J_n \leq \limsup_{n\to\infty} J_n(u_n) \leq J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

Haciendo $\varepsilon \downarrow 0$ se concluye lo pedido.

Finalmente, si $u_n \in X$ verifican que $J_n(u_n) = \inf_X J_n + o(1)$ y existe $u_0 \in X$ tal que $u_n \to u_0$, entonces, por la desigualdad del $\liminf$,

$$J(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} J_n(u_n) = \inf_X J,$$

de donde se concluye el Teorema. □

Lema 3.7. *Sea* E *un espacio de Banach reflexivo,* $X \subset E$ *un conjunto débil cerrado y* $J\colon X \to \mathbb{R}$ *un funcional que satisface las siguientes condiciones:*

- $J(u) \to \infty$ *si* $\|u\| \to \infty$ *(coercividad).*
- J *es débil semicontinua inferior, es decir* $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geq J(u)$.

Entonces existe $u_0 \in X$ *tal que* $\inf_X J = J(u_0)$.

Demostración. La condición de coercividad y la semicontinuidad débil inferior implican que $\inf_X J > -\infty$. En efecto, por la coercividad, existe $R > 0$ tal que $J(u) \geq 0$ si $\|u\| \geq R$. Por otro lado, si existe $u_n \in B_R(0) \subset X$ tal que $J(u_n) \to -\infty$, entonces, como

$B_R(0)$ es débil compacto, existe u_0 y una subsucesión (que volvemos a llamar u_n) tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ y por la semicontinuidad inferior débil

$$-\infty < J(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n) = -\infty,$$

que es un absurdo.

Sea entonces $\{u_n\}_n \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_X J$. Usando nuevamente la condición de coercividad, se cumple que la sucesión u_n debe estar acotada.

Ahora, como X es un Banach reflexivo, existe una subsucesión (que volvemos a llamar u_n) y un punto $u_0 \in X$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$. Como J es debilmente semicontinua inferior se tiene que:

$$J(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_X J.$$

Esto termina la demostración. □

Con estos resultados podemos probar el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.8. *Sean $J_n, J\colon X \to \mathbb{R}$ débilmente semicontinuas inferiores tal que $\Gamma-\lim_{n\to\infty} J_n = J$ y*

$$J_n(u) \to \infty \quad \textit{cuando } \|u\| \to \infty \quad \textit{uniformemente en } n \textit{ (coercivas)} .$$

Entonces:

1. *existe $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$ sucesión de minimizantes de J_n, i.e. $\inf_X J_n = J_n(u_n)$.*
2. $\lim_{n\to\infty} \inf_X J_n = \inf_X J$.
3. *Todo punto de acumulación de una sucesión de ínfimos de J_n es un ínfimo de J.*

Demostración. El primer punto es una consecuencia inmediata del Lema 3.7.

Para demostrar el segundo y tercer punto, sólo debemos chequear las hipótesis del Teorema 3.6 y luego lo único que hace falta verificar es la existencia de un compacto $K \subset X$ para la topología débil de manera tal que

$$\inf_X J_n = \inf_K J_n.$$

Veamos primero que la sucesión $\{\inf_X J_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es acotada superiormente. En efecto, como $J_n \overset{\Gamma}{\to} J$, por la desigualdad del $\limsup$ tenemos que dado $u_0 \in X$ existe $u_n \in X$ tal que $u_n \to u_0$ y

$$\limsup_{n\to\infty} \inf_X J_n \leq \limsup_{n\to\infty} J_n(u_n) \leq J(u_0) < \infty,$$

de donde se desprende la afirmación.

Sea entonces $C > 0$ tal que $\sup_n \inf_X J_n < C$ y sea $R > 0$ tal que

$$J_n(u) > C \quad \text{para todo } \|u\| \geq R.$$

Luego, es fácil ver que

$$\inf_X J_n = \inf_{B_R(0)} J_n.$$

Basta entonces tomar $K = B_R(0)$ que resulta débil compacta dado que X es reflexivo. □

Observación 3.9. Para chequear la condición de uniforme coercividad, es usual buscar una función $\phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$ que verifique

$$J_n(u) \geq \phi(\|u\|).$$

En general, dicha función ϕ es de la forma

$$\phi(r) = \alpha r^p - \beta,$$

con $\alpha, p > 0$, $\beta \geq 0$ independientes de n.

3.3. Espacios variables

En ocasiones los funcionales con los que se trabaja no se encuentran definidos todos en el mismo espacio. Sin embargo, la pregunta de si los mínimos convergen o no sigue siendo relevante.

Para poder aplicar las mismas técnicas del capítulo a la convergencia de los mínimos es necesario pedir que los espacios sobre los que están definidos las funcionales convergan a un espacio límite en algún sentido. Ese es el objetivo de la siguiente definición.

Definición 3.10. Sea E un espacio topológico y sean $X_j, X \subset E$ subespacios. Entonces decimos que X_j converge en el sentido de Mosco a X, y se nota por $X_j \overset{M}{\to} X$, si

1. dado $x \in X$ existe una subsucesión $\{X_{j_k}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y puntos $x_{j_k} \in X_{j_k}$ tales que $x_{j_k} \to x$ en E y
2. dados $x_j \in X_j$ tales que $x_j \to x$ en E se tiene que $x \in X$.

Observación 3.11. Se llama Mosco convergencia en honor al matemático italiano Umberto Mosco quien fue el que la desarrollo.

Si ahora tenemos una sucesión de funcionales $J_j\colon X_j \to \mathbb{R}$ y $J\colon X \to \mathbb{R}$ con los espacios $X_j \overset{M}{\to} X$ se define la noción de $\Gamma-$convergencia de manera análoga a la definición 3.4.

Definición 3.12. Sea E un espacio topológico y $X_j, X \subset E$ tales que $X_j \overset{M}{\to} X$. Sean $J_j\colon X_j \to \mathbb{R}$ y $J\colon X \to \mathbb{R}$. Decimos que J_j $\Gamma-$converge a J si

1. para toda sucesión $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ con $x_j \in X_j$ tal que $x_j \to x \in X$ se tiene que

$$J(x) \leq \liminf_{j\to\infty} J_j(x_j),$$

2. para todo $x \in X$ existe $x_{j_k} \in X_{j_k}$ tal que $x_{j_k} \to x$ y

$$J(x) \geq \limsup_{k\to\infty} J_{j_k}(x_{j_k}).$$

Observemos que en el caso en que los espacios sean siempre los mismos, $X_j = X$ para todo $j \in \mathbb{N}$, esta definición coincide con la definición 3.4.

Si bien esta definición permite trabajar de manera sencilla con funcionales definidos en espacios variables, no define genuinamente un nuevo concepto como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.13. *Sea E un espacio topológico y $X_j, X \subset E$ tales que $X_j \overset{M}{\to} X$. Sean $J_j\colon X_j \to \mathbb{R}$ y $J\colon X \to \mathbb{R}$. Definimos los funcionales $\bar{J}_j, \bar{J}\colon E \to \bar{\mathbb{R}}$ como*

$$\bar{J}_j(x) := \begin{cases} J_j(x) & si\ x \in X_j \\ \infty & si\ x \in E \setminus X_j \end{cases} \quad y \quad \bar{J}(x) := \begin{cases} J(x) & si\ x \in X \\ \infty & si\ x \in E \setminus X. \end{cases}$$

Entonces se tiene que $J_j \overset{\Gamma}{\to} J$ según la Definición 3.12 si y sólo si $\bar{J}_j \overset{\Gamma}{\to} \bar{J}$ según la Definición 3.4.

Demostración. Supongamos primero que $\bar{J}_j \overset{\Gamma}{\to} \bar{J}$ según la Definición 3.4. Tenemos que probar entonces que se cumple $J_j \overset{\Gamma}{\to} J$ según la definición 3.12.

Veamos primero que vale la desigualdad del límite inferior. Sea $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in X_j$ de modo que $x_j \to x \in X$, ya que $x \in X$ tenemos que $\bar{J}(x) = J(x)$ y como también $x_j \in X_j$ se tiene que $\bar{J}_j(x_j) = J_j(x_j)$. Usando ahora que se cumple la desigualdad del límite inferior en la Definición 3.4 tenemos que

$$\liminf_{j\to\infty} \bar{J}_j(x_j) \geq \bar{J}(x)$$

por esto último y las observaciones hechas anteriormente llegamos a

$$\liminf_{j\to\infty} J_j(x_j) \geq J(x)$$

y esto muestra que es válida la desigualad del límite inferior en la Definición 3.12. Veamos ahora que es válida la desigualdad del límite superior. Sea $x \in X \subset E$ (de esta forma $\bar{J}(x) = J(x)$), por la desigualdad del límite superior en la Definición 3.4 existe una sucesión $\{x_j\}_j \subset E$ tal que

$$\limsup_{j\to\infty} \bar{J}_j(x_j) \leq \bar{J}(x). \tag{3.7}$$

A partir de la sucesión anterior definimos el siguiente conjunto: $I = \{j_k\colon x_{j_k} \in X_{j_k}\}$ y suponemos primero que $I \neq \emptyset$, la definición del conjunto anterior da origen a la subsucesión $\{x_{j_k}\}_k \subset \{x_j\}_j$ y tenemos que

$$\limsup_{k\to\infty} J_{j_k}(x_{j_k}) = \limsup_{k\to\infty} \bar{J}_{j_k}(x_{j_k}) \leq \limsup_{j\to\infty} \bar{J}_j(x_j)$$

esto último junto con (3.7) nos da

$$\limsup_{k\to\infty} J_{j_k}(x_{j_k}) \leq \bar{J}(x) = J(x)$$

demostrando esto la desigualdad del límite superior en la Definición 3.12 en el caso $I \neq \emptyset$. Si $I = \emptyset$ entonces $\limsup_{j\to\infty} \bar{J}_j(x_j) = \infty$ y por (3.7) se tendría que $\bar{J}(x) = J(x) = \infty$. Tomando $\bar{x}_j = x$ se cumple que $\bar{x}_j \to x$ y se tiene en este caso que $\limsup_{j\to\infty} J_j(\bar{x}_j) \leq J(x)$. Hemos demostrado entonces que $J_j \xrightarrow{\Gamma} J$ según la Definición 3.12.

Ahora supongamos que $J_j \xrightarrow{\Gamma} J$ según la Definición 3.12, vamos a ver que $\bar{J}_j \xrightarrow{\Gamma} \bar{J}$ según la Definición 3.4. Probamos primero la desigualdad del límite inferior, sea entonces una sucesión $\{x_j\}_j \subset E$ de modo que $x_j \to x \in E$.

Consideramos nuevamente el conjunto asociado $I = \{j_k : x_{j_k} \in X_{j_k}\}$ y suponemos que $I \neq \emptyset$, teniendo en cuenta la definición de las $\bar{J}_j$ se tiene que $\inf_{j\geq l} \bar{J}_j(x_j) = \inf_{j_k \geq l} \bar{J}_{j_k}(x_{j_k})$ para l arbitrario y en consecuencia

$$\liminf_{j\to\infty} \bar{J}_j(x_j) = \liminf_{k\to\infty} \bar{J}_{j_k}(x_{j_k}) = \liminf_{k\to\infty} J_{j_k}(x_{j_k})$$

usando lo anterior y que $J_j \xrightarrow{\Gamma} J$ según la Definición 3.12 y la Mosco convergencia de los conjuntos llegamos a

$$\liminf_{j\to\infty} \bar{J}_j(x_j) \geq J(x) = \bar{J}(x).$$

En el caso $I = \emptyset$ se tendría que $\liminf_{j\to\infty} \bar{J}_j(x_j) = \infty \geq \bar{J}(x)$. Hemos demostrado así la desigualdad del límite inferior para la Definición 3.4.

Probamos por último la desigualdad del límite superior, sea $x \in E$. Si $x \in X$ existe por la Definición 3.12 una subsucesión $\{x_{j_k}\}_k$ con $x_{j_k} \in X_{j_k}$ y $x_{j_k} \to x$ tal que

$$\limsup_{k\to\infty} \bar{J}_{j_k}(x_{j_k}) = \limsup_{k\to\infty} J_{j_k}(x_{j_k}) \leq J(x) = \bar{J}(x).$$

Si $x \in E \setminus X$ entonces $\bar{J}(x) = \infty$ y tomando la sucesión $x_j = x$ se tiene que $x_j \to x$ y

$$\limsup_{j\to\infty} \bar{J}_j(x_j) \leq \bar{J}(x) = \infty.$$

Queda demostrada así la desigualdad del límite superior y la convergencia $\bar{J}_j \xrightarrow{\Gamma} \bar{J}$ según la definición 3.4. □

Como consecuencia inmediata de esta proposición, se tiene

Teorema 3.14. *Sea E un espacio topológico y $X_j, X \subset E$ subespacios tales que $X_j \xrightarrow{M} X$. Sean $J_j : X_j \to \bar{\mathbb{R}}$ y $J : X \to \bar{\mathbb{R}}$ funciones tales que $\Gamma{-}\lim_{j\to\infty} J_j = J$. Asumamos que $\inf_{X_j} J_j, \inf_X J > -\infty$ y que existe un compacto $K \subset E$ tal que $\inf_{X_j} J_j = \inf_{X_j \cap K} J_j$. Entonces*

$$\lim_{j\to\infty} \inf_{X_j} J_j = \inf_X J.$$

Más aún, si $x_j \in X_j$ verifica que $J_j(x_j) = \inf_{X_j} J_j + o(1)$ y existe $x \in X$ tal que $x_j \to x$, entonces $J(x) = \inf_X J$.

Demostración. La demostración sigue de aplicar el Teorema 3.6 a los funcionales extendidos $\bar{J}_j$ y $\bar{J}$. Los detalles los omitimos. □

Al igual que en la sección previa, en las aplicaciones de este teorema consideraremos $E = W^{1,p}(\Omega)$ con la topología débil y el compacto K será un conjunto acotado en norma de $W^{1,p}(\Omega)$. Luego tenemos el siguiente análogo del Teorema 3.8.

Teorema 3.15. *Sea E un espacio de Banach reflexivo y sean $X_j, X \subset E$ cerrados para la topología débil tales que $X_j \overset{M}{\to} X$ y sean $J_j\colon X_j \to \bar{\mathbb{R}}$ débil semicontinuas inferiormente y uniformemente coercivas. Sea $J\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ tal que $J_j \overset{\Gamma}{\to} J$ según la Definición 3.12. Entonces las conclusiones del Teorema 3.8 se mantienen.*

Demostración. La demostración es completamente análoga a la del Teorema 3.8 y es omitida. □

Si la demostración del Teorema 3.6 o 3.14 se inspecciona con cuidado, se observa que no se precisan todas las hipótesis de la $\Gamma-$convergencia de los funcionales. En particular, en la desigualdad del límite inferior no se requiere para toda sucesión sino sólo para la sucesión de mínimos (en el caso de que estos existan) de los funcionales J_j. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.16. Sea E un espacio topológico y $X_j, X \subset E$ tales que $X_j \overset{M}{\to} X$. Sean $J_j\colon X_j \to \mathbb{R}$ y $J\colon X \to \mathbb{R}$. Decimos que J_j $\Gamma-$converge a J en sentido débil si

1. para toda sucesión $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ con $x_j \in X_j$ de mínimos de J_j ($\min_{X_j} J_j = J(x_j)$) tal que $x_j \to x \in X$ se tiene que
$$J(x) \leq \liminf_{j\to\infty} J_j(x_j),$$
2. para todo $x \in X$ existe $x_{j_k} \in X_{j_k}$ tal que $x_{j_k} \to x$ y
$$J(x) \geq \limsup_{k\to\infty} J_{j_k}(x_{j_k}).$$

Se tiene entonces la siguiente extensión del teorema de De Giorgi, Teorema 3.14.

Teorema 3.17. *Sea E un espacio topológico y $X_j, X \subset E$ subespacios tales que $X_j \overset{M}{\to} X$. Sean $J_j\colon X_j \to \bar{\mathbb{R}}$ y $J\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ funciones tales que J_j $\Gamma-$convergen a J en sentido débil. Asumamos que $\inf_{X_j} J_j, \inf_X J > -\infty$ y que existe un compacto $K \subset E$ tal que $\inf_{X_j} J_j = \inf_{X_j\cap K} J_j$. Entonces*
$$\lim_{j\to\infty} \inf_{X_j} J_j = \inf_X J.$$

Más aún, si toda sucesión $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ con $x_j \in X_j$ de cuasi-mínimos cumple $x_j \to x$, entonces $J(x) = \inf_X J$.

Demostración. Comenzamos probando primero la convergencia de los ínfimos. Sea $\varepsilon > 0$, existe $x_j \in X_j$ tal que

$$\inf_{X_j} J_j > J_j(x_j) - o(1), \tag{3.8}$$

donde $o(1) \to 0$ si $j \to \infty$. Como $\inf_{X_j} J_j = \inf_{X_j \cap K} J_j$ podemos suponer que $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset K$, luego, como K es compacto, existe una subsucesión $\{x_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{j_k} \to x$.

Por la Mosco convergencia de los espacios, tenemos que $x \in X$ y como J_j $\Gamma-$converge débil a J (desigualdad del límite inferior) tenemos que $\liminf_{k\to\infty} J_{j_k}(x_{j_k}) \geq J(x)$, de donde, por (3.8),

$$\inf_X J \leq J(x) \leq \liminf_{k\to\infty} J_{j_k}(x_{j_k}) \leq \liminf_{k\to\infty} \inf_{X_{j_k}} J_{j_k}. \tag{3.9}$$

Por otro lado, si $\tilde{x} \in X$ es arbitrario, usando que J_{j_k} $\Gamma-$converge a J (desigualdad del límite superior) tenemos que existe $x_{j_{k_l}} \in X_{j_{k_l}}$ tal que $x_{j_{k_l}} \to \tilde{x}$ que verifica

$$\limsup_{l\to\infty} \inf_{X_{j_{k_l}}} J_{j_{k_l}} \leq \limsup_{l\to\infty} J_{j_{k_l}}(x_{j_{k_l}}) \leq J(\tilde{x})$$

y como $\tilde{x} \in X$ es arbitrario, se concluye que

$$\limsup_{l\to\infty} \inf_{X_{j_{k_l}}} J_{j_{k_l}} \leq \inf_X J \tag{3.10}$$

Finalmene, por (3.9) y (3.10) se concluye que

$$\inf_X J \leq \liminf_{k\to\infty} \inf_{X_{j_k}} J_{j_k} \leq \liminf_{l\to\infty} \inf_{X_{j_{k_l}}} J_{j_{k_l}} \leq \limsup_{l\to\infty} \inf_{X_{j_{k_l}}} J_{j_{k_l}} \leq \inf_X J.$$

Luego el límite existe y como el resultado es independiente de la subsucesión se concluye que toda la sucesión es convergente, i.e.

$$\inf_X J = \lim_{j\to\infty} \inf_{X_j} J_j.$$

Más aún, de (3.9) y (3.10) se deduce que si $x_j \in X_j$ es una sucesión de cuasi mínimos tal que $x_j \to x$ entonces x es un mínimo para J. □

Para finalizar este capítulo enunciamos el análogo del Teorema 3.8 que nos será de vital importancia mas adelante. La demostración del mismo es análoga a la demostración del Teorema 3.8 y no realizaremos la demostración.

Teorema 3.18. *Sea E un espacio topológico y $X_j, X \subset E$ tal que $X_j \xrightarrow{M} X$. Sean $J_j, J : X_j \to \mathbb{R}$ tales que J_j $\Gamma-$convergen a J en el sentido de la definición 3.16, débilmente semicontinuas inferiores y uniformemente coercivas.*

Entonces:

1. *existe $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in X_j$ sucesión de minimizantes de J_j, i.e. $\inf_{X_j} J_j = J_j(x_j)$.*
2. $\lim_{j\to\infty} \inf_{X_j} J_j = \inf_X J$.
3. *Todo punto de acumulación de una sucesión de ínfimos de J_j es un ínfimo de J.*

Capítulo 4

El Laplaciano no lineal Δ_p

En este capítulo estudiaremos una extensión natural al problema de Laplace que surge en cálculo de variaciones cuando la integral de Dirichlet

$$\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx$$

es reemplazada por

$$\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx \quad \text{con } 1 < p < +\infty$$

y, en consecuencia, el espacio $H^1(\Omega)$ es reemplazado por el espacio $W^{1,p}(\Omega)$. Al hacerlo el operador laplaciano Δ es reemplazado por el laplaciano no lineal Δ_p, el cual es definido por

$$\Delta_p v = \sum_{i=1}^{n} (|\nabla v|^{p-2} v_{x_i})_{x_i} = div(|\nabla v|^{p-2}\nabla v). \tag{4.1}$$

Note que cuando $p = 2$ el $p-$Laplaciano Δ_p coincide con Δ (i.e. $\Delta_p v = \Delta v$).

La suposición $1 < p < \infty$ es crucial aquí. Cuando $1 < p < \infty$, el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo y muchas de las técnicas variacionales las cuales han sido desarrolladas en el espacio $H^1(\Omega)$ pueden ser generalizadas a este marco, es por lo tanto posible aplicar el teorema de la minimización convexa el cual es válido en espacios de Banach reflexivos. Los casos $p = 1$ y $p = \infty$, los cuales son importantes para muchas aplicaciones no serán considerados en este trabajo.

4.1. Existencia y unicidad de problemas con fuente

En esta sección estudiaremos algunos problemas asociados al $p-$laplaciano con una fuente dada. Estudiaremos en primer término el problema de Dirichlet y en segundo lugar el problema con fuente localizada en la frontera del dominio.

Teorema 4.1. *Sea $p \in (1,\infty)$. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea $f \in L^{p'}(\Omega)$ una función dada.*

1. *Existe entonces una única solución $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ del siguiente problema de minimización:*

$$\text{mín}\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx - \int_\Omega fv\,dx \colon v \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}.$$

2. *Equivalentemente, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es solución débil del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Es decir, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y verifica

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx$$

para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Veamos primero la equivalencia entre 1 y 2.

Sea $I\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx - \int_\Omega fv\,dx.$$

Supongamos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es un mínimo de I. Veamos que es solución débil de (4.2). En efecto, si $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que $\varphi(t) := I(u + tv)$ alcanza su mínimo en $t = 0$ y por ende $\varphi'(0) = 0$. Pero

$$\varphi'(t) = \int_\Omega |\nabla u + t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + t\nabla v)\cdot\nabla v\,dx - \int_\Omega fv\,dx,$$

de donde

$$0 = \varphi'(0) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v\,dx - \int_\Omega fv\,dx.$$

Recíprocamente, si u es solución débil de (4.2) y $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es arbitraria, usamos $w = u - v$ como función test en la formulación débil y obtenemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot (\nabla u - \nabla v)\,dx = \int_\Omega f(u - v)\,dx$$

de donde se obtiene

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \int_\Omega fu\,dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v\,dx - \int_\Omega fv\,dx.$$

Usando la desigualdad de Young $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, la primera integral del lado derecho se acota por

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx + \frac{1}{p'}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx.$$

De ahí es inmediato concluir que

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \int_\Omega fu\,dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx - \int_\Omega fv\,dx = I(v).$$

Falta entonces demostrar 1. Observemos que I es acotado inferiormente. Para eso usaremos la llamada *desigualdad de Young con épsilon*, es decir, usamos la desigualdad de Young de la siguiente manera:

$$ab = (\delta a)(\tfrac{b}{\delta}) \leq \frac{\delta^p a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'\delta^{p'}}.$$

Luego, si dado $\varepsilon > 0$ elegimos $\delta > 0$ tal que $\frac{\delta^p}{p} = \varepsilon$ (i.e. $\delta = (p\varepsilon)^{\frac{1}{p}}$), se obtiene

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^{p'}, \tag{4.3}$$

con $C_\varepsilon = \frac{p-1}{p^{\frac{p+1}{p}}\varepsilon^{\frac{1}{p}}}$.

Usando la desigualdad (4.3), se obtiene

$$\int_\Omega fv\,dx \leq \varepsilon\int_\Omega |v|^p\,dx + C_\varepsilon\int_\Omega |f|^{p'}\,dx \leq \varepsilon C\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx + C_\varepsilon\int_\Omega |f|^{p'}\,dx,$$

donde C es la constante en la desigualdad de Poincaré. Luego si se fija $\varepsilon > 0$ de manera tal que $\varepsilon C = \frac{1}{2p}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx - \int_\Omega fv\,dx \\ &\geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx - \left(\frac{1}{2p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx + c\int_\Omega |f|^{p'}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx - c\int_\Omega |f|^{p'}\,dx \\ &\geq -c\int_\Omega |f|^{p'}\,dx \end{aligned}$$

Ahora la demostración es una aplicación inmediata del *método directo del cálculo de variaciones*. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ una sucesión minimizante, i.e.

$$I(u_n) \to \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} I$$

Observemos que lo visto anteriormente nos da la siguiente desigualdad de coercividad

$$I(v) \geq \frac{1}{2p}\|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - c\|f\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}.$$

De esta desigualdad se desprende que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y luego, por el Teorema de Banach-Alaoglu, existe una subsucesión (que seguimos notando $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) débil convergente.

Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ el límite débil, es decir, $u_n \rightharpoonup u$. Entonces, por definición de convergencia débil,

$$\int_\Omega f u_n \, dx \to \int_\Omega f u \, dx.$$

Por otro lado, como la norma es débil semicontinua inferiormente, se tiene que

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx.$$

Combinando estas dos últimas expresiones, obtenemos que

$$I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} I,$$

es decir, u resuelve el problema de minimización.

Finalmente, veamos la unicidad. Esto es una consecuencia de la convexidad uniforme de I. En efecto, dado que la función real $x \mapsto |x|^p$ con $p > 1$ es uniformemente convexa, es fácil ver que I es uniformemente convexa, esto es

$$I((1-t)u + tv) < (1-t)I(u) + tI(v)$$

para todo $t \in (0,1)$ y $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq v$.

Luego, si u_1 y u_2 son dos minimizantes distintos para I, definimos $u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ y obtenemos

$$I(u) < \frac{1}{2} I(u_1) + \frac{1}{2} I(u_2) = \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} I$$

lo que es un absurdo.

Esto concluye la demostración. $\square$

De manera análoga se demuestra la existencia y unicidad del problema con fuente en la frontera del dominio. Es decir

Teorema 4.2. *Sea p un número real positivo tal que $1 < p < +\infty$. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera regular y sea $f \in L^{p'}(\partial\Omega)$ una función dada.*

1. *Existe entonces una única solución $u \in W^{1,p}(\Omega)$ del siguiente problema de minimización:*

$$\min \left\{ \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p \, dx - \int_{\partial\Omega} f v \, dS \colon v \in W^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

2. *Equivalentemente, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ es solución débil del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2} u = 0 & \text{en } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2} \partial_\nu u = f & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

Es decir, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y verifica

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v + |u|^{p-2} u v \, dx = \int_{\partial\Omega} f v \, dS$$

para toda $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Veamos primero la equivalencia, se define $I\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$I(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p \, dx - \int_\Omega f v \, dS_x.$$

supongamos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ es solución débil de (4.4), esto significa que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^p uv \, dx = \int_{\partial\Omega} f v \, dS_x \tag{4.5}$$

para toda $v \in W^{1,p}(\Omega)$, en particular será válido para $v = u - v$, poniendo esta última expresión de v en (4.5) y despejando se llega a

$$\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p \, dx - \int_{\partial\Omega} f u \, dS_x = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx + \int_\Omega |u|^{p-2} uv \, dx - \int_{\partial\Omega} f v \, dS_x$$

usando ahora la desigualdad de Young ($ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$ válida con $a, b \geq 0$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) en las dos primeras integrales de la derecha en la igualdad de arriba se obtiene

$$\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p \, dx - \int_{\partial\Omega} f u \, dS_x \leq \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{p'}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx + \int_\Omega |u|^{p-2} uv \, dx - \int_{\partial\Omega} f v \, dS_x$$

pasando en (4.6) las dos primeras integrales de la derecha a la izquierda y operando queda

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p \, dx - \int_\Omega f u \, dS_x \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p \, dx - \int_\Omega f v \, dS_x$$

es decir $I(u) \leq I(v)$ para toda $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Recíprocamente si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ cumple ser un mínimo del funcional I se tiene que $I'(u) = 0$, poniendo $h(t) = |\nabla u + t\nabla v|^p + |u + tv|^p$ al ser $p > 1$ se cumple que $h'(t) = p|\nabla u + t\nabla v|^{p-1}(\nabla u + t\nabla v)\nabla v + p|u + tv|^{p-1}(u + tv)v$ y como

$$I'(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega h'(t)|_{t=0} \, dx - \int_{\partial\Omega} f v \, dS_x$$

se llega a

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}\nabla u \nabla v + |u|^{p-1} uv \, dx - \int_{\partial\Omega} f v \, dS_x = 0 \tag{4.7}$$

esto válido para toda $v \in W^{1,p}(\Omega)$, y como (4.7) se puede escribir como

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}\nabla u \nabla v + |u|^{p-1} uv \, dx = \int_{\partial\Omega} f v \, dS_x$$

para toda $v \in W^{1,p}(\Omega)$ se cumple entonces que el extremal u es solución débil de (4.4).

Para probar 1 se razona igual que en el teorema previo. Usando la desigualdad (4.3), se obtiene

$$\int_{\partial\Omega} fv\,dS_x \leq \varepsilon \int_{\partial\Omega} |v|^p\,dS_x + C_\varepsilon \int_{\partial\Omega} |f|^{p'}\,dS_x \leq \varepsilon C \int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p\,dx + C_\varepsilon \int_{\partial\Omega} |f|^{p'}\,dS_x,$$

donde C es la constante en la desigualdad de Trazas. Luego si se fija $\varepsilon > 0$ de manera tal que $\varepsilon C = \frac{1}{2p}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p\,dx - \int_{\partial\Omega} fv\,dS_x \\ &\geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p\,dx - \left(\frac{1}{2p}\int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p\,dx + c\int_{\partial\Omega} |f|^{p'}\,dS_x\right) \\ &= \frac{1}{2p}\int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p\,dx - c\int_{\partial\Omega} |f|^{p'}\,dS_x \\ &\geq -c\int_{\partial\Omega} |f|^{p'}\,dS_x \end{aligned}$$

Ahora la demostración es una aplicación inmediata del *método directo del cálculo de variaciones*. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ una sucesión minimizante, i.e.

$$I(u_n) \to \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} I$$

Observemos que lo visto anteriormente nos da la siguiente desigualdad de coercividad

$$I(v) \geq \frac{1}{2p}\|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - c\|f\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}.$$

De esta desigualdad se desprende que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y luego, por el Teorema de Banach-Alaoglu, existe una subsucesión (que seguimos notando $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) débil convergente.

Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ el límite débil, es decir, $u_n \rightharpoonup u$. Entonces, por definición de convergencia débil,

$$\int_\Omega fu_n\,dx \to \int_\Omega fu\,dx.$$

Por otro lado, como la norma es débil semicontinua inferiormente, se tiene que

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^p\,dx.$$

Combinando estas dos últimas expresiones, obtenemos que

$$I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} I,$$

es decir, u resuelve el problema de minimización. $\square$

4.2. Problemas de autovalores asociados a Δ_p

En esta sección nos concentramos en el estudio de ciertos problemas de autovalores asociados al laplaciano no lineal Δ_p. Dado que el operador Δ_p es no lineal, no son problemas de autovalores en el sentido estricto del término (por ejemplo, las autofunciones no forman un espacio lineal). Sin embargo, la homogeneidad del operador ($\Delta_p(tu) = t^{p-1}\Delta_p u$, $t > 0$) si permiten mostrar que las autofunciones forman un *cono* y dicho concepto es suficiente para extender muchas de las propiedades de los autovalores para problemas lineales.

A modo de repaso, recordemos algunas cuestiones de los autovalores de Dirichlet asociados al laplaciano Δ.

Los autovalores de Dirichlet de Δ en un dominio acotado Ω son aquellos números reales μ tales que la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

admite una solución $u \in H_0^1(\Omega)$ no trivial. Es bien sabido, ver por ejemplo [7], que el conjunto de autovalores forma una sucesión $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que cumple

$$0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \cdots \leq \mu_k \to \infty$$

donde el primero μ_1 es *simple* (es decir, el conjunto de autofunciones es un espacio lineal de dimensión uno) y los demás autovalores tienen multiplicidad finita (en la sucesión están contados con multiplicidad).

Estos autovalores tienen la siguiente *caracterización variacional*

$$\mu_k = \min_{S\subset\mathbb{S}_k} \max_{v\in S} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx}{\int_\Omega v^2\,dx},$$

donde $\mathbb{S}_k := \{S \subset H_0^1(\Omega) \colon S \text{ es subespacio}, \dim S \geq k\}$.

En particular, el primer autovalor μ_1 posee la siguiente caracterización:

$$\mu_1 = \min_{v\in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx}{\int_\Omega v^2\,dx}.$$

No es difícil ver que el mínimo se realiza exactamente en las autofunciones asociadas a μ_1 y que dichas autofunciones son de signo constante. En este sentido se dice que μ_1 es un *autovalor principal.*

Vamos ahora a estudiar la correspondiente extensión de este primer autovalor para el operador Δ_p.

Teorema 4.3. *Sea $p \in (1,\infty)$ y definimos el siguiente número*

$$\rho_1 = \inf_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx}{\int_\Omega |v|^p\,dx}.$$

Entonces el ínfimo se alcanza. Más aún $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ alcanza ese ínfimo si y sólo si u es una autofunción asociada a ρ_1, es decir, es solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \rho_1 |u|^{p-2} u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Finalmente, toda autofunción asociada a ρ_1 tiene signo constante.

Observación 4.4. Puede demostrarse, si bien no lo haremos en este trabajo, que ρ_1 es simple. Es decir, si u_1 y u_2 son dos autofunciones asociadas a ρ_1, entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $u_1 = t u_2$.

Demostración. Veamos primero que el ínfimo en la definición de ρ_1 se alcanza. La demostración es muy similar a lo hecho en la sección anterior.

En efecto, sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ una sucesión minimizante. Claramente, podemos suponer que $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Luego se tiene

$$\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^p \to \rho_1, \quad \|u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1.$$

De esto se desprende que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y por lo tanto existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y una subsucesión (que seguimos notando $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) tal que $u_n \rightharpoonup u$.

Observemos que por el Teorema de Rellich-Kondrachov, $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y por ende $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$.

Finalmente, como la norma es débil semicontinua inferiormente, se obtiene que

$$\rho_1 \le \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \le \liminf_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^p = \rho_1.$$

Análogamente que en la sección anterior, sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ un minimizante para ρ_1 normalizado, es decir $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$ y por ende $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p = \rho_1$. Sea $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ arbitraria y consideremos la función $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t) := \frac{\int_\Omega |\nabla u + t\nabla v|^p \, dx}{\int_\Omega |u + tv|^p \, dx},$$

entonces φ tiene un mínimo en $t = 0$ y por ende $\varphi'(0) = 0$.

Ahora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla u + t\nabla v|^p \, dx &= p \int_\Omega |\nabla u + t\nabla v|^{p-2} (\nabla u + t\nabla v) \cdot \nabla v \, dx, \\ \frac{d}{dt} \int_\Omega |u + tv|^p \, dx &= p \int_\Omega |u + tv|^{p-2} (u + tv) v \, dx \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} 0 = \varphi'(0) &= \frac{\left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx\right) - \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)\left(\int_\Omega |u|^{p-2} uv \, dx\right)}{\left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^2} \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \rho_1 \int_\Omega |u|^{p-2} uv \, dx. \end{aligned}$$

Es decir, u es una autofunción asociada a ρ_1.

Recíprocamente, si u es una autofunción asociada a ρ_1, entonces

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \, dx - \rho_1 \int_\Omega |u|^{p-2} uv \, dx = 0$$

para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Luego, tomando $v = u$ se llega a

$$\rho_1 = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx}.$$

Resta ver que las autofunciones asociadas a ρ_1 tienen signo constante. Para esto sólo basta observar que si u es un minimizante para ρ_1, entonces $w = |u|$ también lo es y por ende w es una solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta_p w \geq 0 & \text{en } \Omega \\ w \geq 0 & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Para este problema, vale el principio fuerte del mínimo (ver [17]) y entonces se tiene que $w \equiv 0$ o $w > 0$ en Ω. Cómo $w \neq 0$ concluimos que $w > 0$ en Ω de donde se deduce que u tiene signo constante. □

Pasemos ahora a estudiar otro problema de autovalores para el $p-$laplaciano. Este es el llamado *problema de Steklov* que para el operador Δ fuera estudiado por W. Steklov en [16]. En este problema el autovalor aparece a través de la frontera.

El teorema que se tiene es el siguiente:

Teorema 4.5. *Sea $p \in (1, \infty)$ y definimos el siguiente número*

$$\lambda_1 = \inf_{v \in W^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p \, dx}{\int_{\partial\Omega} |v|^p \, dS}.$$

Entonces el ínfimo se alcanza. Más aún $u \in W^{1,p}(\Omega)$ alcanza ese ínfimo si y sólo si u es una autofunción de Steklov asociada a λ_1, es decir, es solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2} u = 0 & \text{en } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2} \partial_\nu u = \lambda_1 |u|^{p-2} u & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Finalmente, toda autofunción asociada a λ_1 tiene signo constante.

De hecho, el problema de Steklov que trataremos será algo más general. Para eso consideramos un subconjunto $\Gamma \subset \partial\Omega$ tal que $\bar{\Gamma} \neq \partial\Omega$ (podría ser $\Gamma = \emptyset$). Dado Γ se define

$$W_\Gamma^{1,p}(\Omega) = \overline{\{v \in C^1(\overline{\Omega}) \colon \Gamma \subset (\mathrm{sop}(v))^c\}} \tag{4.8}$$

donde la clausura se toma en $W^{1,p}(\Omega)$. Heurísticamente, este conjunto representa las funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulan sobre Γ.

Luego se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.6. *Sea $p \in (1,\infty)$ y Ω de clase C^1 definimos el siguiente número*

$$\lambda_1(\Gamma) = \inf_{v \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p\, dx}{\int_{\partial\Omega} |v|^p\, dS}.$$

Entonces el ínfimo se alcanza. Más aún $u \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ alcanza ese ínfimo si y sólo si u es una autofunción de Steklov asociada a $\lambda_1(\Gamma)$, es decir, es solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = 0 & \text{en } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\partial_\nu u = \lambda_1 |u|^{p-2}u & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma \\ u = 0 & \text{en } \Gamma. \end{cases} \tag{4.9}$$

Finalmente, toda autofunción asociada a λ_1 tiene signo constante.

Observación 4.7. Observemos que $\lambda_1(\emptyset) = \lambda_1$. En ese sentido el Teorema 4.6 es más general que el Teorema 4.5

Demostración. La demostración de este teorema es muy similar a la del Teorema 4.3, el Teorema 2.30 dice que la inmersión $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\partial\Omega)$ es compacta y como consecuencia de ello $\lambda_1(\Gamma)$ existe, supongamos ahora entonces que $\{u_n\}_n$ es la sucesión minimizante, por lo tanto

$$\lambda_1(\Gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_\Omega |\nabla u_n|^p + |u_n|^p\, dx}{\int_{\partial\Omega} |u_n|^p\, dS}$$

pero se puede suponer que $\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)} = 1$, de este modo queda $\|u_n\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \to \lambda_1(\Gamma)$ y esto dice a su vez que $\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C$ donde la constante no depende de n, por lo tanto la sucesión esta uniformemente acotada en n y así existe una subsucesión que aún seguiremos denotando por $\{u_n\}_n$ y una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ de modo tal que $u_n \rightharpoonup u$ (u_n converge a u en la topología débil de $W^{1,p}(\Omega)$). Usando otra vez la compacidad del Teorema 2.30 se tiene que $\|u_n\|^p_{L^p(\partial\Omega)} \to \|u\|^p_{L^p(\partial\Omega)}$ y así $\|u\|^p_{L^p(\partial\Omega)} = 1$.

Teniendo en cuenta el hecho de que la norma es semicontinua inferior se tiene que $\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \lambda_1(\Gamma)$ y como también $\lambda_1(\Gamma) \le \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}$ se llega a que $\lambda_1(\Gamma) = \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}$ y esto dice que u es donde se logra el ínfimo.

Para probar la equivalencia supongamos primero que $u \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ es donde se alcanza el ínfimo para λ_1 esto quiere decir que u es mínimo para el funcional $I(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\, dx}{\int_{\partial\Omega} |u|^p\, dS}$, asi que $I'(u) = 0$, sea ahora $v \in W^{1,p}(\Omega)$ arbitraria y poniendo $h(t) = |\nabla u + t\nabla v| + |u + tv|^p$, $g(t) = |u + tv|^p$ se cumple que

$$0 = I'(u) = \frac{\int_\Omega h'(t)|_{t=0}\, dx}{\int_{\partial\Omega} g'(t)|_{t=0}\, dS_x} =$$

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}\nabla u \nabla v + |u|^{p-1}uv\, dx \int_{\partial\Omega} |u|^p\, dS_x - \int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\, dx \int_{\partial\Omega} |u|^{p-1}uv\, dS_x}{\left(\int_{\partial\Omega} |u|^p\, dS_x\right)^2} =$$

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}\nabla u \nabla v + |u|^{p-1}uv\,dx}{\int_{\partial\Omega}|u|^p\,dS_x} - \lambda_1(\Gamma)\frac{\int_{\partial\Omega}|u|^{p-1}uv\,dS_x}{\int_{\partial\Omega}|u|^p\,dS_x}$$

y en consecuencia

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}\nabla u \nabla v + |u|^{p-1}uv\,dx = \lambda_1(\Gamma)\int_{\partial\Omega}|u|^{p-1}uv\,dS_x$$

para toda $v \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$, y esto último dice que u es solución débil para el problema.

Recíprocamente supongamos que $u \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ es solución débil para el problema esto significa que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}\nabla u \nabla v + |u|^{p-1}uv\,dx = \lambda_1(\Gamma)\int_{\partial\Omega}|u|^{p-1}uv\,dS_x \tag{4.10}$$

para toda $v \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$, en particular para $v = u$, poniendo este valor de v en (4.10) se obtiene

$$\lambda_1(\Gamma) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\,dx}{\int_{\partial\Omega}|u|^p\,dS}.$$

Solo falta ver que las autofunciones tienen signo constante, como en la demostración anterior si u es autofunción también lo será $w = |u|$ y en consecuencia será solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p w + |w|^{p-2}w \geq 0 & \text{en } \Omega \\ |\nabla w|^{p-2}\partial_\nu w = \lambda_1 |w|^{p-2}w & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma \\ w \geq 0 & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

por el principio fuerte del máximo se cumple que $w = 0$ o $w > 0$ en Ω, pero como w es autofunción esta es positiva por lo tanto $w > 0$ en Ω y así u tiene signo constante en Ω. □

Observación 4.8. Por los resultados de regularidad de [15], un extremal u de $\lambda_1(\Gamma)$, verifica que $u \in C^{1,\delta}_{loc}(\Omega)$ para algún $0 < \delta < 1$.

Más aún, por [14], si $\partial\Omega \setminus \overline{\Gamma} \in C^{1,\eta}$, entonces la regularidad hasta la frontera es $u \in C^{1,\gamma}_{loc}(\overline{\Omega} \setminus \overline{\Gamma})$ para algún $0 < \gamma < 1$.

Por otro lado, si u es un extremal de $\lambda_1(\Gamma)$, entonces tenemos que también $|u|$ es un extremal de $\lambda_1(\Gamma)$. Luego, usando que $|u|$ es una solución débil de (4.11) y el principio del máximo (ver [17]), se obtiene que u tiene signo constante. En consecuencia, podemos asumir que

$$u > 0 \text{ en } \Omega \text{ y } u \geq 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Más aún, por el Lema de Hopf (ver [17]) y la regularidad de la frontera obtenemos que una solución no negativa de (4.11) verifica

$$u > 0 \quad \text{in } \overline{\Omega} \setminus \overline{\Gamma}.$$

A continuación vamos a hacer una última generalización de los problemas que involucran el operador Δ_p, esta nueva generalización tiene en cuenta una *función de peso* que aparece en la condición de borde del problema, nos referimos a un problema del tipo

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = 0, & \text{en } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\partial_\nu u = \lambda m |u|^{p-2}u, & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma \\ u = 0, & \text{en } \Gamma, \end{cases} \tag{4.11}$$

donde esta función m satisface ciertas condiciones que más adelante especificaremos.

Esta nueva generalización resulta de vital importancia para nuestro trabajo ya que en los siguientes capítulos nos ocuparemos de analizar el comportamiento asintótico de problemas que producen una ecuación efectiva del tipo mencionado.

Sea $\Gamma \subset \partial\Omega$ subconjunto cerrado de la frontera cumpliendo $\Gamma \neq \partial\Omega$ y el espacio $W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ definido como en (4.8). Consideramos una función de peso $m \in L^\infty(\partial\Omega)$ tal que $C_1 \leq m(x) \leq C_2$ donde C_1, C_2 son constantes positivas. Tenemos entonces el siguiente teorema

Teorema 4.9. *Sea $1 < p < \infty$ y Ω de clase C^1. Definimos el siguiente número*

$$\lambda_m(\Gamma) = \inf_{u \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p \, dx}{\int_{\partial\Omega} m|u|^p \, dS_x}.$$

Se cumple lo siguiente

- *El ínfimo en la definición de $\lambda_m(\Gamma)$ se alcanza.*
- *Una función $u \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ alcanza el ínfimo en la definición de $\lambda_m(\Gamma)$ si y solo si u es solución débil del siguiente problema (4.11).*
- *Toda autofunción asociada al autovalor $\lambda_m(\Gamma)$ tiene signo constante.*

Demostración. Teniendo en cuenta que $m \leq C_2$ se cumple que

$$\frac{1}{C_2} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p \, dx}{\int_{\partial\Omega} |u|^p \, dS_x} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p \, dx}{\int_{\partial\Omega} m|u|^p \, dS_x}.$$

Esto último junto con el Teorema 2.30 (teorema de inmersión de trazas compacta) nos aseguran la existencia de $\lambda_m(\Gamma)$. En efecto, sea u_n una sucesión minimizante para $\lambda_m(\Gamma)$. Podemos suponer que $\int_{\partial\Omega} m|u_n|^p \, dS_x = 1$ ya que si u_n son admisibles también lo serán las funciones αu_n, para $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces que $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \lambda_m(\Gamma)$, y como consecuencia de esta convergencia se cumple que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta acotada en $W^{1,p}(\Omega)$. Existe entonces una subsucesión de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (que aún seguimos denotando como $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) y una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ débil en $W^{1,p}(\Omega)$.

Ahora, por la semicontinuidad débil de la norma y la convergencia de la sucesión minimizante tenemos que

$$\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \lambda_m(\Gamma). \tag{4.12}$$

Por otro lado por el Teorema 2.30 y el Teorema 2.27 tenemos que

$$u_n \to u \text{ fuerte en } L^p(\partial\Omega) \tag{4.13}$$
$$u_n \to u \text{ fuerte en } L^p(\Omega) \tag{4.14}$$
$$u_n \to u \text{ c.t.p. en } \Omega \tag{4.15}$$
$$u_n \to u \text{ c.t.p. en } \partial\Omega. \tag{4.16}$$

Por (4.13) tenemos que $1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} m|u_n|^p\, dS_x = \int_{\partial\Omega} m|u|^p\, dS_x$, y por (4.16) se cumple también que $u|_\Gamma = 0$, por lo tanto u es una función admisible en la definición de $\lambda_m(\Gamma)$ y $\int_{\partial\Omega} m|u|^p\, dS_x = 1$ en consecuencia $\lambda_m(\Gamma) \leq \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}$, esto último junto con (4.12) dicen que $\lambda_m(\Gamma) = \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}$, por lo tanto u es en donde se da el ínfimo para $\lambda_m(\Gamma)$.

Vamos a probar ahora la equivalencia, supongamos que $u \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ es en donde alcanza el ínfimo $\lambda_m(\Gamma)$, es decir

$$\lambda_m(\Gamma) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\, dx}{\int_{\partial\Omega} m|u|^p\, dS_x}. \tag{4.17}$$

También de la definición de $\lambda_m(\Gamma)$ se desprende que u es un mínimo para la funcional

$$I_m(v) = \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p + |v|^p\, dx}{\int_{\partial\Omega} m|v|^p\, dS_x}.$$

es decir $I'_m(u) = 0$. Por otro lado definiendo las funciones $g(t) = |\nabla u + t\nabla v|^p + |u + tv|^p$ y $h(t) = m|u + tv|^p$ donde $v \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ es una función arbitraria se cumple que

$$I'_m(u) = \frac{\int_\Omega g'(t)|_{t=0}\, dx \int_{\partial\Omega} m|u|^p\, dS_x - \int_{\partial\Omega} h'(t)|_{t=0}\, dS_x \int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p\, dx}{(\int_{\partial\Omega} m|u|^p\, dS_x)^2}$$

usando esto último, $I'_m(u) = 0$ y (4.17) llegamos a

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv\, dx = \lambda_m(\Gamma) \int_{\partial\Omega} m|u|^{p-2}uv\, dS_x, \quad \forall v \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$$

esto último dice que u es una solución débil para el problema (4.11).

Supongamos ahora que $u \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ es una solución débil para el problema (4.11), esto significa que se cumple

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv\, dx = \lambda_m(\Gamma) \int_{\partial\Omega} m|u|^{p-2}uv\, dS_x, \quad \forall v \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega).$$

Esto último se cumple en particular para $v = u$ y con esta elección de v se tiene que

$$\lambda_m(\Gamma) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p \, dx}{\int_{\partial\Omega} m|u|^p \, dS_x},$$

por lo tanto $\lambda_m(\Gamma)$ alcanza el ínfimo en u.

Con un argumento similar al hecho en la demostración del Teorema 4.6 podemos concluir también que cualquier autofunción asociada a $\lambda_m(\Gamma)$ tiene signo constante. □

Terminamos esta sección con una importante propiedad del $p-$laplaciano Δ_p que será de vital importancia para nuestras conclusiones en el Capítulo 6. Pero para concluir este resultado necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.10. *Sean x, y en $\mathbb{R}^N$ arbitrarios, se cumple que*

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y) \cdot (x-y) \geq \begin{cases} c|x-y|^p, & si\ p \geq 2 \\ c\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & si\ 1 < p < 2 \end{cases}$$

donde c es una constante positiva.

Demostración. Podemos suponer por homogeneidad que $|x| = 1$ y $|y| \leq 1$.Además si nos referimos al plano generado por x e y podemos escribir $x = (1, 0, \dots, 0), y = (y_1, y_1, 0 \dots, 0)$ y $\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq 1$.

Caso 1 ($1 < p < 2$). Establecer la desigualdad propuesta para este caso es equivalente a establecer que

$$\left\{ \left(1 - \frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}} \right) (1 - y_1) + \frac{y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}} \right\} \frac{(1 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}}{(1-y_1)^2 + y_2^2} \geq C, \tag{4.18}$$

pero como

$$1 - \frac{y_1}{(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}} \geq \begin{cases} 1 - \frac{y_1}{|y_1|^{2-p}} \geq (p-1)(1-y_1) \text{ si } 0 \leq y_1 \leq 1, \\ 1 - y_1 \geq (p-1)(1-y_1) \text{ si } y_1 \leq 0, \end{cases}$$

resulta que (4.18) mayora a

$$(p-1)\{(1-y_1)^2 + y_2^2\} \frac{(1 + y_1^2 + y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}}{(1-y_1)^2 + y_2^2} \geq p - 1.$$

Caso 2 ($p \geq 2$). La desigualdad es equivalente en este caso a

$$\frac{\left[1 - y_1(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{p-2}{2}}\right](1 - y_1) + y_2^2(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{p-2}{2}}}{((1 - y_1^2)^2 + y_2^2)^{\frac{p}{2}}} \geq C$$

si llamamos $t = \frac{|y|}{|x|}$ y $s = \frac{xy}{|x||y|}$ tenemos que lo que hay que demostrar es que la función

$$f(t,s) = \frac{1 - (t^{p-1} + t)s + t^p}{(1 - 2ts + t^2)^{\frac{p}{2}}}$$

esta acotada inferiormente.

Calculando para t fijo donde $\partial f/\partial s = 0$ resulta

$$1-(t^{p-1}+t)s+t^p = \frac{t^{p-2}+1}{p}(1-2ts+t^2)$$

entonces en los puntos críticos s de f se tiene que

$$f(t,s) = \frac{t^{p-2}+1}{p}\frac{1}{(1-2ts+t^2)^{\frac{p-2}{2}}} \geq \frac{1}{p}\frac{t^{p-2}+1}{(t+1)^{p-2}} \geq \frac{1}{p}\min_{0\leq t\leq 1}\frac{t^{N-2}+1}{t+1} \geq \frac{1}{2p}.$$

□

Dada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, su $p-$laplaciano $\Delta_p u$ observado como un elemento de $(W^{1,p}(\Omega))'$ esta definido como

$$\langle -\Delta_p u, u\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\, dx, \quad v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Observación 4.11. Vemos por lo tanto gracias al Lema 4.10 que el $p-$laplaciano visto como un elemento en $(W^{1,p}(\Omega))'$ es un operador monótono.

En efecto, si $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\langle -\Delta_p u + \Delta_p v, u - v\rangle &= \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot(\nabla u - \nabla v)\, dx \\ &\geq \begin{cases} c\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p\, dx & \text{si } p \geq 2 \\ c\int_\Omega \frac{|\nabla u - \nabla v|^2}{(|\nabla u| + \nabla v|)^{2-p}}\, dx & \text{si } 1 < p < 2. \end{cases}\end{aligned}$$

En particular,

$$\langle -\Delta_p u + \Delta_p v, u - v\rangle \geq 0.$$

Capítulo 5

Ventanas óptimas para el primer autovalor de Steklov no lineal

En este capítulo se estudiará el siguiente problema de diseño óptimo.

Dado un número $\alpha \in (0,1)$, se busca la existencia de una ventana $\Gamma^{op} \subset \partial\Omega$ de manera tal que $|\Gamma^{op}|_{N-1} = \alpha|\partial\Omega|_{N-1}$ y

$$\lambda_1(\Gamma^{op}) \leq \lambda_1(\Gamma)$$

entre todas las ventanas $\Gamma \subset \partial\Omega$ que verifican $|\Gamma|_{N-1} = \alpha|\partial\Omega|_{N-1}$, donde $\lambda_1(\Gamma)$ es el primer autovalor de Steklov dado en el Teorema 4.6.

Este problema fue estudiado en [6]. Seguiremos en este capítulo la presentación de dicho artículo.

Con ese propósito, se define la constante

$$\lambda(\alpha) := \text{ínf}\{\lambda_1(\Gamma) \colon \Gamma \subset \partial\Omega, |\Gamma|_{N-1} = \alpha|\partial\Omega|_{N-1}\}$$

5.1. Caracterización de la constante óptima

Nuestro primer resultado nos da una caracterización alternativa de la constante $\lambda(\alpha)$ que será fundamental en el estudio del problema.

Lema 5.1. *Para cada $\alpha \in (0,1)$ la constante $\lambda(\alpha)$ tiene la siguiente caracterización*

$$\lambda(\alpha) = \text{ínf}\left\{\frac{\|v\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|v\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} \colon v \in W^{1,p}(\Omega),\ |\{v=0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} \geq \alpha|\partial\Omega|_{N-1}\right\}.$$

Demostración. Definamos $\mu(\alpha)$ la constante dada por la caracterización del lema. Veamos primero que $\mu(\alpha) \leq \lambda(\alpha)$.

Sea $\Gamma \subset \partial\Omega$ tal que $|\Gamma|_{N-1} = \alpha|\partial\Omega|_{N-1}$ y sea $u \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ una autofunción asociada a $\lambda_1(\Gamma)$.

Observemos que u es admisible en la caracterización de $\mu(\alpha)$, de donde

$$\mu(\alpha) \leq \frac{\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} = \lambda_1(\Gamma).$$

En consecuencia $\mu(\alpha) \leq \lambda(\alpha)$ como queríamos ver.

Veamos ahora que $\lambda(\alpha) \leq \mu(\alpha)$. En efecto, sea $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizante para $\mu(\alpha)$, es decir, $v_k \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\mu(\alpha) = \lim_{k\to\infty} \frac{\|v_k\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|v_k\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} \quad \text{y} \quad |\{v_k = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} \geq \alpha|\partial\Omega|_{N-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$, elegimos

$$\Gamma_k \subset \{v_k = 0\} \cap \partial\Omega$$

tal que $|\Gamma_k|_{N-1} = \alpha|\partial\Omega|_{N-1}$. En consecuencia, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda(\alpha) \leq \lambda_1(\Gamma_k) \leq \frac{\|v_k\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|v_k\|^p_{L^p(\partial\Omega)}}.$$

Pasando al límite en esta desigualdad obtenemos

$$\lambda(\alpha) \leq \lim_{k\to\infty} \lambda_1(\Gamma_k) \leq \lim_{k\to\infty} \frac{\|v_k\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|v_k\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} = \mu(\alpha).$$

Esto completa la demostración. □

Veamos ahora el teorema más importante de este capítulo, la existencia de la ventana óptima.

Teorema 5.2. *Sea $\alpha \in (0,1)$.*

1. *Existe $\Gamma^{op} \subset \partial\Omega$ tal que $|\Gamma^{op}|_{N-1} = \alpha|\partial\Omega|_{N-1}$ y $\lambda(\alpha) = \lambda_1(\Gamma^{op})$.*

2. *Existe $u^{op} \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $|\{u^{op} = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} \geq \alpha|\partial\Omega|_{N-1}$ tal que*

$$\lambda(\alpha) = \frac{\|u^{op}\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|u^{op}\|^p_{L^p(\partial\Omega)}}.$$

Demostración. Veamos primero 2. Sea $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$ una sucesión de funciones no negativas y normalizadas (i.e. $\|v_k\|_{L^p(\partial\Omega)} = 1$) tal que

$$\|v_k\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \to \lambda(\alpha) \quad \text{y} \quad |\{v_k = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} \geq \alpha|\partial\Omega|_{N-1}.$$

La existencia de esta sucesión está garantizada por el Lema 5.1.

Observemos que $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada en $W^{1,p}(\Omega)$ y por ende, por el Teorema de Banach-Alaoglu, existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y una subsución (que seguimos llamando $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$) tal que

$$v_k \rightharpoonup u \quad \text{débil en } W^{1,p}(\Omega). \tag{5.1}$$

Además, por el Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov, vale que

$$v_k \to u \qquad \text{fuerte en } L^p(\Omega) \text{ y en } L^p(\partial\Omega) \tag{5.2}$$

$$v_k \to u \qquad \text{en casi todo punto de } \partial\Omega. \tag{5.3}$$

De (5.2) sigue que $\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} = 1$ y de (5.3) se obtiene que

$$|\{u = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} \geq \limsup_{k\to\infty} |\{v_k = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} \geq \alpha|\partial\Omega|_{N-1}.$$

Es decir, u es admisible en la caracterización de $\lambda(\alpha)$ dada por el Lema 5.1, luego

$$\lambda(\alpha) \leq \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Por otro lado, la semicontinuidad inferior de la norma con respecto a la convergencia débil nos da

$$\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|v_k\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \lambda(\alpha).$$

Esto concluye la demostración de 2.

Veamos ahora que 2 implica 1. En efecto, por 2, existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$|\{u = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} \geq \alpha|\partial\Omega|_{N-1} \quad \text{y} \quad \lambda(\alpha) = \frac{\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\partial\Omega)}}.$$

Sea entonces $\Gamma_0 \subset \{u = 0\} \cap \partial\Omega$ tal que

$$|\Gamma_0|_{N-1} = \alpha|\partial\Omega|_{N-1}.$$

Pero entonces

$$\lambda_1(\Gamma_0) \leq \frac{\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} = \lambda(\alpha).$$

Dado que la otra desigualdad es obvia, eso concluye la demostración de 1. $\square$

5.2. Propiedades de la constante óptima

El siguiente resultado es un refinamiento del Teorema 5.2. El mismo muestra que si asumimos cierta regularidad sobre el dominio Ω, entonces la ventana óptima asociada a $\lambda(\alpha)$ es exactamente el conjunto de ceros de la autofunción asociada en la frontera.

Teorema 5.3. *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ una autofunción asociada a $\lambda(\alpha)$. Entonces, si Ω verifica la condición de la bola interior (por ejemplo, si es de clase C^2), se tiene que*

$$|\{u = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} = \alpha|\partial\Omega|_{N-1}.$$

Demostración. Supongamos que la tesis del Teorema es falsa. Luego se tiene que

$$|\{u=0\}\cap\partial\Omega|_{N-1} > \alpha|\partial\Omega|_{N-1}.$$

Dado que la medida de superficie es regular, existe un conjunto cerrado $\Gamma_0 \subset \{u=0\}\cap\partial\Omega$ tal que

$$|\{u=0\}\cap\partial\Omega|_{N-1} > |\Gamma_0|_{N-1} > \alpha|\partial\Omega|_{N-1}.$$

En consecuencia, se tiene que $\lambda(\alpha) \le \lambda_1(\Gamma_0)$.

Por otro lado, como u es adimisible en la caracterización de $\lambda_1(\Gamma_0)$ se tiene que

$$\lambda_1(\Gamma_0) \le \frac{\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} = \lambda(\alpha),$$

de donde $\lambda_1(\Gamma_0) = \lambda(\alpha)$ y u es también una autofunción asociada a $\lambda_1(\Gamma_0)$. Luego, u es una solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_0 \\ |\nabla u|^{p-2}\partial_\nu u = \lambda_1(\Gamma_0)|u|^{p-2}u & \text{en } \partial\Omega\setminus\Gamma_0. \end{cases}$$

Ahora, por la Observación 4.8. $u \in C^{1,\gamma}_{loc}(\Omega\cup(\partial\Omega\setminus\Gamma_0))$ para algún $\gamma\in(0,1)$ y podemos asumir que $u > 0$ en Ω.

Finalmente, por nuestra suposición de regularidad en Ω podemos aplicar el Lema de Hopf (ver [17]) que nos da la estimación

$$\partial_\nu u > 0 \quad \text{en } (\{u=0\}\cap\partial\Omega)\setminus\Gamma_0.$$

Esto es una contradicción. □

Finalmente, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.4. *La función $\alpha \mapsto \lambda(\alpha)$ es estríctamente creciente.*

Demostración. Es claro que $\lambda(\alpha)$ es no decreciente como función de α. Supongamos ahora que existen $0<\alpha<\beta<1$ tales que $\lambda(\alpha)=\lambda(\beta)$. Luego, todo extremal para $\lambda(\beta)$ lo será también para $\lambda(\alpha)$. Pero si u es un extremal para $\lambda(\beta)$ tenemos

$$|\{u=0\}\cap\partial\Omega|_{N-1} = \beta|\partial\Omega|_{N-1} > \alpha|\partial\Omega|_{N-1}.$$

que contradice el Teorema 5.3. Luego $\lambda(\alpha)$ es estríctamente creciente. □

Terminamos este capítulo con un resultado de regularidad de la función $\alpha\mapsto\lambda(\alpha)$ demostrado en [6] que aquí nosotros usamos con $q^* = p$ y será de gran utilidad en el siguiente capítulo.

Teorema 5.5. *La función* λ *es continua por la derecha sobre el intervalo* $(0,1)$*, es decir*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0^+} \lambda(\alpha) = \lambda(\alpha_0), \quad \forall \alpha_0 \in (0,1).$$

Demostración. Sea $\alpha_0 \in (0,1)$ arbitrario, usando el Corolario 5.4 existe

$$\mathcal{L} = \lim_{\alpha\to\alpha_0^+} \lambda(\alpha) \quad y \quad \mathcal{L} \geq \lambda(\alpha_0). \tag{5.4}$$

Por el Teorema 3.6. en [6] existe $v_{\alpha_0} \in W^{1,p}(\Omega)$ autofunción asociada a $\lambda(\alpha_0)$ tal que $\|v_{\alpha_0}\|_{L^p(\partial\Omega)} = 1$ y

$$|A_{\alpha_0}|_{N-1} = \alpha_0 |\partial\Omega|_{N-1},$$

donde $A_{\alpha_0} = \{v_{\alpha_0}(x) = 0\} \cap \partial\Omega$.

Se elige ahora una función suave η satisfaciendo

$$\begin{cases} \eta = 0, & \text{en } B(0,1) \\ \eta = 1, & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus B(0,2) \\ 0 \leq \eta \leq 1, & \|\nabla\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq 2. \end{cases}$$

Tomando ahora $x_0 \in \partial\Omega \setminus A_{\alpha_0}$ un punto de densidad cero relativo a $\partial\Omega$ (ver definición en [8, Capítulo 1.7]), por cada $\varepsilon > 0$ definimos $\eta_\varepsilon(x) = \eta(\frac{x-x_0}{\varepsilon})$ y $w_\varepsilon = \eta_\varepsilon v_{\alpha_0} \in W^{1,p}(\Omega)$. Observamos que

$$\{x \in \partial\Omega \colon w_\varepsilon(x) = 0\} = A_{\alpha_0} \cup (B_\varepsilon(x_0) \cap \partial\Omega).$$

de donde

$$|\{x \in \partial\Omega \colon w_\varepsilon(x) = 0\}|_{N-1} > |A_{\alpha_0}|_{N-1} = \alpha_0 |\partial\Omega|_{N-1}, \tag{5.5}$$

para ε suficientemente pequeño, puesto que x_0 es un punto de densidad 0 para A_{α_0} relativo a $\partial\Omega$.

Por una lado se tiene que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} = \|v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)} \tag{5.6}$$

y

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|w_\varepsilon\|_{L^p(\partial\Omega)} = \|v_{\alpha_0}\|_{L^p(\partial\Omega)}. \tag{5.7}$$

En efecto, veamos (5.6),

$$\begin{aligned} \int_\Omega |w_\varepsilon - v_{\alpha_0}|^p \, dx &= \int_{B(x_0,2\varepsilon)\cap\Omega\setminus B(x_0,\varepsilon)} |(\eta_\varepsilon - 1) v_{\alpha_0}|^p \, dx + \int_{B(x_0,\varepsilon)\cap\Omega} |v_{\alpha_0}|^p \, dx \\ &\leq \int_{B(x_0,2\varepsilon)\cap\Omega} |v_{\alpha_0}|^p \, dx, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $0 \leq \eta_\varepsilon \leq 1$. Por lo tanto $w_\varepsilon \to v_{\alpha_0}$ en $L^p(\Omega)$, de donde se deduce (5.6). La demostración de (5.7) se puede realizar con un argumento similar.

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|\nabla \eta_\varepsilon v_{\alpha_0} + \eta_\varepsilon \nabla v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|\nabla \eta_\varepsilon v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon}\|v_{\alpha_0}\|_{L^p(B(x_0,2\varepsilon)\cap\Omega\setminus B(x_0,\varepsilon))} + \|\nabla v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

y por desigualdad de Hölder se obtiene que

$$\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|v_{\alpha_0}\|_{L^{p^*}(B(x_0,2\varepsilon)\cap\Omega\setminus B(x_0,\varepsilon))} + \|\nabla v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)}, \tag{5.8}$$

donde C es una constante independiente de ε.

Por (5.5) existe $\delta > 0$ tal que

$$|\{x \in \partial\Omega \colon w_\varepsilon(x) = 0\}|_{N-1} > \alpha|\partial\Omega|_{N-1}, \quad \forall 0 < \alpha - \alpha_0 < \delta,$$

y por lo tanto w_ε es una función admisible en la caracterización de $\lambda(\alpha)$. De esto último junto con (5.8) obtenemos que

$$\lambda(\alpha) \leq \frac{\|w_\varepsilon\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|w_\varepsilon\|_{L^p(\partial\Omega)}} \tag{5.9}$$

$$\leq \frac{(C\|v_{\alpha_0}\|_{L^{p^*}(B(x_0,2\varepsilon)\setminus B(x_0,\varepsilon))} + \|\nabla v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)})^p + \|w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}}{\|w_\varepsilon\|^p_{L^p(\partial\Omega)}} \tag{5.10}$$

para todo $0 < \alpha - \alpha_0 < \delta$. Entonces por (5.4) tenemos que

$$\mathcal{L} \leq \frac{(C\|v_{\alpha_0}\|_{L^{p^*}(B(x_0,2\varepsilon)\setminus B(x_0,\varepsilon))} + \|\nabla v_{\alpha_0}\|_{L^p(\Omega)})^p + \|w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}}{\|w_\varepsilon\|^p_{L^p(\partial\Omega)}}.$$

Tomando límite con $\varepsilon \to 0$, usando (5.6), (5.7) llegamos a

$$\mathcal{L} \leq \frac{\|v_{\alpha_0}\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|v_{\alpha_0}\|^p_{L^p(\partial\Omega)}}.$$

Tenemos por lo tanto que $\mathcal{L} = \lambda(\alpha_0)$, es decir

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0^+} \lambda(\alpha) = \lambda(\alpha_0),$$

lo que concluye la demostración. □

5.3. Generalización al problema con pesos

Los resultados de este capítulo son fácilmente generalizables al problema con peso m en la frontera. Es decir, se obtienen los mismos resultados para la constante $\lambda_m(\Gamma)$

definida en el capítulo anterior a los obtenidos para $\lambda(\Gamma)$. Esto nos será de mucha importancia en el siguiente capítulo ya que nos permitirá prácticamente concluir el principal resultado de este trabajo.

Introducimos las siguientes notaciones: para $\alpha \in (0,1)$ se define la siguiente constante

$$\lambda^*(\alpha) = \text{ínf}\{\lambda_m(\Gamma) \colon \Gamma \subset \partial\Omega, \mu^*(\Gamma) = \alpha\mu^*(\partial\Omega)\}$$

donde $d\mu^* = m\, dS$ define una medida.

Esta constante λ^* nos da a su vez la noción de ventana óptima pero esta vez asociada al problema (4.11), es decir una ventana $\Gamma^* \subset \partial\Omega$ es una ventana óptima para el problema (4.11) si $\lambda^*(\alpha) = \lambda_m(\Gamma^*)$ y el extremal asociado a la ventana Γ^* se notará por u^*.

Resumiendo todos los resultados, se obtiene el siguiente teorema cuya demostración omitimos.

Teorema 5.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio Lipschitz. Entonces, dado $\alpha \in (0,1)$, se tiene*

1. *Existe un conjunto $\Gamma^* \subset \partial\Omega$ tal que $\mu^*(\Gamma^*) = \alpha\mu^*(\partial\Omega)$ y*

$$\lambda^*(\alpha) = \lambda_m(\Gamma^*).$$

Más aún, existe $u^* \in W^{1,p}_{\Gamma^*}(\Omega)$ tal que

$$\lambda^*(\alpha) = \frac{\int_\Omega |\nabla u^*|^p + |u^*|^p\, dx}{\int_{\partial\Omega} |u^*|^p\, m dS}.$$

2. *Si $\partial\Omega$ verifica la propiedad de la bola tangente exterior, entonces*

$$\mu^*(\{u^* = 0\} \cap \partial\Omega) = \alpha\mu^*(\partial\Omega).$$

3. *Si $\partial\Omega$ verifica la propiedad de la bola tangente exterior, entonces $\lambda^*(\alpha)$ es estrictamente creciente.*

4. *Finalmente, si $\partial\Omega$ verifica la propiedad de la bola tangente exterior, entonces $\lambda^*(\alpha)$ es continua a derecha.*

Capítulo 6

ε-Oscilaciones

En este capítulo estudiaremos el problema de estabilidad de la constante óptima $\lambda(\alpha)$ estudiada en el capítulo previo cuando el dominio Ω es perturbado.

En el trabajo [6], los autores estudian este problema cuando el dominio Ω es perturbado *regularmente*. Los autores emplean el método de variación de dominios de Hadamard y pueden así calcular la llamada *derivada de forma* de $\lambda(\alpha)$ con respecto a esas deformaciones. Ver [6] para más detalles.

En este capítulo seguimos un camino diferente. En lugar de considerar perturbaciones regulares, consideraremos perturbaciones periódicas oscilatorias donde la amplitud converge a cero, pero el período de dichas oscilaciones también converge a cero.

Empezamos describiendo el tipo de perturbaciones que consideraremos. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, acotado. Asumimos que la frontera de Ω es de clase C^2. Tomamos $U \subset \mathbb{R}^N$ un abierto con frontera dada por el gráfico de una función C^2, $\Phi : U' \subseteq \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$, donde U' es un conjunto conexo y abierto.

$$\partial\Omega \cap U = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^N : x' \in U',\ x_1 = \Phi(x')\},$$
$$\Omega \cap U = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^N : x' \in U',\ x_1 < \Phi(x')\}.$$

Sea $f : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ una función C^2 y periódica con período $Y' = [0,1]^{N-1}$. Denotamos por $\varepsilon Y'_n = \varepsilon n + \varepsilon Y'$ con $n \in \mathbb{Z}^{N-1}$ los rectángulos trasladados.

Con todo lo definido anteriormente estamos en condiciones de describir el dominio perturbado $\Omega_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^N$ del siguiente modo:

$$\Omega_\varepsilon \cap U = \{(x_1, x') \in U : x' \in U',\ x_1 < \Phi(x') + \varepsilon^a f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\}$$

y, en consecuencia,

$$\partial\Omega_\varepsilon \cap U = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^N : x' \in U',\ x_1 = \Phi(x') + \varepsilon^a f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\}.$$

Por lo visto en el capítulo previo existe una ventana óptima para el problema sobre cada dominio Ω_ε que denotaremos por Γ_ε.

Nuestro objetivo será ahora estudiar el comportamiento tanto de la ventana óptima Γ_ε como de las constantes $\lambda(\Gamma_\varepsilon)$ cuando $\varepsilon \downarrow 0$.

Observemos que estos dominios Ω_ε convergen a Ω en prácticamente cualquier noción *razonable* de convergencia de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$ (por ejemplo, la topología complementaria de Hausdorff, la norma L^1 de las funciones características, etc.).

Veremos que el comportamiento asintótico depende fuertemente de la amplitud de las oscilaciones, medidas en términos del parámetro $a > 0$.

Se distinguen tres casos, un caso *subcrítico*, que corresponde a oscilaciones grandes en relación al período ($a < 1$), un caso supercrítico, que corresponde a pequeñas oscilaciones ($a > 1$) y finalmente un caso crítico, que corresponde a cuando la amplitud y el período son del mismo orden ($a = 1$).

En el caso subcrítico, al ser las oscilaciones muy grandes, el problema degenera y se pierde la inmersión de trazas en el límite. Este es un fenómeno de *engordamiento* de la frontera y se refleja en que las constantes $\lambda(\Gamma_\varepsilon)$ tienden a cero.

En el caso supercrítico las oscilaciones son muy pequeñas. Luego, para valores chicos de ε son imperceptibles. Esto se refleja en que el problema converge al problema sin perturbar cuando $\varepsilon \downarrow 0$.

Finalmente, el caso crítico es el más interesante. En este caso las oscilaciones y los períodos se balancean y se produce un fenómeno de *homogeneización* en el borde que se ve reflejado en la aparición de un *término extraño* en el borde para el problema límite en el espíritu de Cioranescu-Murat [5]. Este fenómeno ya ha sido observado en el trabajo [10] donde se estudia el problema de autovalores de Steklov.

Llegamos así al siguiente teorema que representa el objetivo de este trabajo.

Teorema 6.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ acotado, abierto, de clase C^2, Ω_ε el dominio perturbado obtenido a partir de Ω como se explicó anteriormente y $\lambda_\varepsilon(\alpha)$ (con $0 < \alpha < 1$) la mejor constante de trazas de Sobolev sobre Ω_ε. Entonces valen las siguientes afirmaciones*

1. (Caso subcrítico) *Si $a < 1$ entonces $\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon(\alpha) = 0$, además se tiene la siguiente desigualdad*

$$\lambda_\varepsilon(\alpha) \leq C\varepsilon^{1-a} \tag{6.1}$$

donde la constante depende sólo de la función f descripta anteriormente.

2. (Caso supercrítico) *Si $a > 1$ entonces $\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon(\alpha) = \lambda(\alpha)$ para $0 < \alpha < 1$, donde $\lambda(\alpha)$ y $\lambda_\varepsilon(\alpha)$ son las mejores constantes de trazas de Sobolev sobre el dominio sin perturbar y el dominio perturbado respectivamente y se definen como se hizo en el capítulo 4.*

3. (Caso crítico) *Si $a = 1$ y f, Φ las funciones que describen el dominio perturbado Ω_ε, entonces $\lambda_\varepsilon(\alpha) \to \lambda^*(\alpha)$ donde $\lambda^*(\alpha)$ está definida como*

$$\lambda^*(\alpha) := \inf \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p \, dx}{\int_{\partial\Omega} |u|^p \, d\mu^*} : u \in W^{1,p}(\Omega),\ \mu^*(\{u = 0\} \cap \partial\Omega) \geq \alpha\mu^*(\partial\Omega) \right\}, \tag{6.2}$$

donde la medida μ^* viene dada por $d\mu^* = mdS$ y la función de peso m está definida como

$$m(x) = \frac{\int_Y \sqrt{1 + |\nabla\Phi(x') + \nabla f(y)|^2}\, dy}{\sqrt{1 + |\nabla\Phi(x')|^2}}. \tag{6.3}$$

Dividiremos la prueba de manera natural entre cada uno de los casos, pero antes de comenzar necesitamos hacer el siguiente análisis acerca de los cambios de variables que emplearemos.

6.1. Estimaciones del cambio de variables

En el análisis del comportamiento asintótico del problema cuando $\varepsilon \to 0$ resulta de fundamental importancia entender el comportamiento asintótico de los cambios de variables que llevan a los dominios perturbados Ω_ε en Ω.

Una vez estudiados esos comportamientos asintóticos el análisis resulta independiente de la forma que tenga ese cambio de variables y sólo depende de dicho comportamiento.

Luego, dado $\varepsilon > 0$ se define la siguiente transformación $T_\varepsilon \colon \Omega_\varepsilon \to \Omega$ dada por

$$(y_1, y') = T_\varepsilon(x_1, x') = (x_1 - \varepsilon^a f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\phi_\varepsilon(x), x'), \tag{6.4}$$

donde $x' = (x_2, \cdots, x_N)$, $\phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ está soportada en $B_{\sqrt{\varepsilon}}(\partial\Omega) = \bigcup_{x\in\partial\Omega} B_{\sqrt{\varepsilon}}(x)$ y $\phi_\varepsilon \equiv 1$ en $\partial\Omega$, $0 \le \phi_\varepsilon \le 1$ y $|\nabla\phi_\varepsilon| \le C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$.

Ahora, calculamos la diferencial de T_ε, DT_ε.

$$DT_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon^a f \partial_1\phi_\varepsilon & -\varepsilon^{a-1}\partial_2 f\phi_\varepsilon - \varepsilon^a f\partial_2\phi_\varepsilon & \cdots & -\varepsilon^{a-1}\partial_N f\phi_\varepsilon - \varepsilon^a f\partial_N\phi_\varepsilon \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{N-1\times N-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

De donde observamos que

$$DT_\varepsilon(x) = I_{N\times N} - \varepsilon^a f(\tfrac{x'}{\varepsilon})A_\varepsilon(x) - \varepsilon^{a-1}\phi_\varepsilon(x)B(\tfrac{x'}{\varepsilon}),$$

donde

$$A_\varepsilon(x) := \begin{pmatrix} \nabla\phi_\varepsilon(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B(x') := \begin{pmatrix} 0 & \nabla f(x') \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que como $\|f\|_\infty < \infty$ y $\|\nabla f\|_\infty < \infty$ sigue que

$$\|B\|_\infty < \infty.$$

Más aún, como $\|\nabla\phi_\varepsilon\|_\infty \le C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$, tenemos que

$$\|A_\varepsilon\|_\infty \le C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\chi_{_{sop(\phi_\varepsilon)}}.$$

y por lo tanto se tiene que, llamando $f_\varepsilon(x') = f(\frac{x'}{\varepsilon})$,

$$\|\varepsilon^a f_\varepsilon A_\varepsilon\|_\infty \le C\varepsilon^{a-1/2}\chi_{sop(\phi_\varepsilon)}$$

y, por otro lado, llamando $B_\varepsilon(x') = B(\frac{x'}{\varepsilon})$,

$$\|\varepsilon^{a-1}\phi_\varepsilon B_\varepsilon\|_\infty \le C\varepsilon^{a-1}\chi_{sop(\phi_\varepsilon)}.$$

Observemos que cuando $a \ge 1$, se cumple que dado $K \subset \Omega$, $T_\varepsilon = id_{\mathbb{R}^N}$ sobre K para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. En particular

$$DT_\varepsilon = I_{N\times N} \quad \text{y} \quad JT_\varepsilon = 1$$

sobre K si $\varepsilon > 0$ es chico, donde $JT_\varepsilon = |\det(DT_\varepsilon)|$ es el Jacobiano de T_ε.

Por otro lado, en el caso $a > 1$, $T_\varepsilon \to id_{\mathbb{R}^N}$ en norma C^1 y, en consecuencia, tenemos que

$$DT_\varepsilon \rightrightarrows I_{N\times N}, \quad JT_\varepsilon \rightrightarrows 1 \text{ y } J_\tau T_\varepsilon \rightrightarrows 1,$$

donde $J_\tau T_\varepsilon = |DT_\varepsilon^{-1}\vec{n}|JT_\varepsilon$ es el Jacobiano tangencial de T_ε. Ver [13] para más detalles sobre el Jacobiano tangencial.

Necesitamos ahora, estudiar el comportamiento del Jacobiano tangencial en el caso $a = 1$. En este caso, si $x \in \partial\Omega$ teniendo en cuenta otra vez que $\phi_\varepsilon = 1$ sobre $\partial\Omega$ tenemos la siguiente expresión para el diferencial

$$DT_\varepsilon(x) = I_{N\times N} - B(\tfrac{x'}{\varepsilon}) + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

El siguiente lema nos da el comportamiento asintótico para este caso.

Lema 6.2. *Dada $g \in L^1(\partial\Omega)$ arbitraria se cumple que*

$$\int_{\partial\Omega} gJ_\tau T_\varepsilon\, dS \to \int_{\partial\Omega} gm\, dS, \;\; si\ \varepsilon \to 0.$$

Es decir $J_\tau T_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} m$ débil- en $L^\infty(\partial\Omega)$, donde m es la función definida por (6.3) en el Teorema 6.1.*

Demostración. Sea $g \in C(\partial\Omega)$ arbitraria. Vamos a analizar primero la convergencia localmente, para esto recordamos la manera en que se pertubó el dominio Ω para obtener Ω_ε. Sea entonces $U \subset \mathbb{R}^N$, como los usados en la descripción de las perturbaciones.

Asumamos que $sop(g) \subset U$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega\cap U} gJ_\tau T_\varepsilon\, dS &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon\cap U} (g\circ T_\varepsilon)\, dS \\ &= \int_{U'} (g\circ T_\varepsilon)(x')\sqrt{1+|\nabla\Phi(x')+\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})|^2}\, dx'.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Pero ahora

$$\int_{U'} (g\circ T_\varepsilon)(x')\sqrt{1+|\nabla\Phi(x')+\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})|^2}\, dx' = \int_{U'} (g\circ T_\varepsilon)(x')m_\varepsilon(x')\sqrt{1+|\nabla\Phi(x')|^2}\, dx',$$

donde

$$m_\varepsilon(x') := \frac{\sqrt{1+|\nabla\Phi(x')+\nabla f(\frac{x'}{\varepsilon})|^2}}{\sqrt{1+|\nabla\Phi(x')|^2}}.$$

Usando que $\nabla f(\frac{x'}{\varepsilon}) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\nabla f}$ en $L^\infty(U')$, donde

$$\overline{\nabla f} := \int_Y \nabla f(y')\, dy'$$

se concluye que

$$m_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} m \quad \text{débil-* en } L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}).$$

(Ver [2]).

Por otro lado, como $T_\varepsilon \rightrightarrows id_{\mathbb{R}^N}$ se tiene que $(g \circ T_\varepsilon) \rightrightarrows g$ sobre compactos, en particular, $(g\circ T_\varepsilon) \to g$ en $L^1(U')$.

Juntando todo, tenemos que

$$\int_{U'} (g\circ T_\varepsilon) m_\varepsilon \sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}\, dx' = \int_{U'} g m_\varepsilon \sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}\, dx' + \int_{U'} (g\circ T_\varepsilon - g) m_\varepsilon \sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}\, dx'$$

de donde se deduce fácilmente que

$$\int_{U'} (g\circ T_\varepsilon) m_\varepsilon \sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}\, dx' \to \int_{U'} g m \sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}\, dx' = \int_{\partial\Omega} g m\, dS.$$

En el caso $g \in C(\partial\Omega)$ arbitraria, se hace un razonamiento estándar via particiones de la unidad y es omitido.

Si ahora $g \in L^1(\partial\Omega)$ es arbitraria, el resultado sale por densidad. □

Resumiendo lo hecho en esta sección, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.3. *Sean $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ las transformaciones dadas por (6.4). Se tienen entonces las siguientes estimaciones:*

1. *Si $a > 1$, $T_\varepsilon \to id_{\mathbb{R}^N}$ en norma C^1 cuando $\varepsilon \to 0$. En consecuencia*

$$T_\varepsilon \rightrightarrows id_{\mathbb{R}^N},\ DT_\varepsilon \rightrightarrows I_{N\times N},\ JT_\varepsilon \rightrightarrows 1 \text{ y } J_\tau T_\varepsilon \rightrightarrows 1.$$

2. *Si $a = 1$, tenemos que dado $K \subset \Omega$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que*

$$T_\varepsilon|_K = id_K,$$

para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Más aún,

$$J_\tau T_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} m \quad \text{débil-* en } L^\infty(\partial\Omega),$$

donde m es la función dada por (6.3).

6.2. Caso subcrítico ($a < 1$)

Demostración. Consideramos $\alpha \in (0,1)$ fijo y notamos por $\lambda_\varepsilon(\alpha)$ a la mejor constante de Sobolev asociada a α en el dominio Ω_ε dada en el capítulo previo, es decir

$$\lambda_\varepsilon(\alpha) = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^p + |u|^p \, dx}{\int_{\partial\Omega_\varepsilon} |u|^p \, dS_x} : u \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon), \ |\{u = 0\} \cap \partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} \geq \alpha |\partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} \right\}.$$

Sea ahora $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ la clausura de un conjunto relativamente abierto y conexo de manera tal que $|\Gamma_0|_{N-1} > \alpha|\partial\Omega|_{N-1}$. Dado $\delta > 0$, consideremos los conjuntos U_δ y $U_{2\delta}$ definidos por

$$U_\delta := \{x \in \mathbb{R}^N : \ \mathrm{dist}(x, \Gamma_0) < \delta\}$$

y

$$U_{2\delta} := \{x \in \mathbb{R}^N : \mathrm{dist}(x, \Gamma_0) < 2\delta\},$$

y consideremos $\Gamma_1 \subset \partial\Omega \setminus \overline{U_{2\delta}}$ tal que $|\Gamma_1|_{N-1} > 0$.

Sea ahora $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$ tal que $\phi \equiv 0$ en U_δ, $\phi \equiv 1$ en $\Omega \backslash U_{2\delta}$ y $0 \leq \phi \leq 1$ y $|\nabla\phi| \leq C\delta^{-1}$ en $U_{2\delta} \setminus U_\delta$.

Observemos que, si notamos por $\Gamma_{0,\varepsilon} \subset \partial\Omega_\varepsilon$ a la porción de la frontera de Ω_ε que proviene de perturbar Γ_0, se tiene que $\phi \equiv 0$ en $\Gamma_{0,\varepsilon}$ para todo ε chico. Más aún, es fácil ver que $|\Gamma_{0,\varepsilon}|_{N-1} \geq \alpha|\partial\Omega_\varepsilon|_{N-1}$. Luego, ϕ resulta admisible en la caracterización de $\lambda_\varepsilon(\alpha)$. En consecuencia, tenemos la siguiente estimación:

$$\lambda_\varepsilon(\alpha) \leq \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\phi|^p + |\phi|^p \, dx}{\int_{\partial\Omega_\varepsilon} |\phi|^p \, dS}.$$

Este cociente se estima fácilmente. En efecto,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\phi|^p \, dx \leq C|\Omega_\varepsilon|_N, \quad \int_{\Omega_\varepsilon} |\phi|^p \, dx \leq |\Omega_\varepsilon|_N, \tag{6.6}$$

con $C = C(\delta)$.

Por otra parte,

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} |\phi|^p \, dS_x \geq \int_{\partial\Omega_\varepsilon \setminus \bar{U}_{2\delta}} |\phi|^p \, dS_x = |\partial\Omega_\varepsilon \setminus \bar{U}_{2\delta}|_{N-1} \geq |\Gamma_{1,\varepsilon}|_{N-1} \tag{6.7}$$

donde $\Gamma_{1,\varepsilon}$ es el conjunto perturbado de $\Gamma_1 \subset \partial\Omega \setminus \bar{U}_{2\delta}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |\Gamma_{1,\varepsilon}|_{N-1} &= \int_{U'} \sqrt{1 + \left|\nabla\Phi(x') + \varepsilon^{a-1}\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\right|^2} \, dx' \\ &= \varepsilon^{a-1} \int_{U'} \sqrt{\varepsilon^{2(1-a)} + \left|\varepsilon^{1-a}\nabla\Phi(x') + \nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\right|^2} \, dx'. \end{aligned}$$

Estimemos ahora la última integral.

$$\begin{aligned}\int_{U'} &\sqrt{\varepsilon^{2(1-a)} + \left|\varepsilon^{1-a}\nabla\Phi(x') + \nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\right|^2}\, dx' \\ &= \int_{U'} \left(\sqrt{\varepsilon^{2(1-a)} + \left|\varepsilon^{1-a}\nabla\Phi(x') + \nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\right|^2} - |\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})|\right) + |\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})|\, dx'.\end{aligned}$$

Si llamamos $\delta_\varepsilon(x') = \sqrt{\varepsilon^{2(1-a)} + \left|\varepsilon^{1-a}\nabla\Phi(x') + \nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\right|^2} - |\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})|$, no es difícil ver que

$$|\delta_\varepsilon(x')| \le \varepsilon^{1-a}(1 + |\nabla\Phi(x')|)$$

de donde se deduce que

$$\int_{U'} \left(\sqrt{\varepsilon^{2(1-a)} + \left|\varepsilon^{1-a}\nabla\Phi(x') + \nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})\right|^2} - |\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})|\right) dx' \to 0 \quad \text{si } \varepsilon \to 0.$$

Finalmente, como f es periódica también lo será $|\nabla f|$, sigue que

$$\int_{U'} |\nabla f(\tfrac{x'}{\varepsilon})|\, dx' \to \int_Y |\nabla f(y)|\, dy =: m(|\nabla f|) > 0.$$

Estas estimaciones nos permiten concluir que,

$$|\Gamma_{1,\varepsilon}|_{N-1} \ge \varepsilon^{a-1}\frac{m(|\nabla f|)}{2}, \tag{6.8}$$

para todo $\varepsilon > 0$ pequeño.

Finalmente, de (6.6), (6.7) y (6.8), se concluye que

$$\lambda_\varepsilon(\alpha) \le C\varepsilon^{1-a} \to 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0$$

como queríamos demostrar. □

6.3. Caso supercrítico ($a > 1$)

Para el estudio del caso supercrítico, usaremos la teoría de la $\Gamma-$convergencia desarrollada en el Capítulo 3.

Si bien nuestra motivación es el estudio del comportamiento asintótico cuando los dominios son perturbados según fuera descripto previamente, los resultados de esta sección se basan únicamente en que la transformación T_ε verifica las hipótesis del Teorema 6.3, parte 1. Esto hace que nuestros resultados sean más generales de lo que aparentan.

Hagamos primero la siguiente observación.

Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$ dos dominios y supongamos que se tiene un difeomorfismo $T\colon \Omega_1 \to \Omega_2$. Luego, este difeomorfismo T induce una aplicación $\mathcal{T}\colon W^{1,p}(\Omega_2) \to W^{1,p}(\Omega_1)$ como

$\mathcal{T}u = u \circ T$. Esta aplicación resulta ser lineal, continua e inversible con $\mathcal{T}^{-1}v = v \circ T^{-1}$. Más aún, una aplicación directa del teorema de cambio de variables nos dice que

$$\int_{\Omega_1} |\mathcal{T}u|^p\,dx = \int_{\Omega_2} |u|^p JT^{-1}\,dy \leq \|JT^{-1}\|_\infty \int_{\Omega_2} |u|^p\,dx \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} |\nabla(\mathcal{T}u)|^p\,dx &= \int_{\Omega_2} |\nabla u(DT \circ T^{-1})|^p JT^{-1}\,dy \\ &\leq \|JT^{-1}\|_\infty \|DT\|_\infty \int_{\Omega_2} |\nabla u|^p\,dy.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Luego, si consideramos la aplicación $T_\varepsilon\colon \Omega_\varepsilon \to \Omega$ dada por (6.4), tenemos que la aplicación inducida $\mathcal{T}_\varepsilon\colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$ resulta lineal y bicontinua gracias a (6.9) y (6.10).

Definimos ahora las siguientes funcionales $Q_\varepsilon\colon W^{1,p}(\Omega_\varepsilon) \to \mathbb{R}$, $Q\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ como

$$Q_\varepsilon(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^p + |u|^p\,dx \tag{6.11}$$

y

$$Q(v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^p + |v|^p\,dy. \tag{6.12}$$

Se define entonces

$$\tilde{Q}_\varepsilon\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \text{como} \quad \tilde{Q}_\varepsilon = Q_\varepsilon \circ \mathcal{T}_\varepsilon. \tag{6.13}$$

Introducimos entonces los siguientes espacios:

$$X_\alpha^\varepsilon := \{u \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)\colon |\{u = 0\} \cap \partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} \geq \alpha|\partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} \text{ y } \|u_\varepsilon\|_{L^p(\partial\Omega_\varepsilon)} = 1\}, \tag{6.14}$$

$$\tilde{X}_\alpha^\varepsilon := \{v \in W^{1,p}(\Omega)\colon v \circ T_\varepsilon \in X_\alpha^\varepsilon\}, \tag{6.15}$$

$$X_\alpha := \{v \in W^{1,p}(\Omega)\colon |\{v = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} \geq \alpha|\partial\Omega|_{N-1} \text{ y } \|v\|_{L^p(\partial\Omega)} = 1\}. \tag{6.16}$$

Observemos que se tiene

$$\lambda_\varepsilon(\alpha) = \inf_{X_\alpha^\varepsilon} Q_\varepsilon = \inf_{\tilde{X}_\alpha^\varepsilon} \tilde{Q}_\varepsilon \quad \text{y} \quad \lambda(\alpha) = \inf_{X_\alpha} Q(v).$$

La primera parte de la demostración del caso supercrítico consistirá en aplicar el Teorema 3.15 a las funcionales $\tilde{Q}_\varepsilon\colon \tilde{X}_\alpha^\varepsilon \to \mathbb{R}$ y $Q\colon X_\alpha \to \mathbb{R}$. Hay que probar entonces que:

1. Las funcionales $\tilde{Q}_\varepsilon$ son débilmente semicontinuas inferiores.
2. Las funcionales $\tilde{Q}_\varepsilon$ son uniformemente coercivas. En particular, veremos que existen constantes $\alpha > 0$ y $\beta \geq 0$ tales que
$$\tilde{Q}_\varepsilon(v) \geq \alpha\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p - \beta, \quad \forall v \in \tilde{X}_\alpha^\varepsilon.$$
3. $\tilde{X}_\alpha^\varepsilon \overset{M}{\to} X_\alpha$,
4. $\Gamma\text{−}\lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{Q}_\varepsilon = Q$.

6.3.1. Semicontinuidad inferior

Hay que probar que por cada ε fijo la funcional $\tilde{Q}_\varepsilon(v)$ es débilmente semicontinua inferior.

Pero esto es una consecuencia directa del hecho de que $\tilde{Q}_\varepsilon$ es convexa y continua para la topología fuerte (ver [4, Corolario III.8, pág. 38]). En efecto, Como Q_ε y $\mathcal{T}_\varepsilon$ son continuas para la topología fuerte, $\tilde{Q}_\varepsilon$ resulta continua y como Q_ε es convexa y $\mathcal{T}_\varepsilon$ es lineal, sigue que $\tilde{Q}_\varepsilon$ es convexa.

6.3.2. Prueba de la coercividad uniforme

Para la demostración de la coercividad, llamando $u_\varepsilon = \mathcal{T}_\varepsilon^{-1} v$, obtenemos de (6.9) y (6.10),

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_\varepsilon(v) = Q_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^p + |u_\varepsilon|^p\, dx \\ &\geq \|JT_\varepsilon\|_\infty^{-1} \|DT_\varepsilon^{-1}\|_\infty^{-1} \int_\Omega |\nabla v|^p\, dx + \|JT_\varepsilon\|_\infty^{-1} \int_\Omega |v|^p\, dx\end{aligned}$$

Luego, de la definición de T_ε (6.4), se sigue que existe $\theta > 0$ independiente de ε tal que

$$\tilde{Q}_\varepsilon(v) \geq \theta \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p.$$

Esto finaliza la demostración.

6.3.3. Mosco convergencia de los espacios

$$\tilde{X}_\alpha^\varepsilon \xrightarrow{M} X_\alpha, \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$

Primero, sea $v \in X_\alpha$. Debemos ver que, dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon_\delta > 0$, con $\varepsilon_\delta \to 0$ cuando $\delta \to 0$ y $v_\delta \in \tilde{X}_\alpha^{\varepsilon_\delta}$ tal que $v_\delta \rightharpoonup v$ débil en $W^{1,p}(\Omega)$.

Sea entonces $v \in X_\alpha$ y $\Gamma = \{v = 0\} \cap \partial\Omega$. Sea ahora $x_0 \in \partial\Omega$ un punto de densidad cero de Γ relativo a $\partial\Omega$. Dado $\delta > 0$, tomamos $\eta_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\eta_\delta \equiv 0$ en $B_\delta(x_0)$, $\eta_\delta \equiv 1$ en $B_{2\delta}(x_0)^c$ y $0 \leq \eta_\delta \leq 1$ en $\mathbb{R}^N$ y definimos $\tilde{v}_\delta = v\eta_\delta$.

Es evidente que $\tilde{v}_\delta \to v$ fuerte en $W^{1,p}(\Omega)$ y que $\Gamma_\delta = \{\tilde{v}_\delta = 0\} \cap \partial\Omega$ verifica que

$$|\Gamma_\delta|_{N-1} > |\Gamma|_{N-1}.$$

Luego, existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que $|\Gamma_\delta|_{N-1} \geq (\alpha + \tilde{\delta})|\partial\Omega|_{N-1}$. Por otro lado, es evidente que $\|\tilde{v}_\delta \circ T_\varepsilon\|_{L^p(\partial\Omega_\varepsilon)} \to 1$ cuando $\delta, \varepsilon \to 0$. Por ende, existe $t_{\delta,\varepsilon} > 0$ tal que $t_{\delta,\varepsilon} \to 1$ cuando $\varepsilon, \delta \to 0$ y si definimos $v_{\delta,\varepsilon} = t_{\delta,\varepsilon}\tilde{v}_\delta$ tenemos que $v_{\delta,\varepsilon} \in \tilde{X}_\alpha^\varepsilon$ para ε suficientemente pequeño, lo que concluye la afirmación. Sea entonces $u_\varepsilon = v_{\delta,\varepsilon} \circ T_\varepsilon$ y $\Gamma_\varepsilon = \{u_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega_\varepsilon$, de esta forma

$$|\Gamma_\varepsilon|_{N-1} = \int_{\Gamma_\varepsilon} 1\, dS_x = \int_{\Gamma_\delta} J_\tau^\varepsilon\, dS_y = (1 + O(\varepsilon^{a-1}))|\Gamma_\delta|_{N-1} \geq (1 + O(\varepsilon^{a-1}))(\alpha + \tilde{\delta})|\partial\Omega|_{N-1}$$

donde J_τ^ε esta definido como antes, y también

$$(1+O(\varepsilon^{a-1}))(\alpha+\tilde{\delta})|\partial\Omega|_{N-1} \geq (\alpha+\tilde{\delta})(1-C\varepsilon^{a-1})|\partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} \geq \alpha|\partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} \quad \text{si} \quad \varepsilon < \varepsilon_\delta.$$

Por lo tanto $v_{\delta,\varepsilon} \in \tilde{X}_\alpha^\varepsilon$.

Por otra parte debemos ver que si $v_\varepsilon \in \tilde{X}_\alpha^\varepsilon$ y $v \in W^{1,p}(\Omega)$ verifican que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$, entonces se tiene que $v \in X_\alpha$.

De la definición de $\tilde{X}_\alpha^\varepsilon$ se tiene que existe $u_\varepsilon \in X_\alpha^\varepsilon$ tal que $v_\varepsilon = u_\varepsilon \circ T_\varepsilon$. Es decir $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$ y

$$|\{u_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} \geq \alpha|\partial\Omega_\varepsilon|_{N-1}.$$

Ahora observamos que, como $J_\tau T_\varepsilon \to 1$ uniformemente en $\partial\Omega$,

$$|\partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} = \int_{\partial\Omega} J_\tau T_\varepsilon \, dS \to |\partial\Omega|_{N-1}$$

y como $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ en $W^{1,p}(\Omega)$ en particular se tiene que $v_\varepsilon \to v$ fuerte en $L^p(\partial\Omega)$ y, sin pérdida de generalidad, en casi todo punto de $\partial\Omega$.

Luego

$$|\{v = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} \geq \limsup_{\varepsilon\to 0} |\{v_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1}.$$

Finalmente observamos que

$$\begin{aligned} |\{v_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} &= \int_{\{v_\varepsilon=0\}\cap\partial\Omega} dS \\ &= (1+o(1)) \int_{\{v_\varepsilon=0\}\cap\partial\Omega} J_\tau T_\varepsilon \, dS \\ &= (1+o(1))|\{u_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega_\varepsilon|_{N-1}. \end{aligned}$$

De esta última igualdad, se concluye que

$$\begin{aligned} |\{v = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} &\geq \limsup_{\varepsilon\to 0} |\{u_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} \\ &\geq \limsup_{\varepsilon\to 0} \alpha|\partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} \\ &= \alpha|\partial\Omega|_{N-1}. \end{aligned}$$

6.3.4. Prueba de la $\Gamma-$convergencia

Dividimos la prueba en dos partes.

Desigualdad del límite inferior

Sea $v_\varepsilon \in \tilde{X}_\alpha^\varepsilon$ y $v \in X_\alpha$ tal que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ débil en $W^{1,p}(\Omega)$ si $\varepsilon \to 0$. Hay que probar

$$Q(v) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \tilde{Q}_\varepsilon(v_\varepsilon).$$

Como hemos visto en la demostración de la semicontinuidad inferior, tenemos que

$$\tilde{Q}_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \|JT_\varepsilon\|_\infty^{-1} \min\{\|DT_\varepsilon^{-1}\|_\infty^{-1}, 1\} Q(v_\varepsilon). \tag{6.17}$$

La demostración de la desigualdad del límite inferior sigue de (6.17), la semicontinuidad inferior de Q y del hecho de que $JT_\varepsilon \rightrightarrows 1$ y $DT_\varepsilon^{-1} \rightrightarrows Id$. En efecto,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \tilde{Q}_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \lim_{\varepsilon\to 0} \|JT_\varepsilon\|_\infty^{-1} \min\{\|DT_\varepsilon^{-1}\|_\infty^{-1}, 1\} \liminf_{\varepsilon\to 0} Q(v_\varepsilon) \geq Q(v).$$

Desigualdad del límite superior

Dada $v \in X_\alpha$ hay que probar que existe $\varepsilon_\delta \to 0$ cuando $\delta \to 0$, $v_\delta \in \tilde{X}_\alpha^{\varepsilon_\delta}$ tales que $v_\delta \rightharpoonup v$ débil en $W^{1,p}(\Omega)$ y

$$\limsup_{\delta\to 0} \tilde{Q}_{\varepsilon_\delta}(v_\delta) \leq Q(v).$$

En efecto, como $\tilde{X}_\alpha^\varepsilon \xrightarrow{M} X_\alpha$, dada $v \in X_\alpha$ existe $v_\delta \in \tilde{X}_\alpha^{\varepsilon_\delta}$ con $\varepsilon_\delta \to 0$ cuando $\delta \to 0$ y $v_\delta \to v$ fuerte en $W^{1,p}(\Omega)$.

Luego, de la definición de T_ε, (6.4), se tiene que

$$\begin{aligned} T_\varepsilon &\to Id \quad \text{uniformemente en } \overline{\Omega} \\ DT_\varepsilon &\to Id \quad \text{uniformemente en } \overline{\Omega} \\ JT_\varepsilon &\to 1 \quad \text{uniformemente en } \overline{\Omega} \\ J_\tau T_\varepsilon &\to 1 \quad \text{uniformemente en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Como $v_\delta \to v$ fuerte en $W^{1,p}(\Omega)$ se concluye que

$$\lim_{\delta\to 0} \tilde{Q}_{\varepsilon_\delta}(v_\delta) = Q(v).$$

Esto concluye la demostración.

6.3.5. Fin de la demostración del caso supercrítico

De todas estas afirmaciones, haciendo uso del Teorema 3.14 se concluye que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{X_\alpha^\varepsilon} Q_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{\tilde{X}_\alpha^\varepsilon} \tilde{Q}_\varepsilon = \inf_{X_\alpha} Q = \lambda(\alpha).$$

Es decir

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon(\alpha) = \lambda(\alpha).$$

Esto termina la demostración de la convergencia de la constante óptima de trazas para el caso supercrítico.

6.3.6. Convergencia de las ventanas optimales

Vamos a probar ahora la convergencia de las ventanas optimales. Para esto sera determinante el hecho de que $\lambda_\varepsilon(\alpha) \to \lambda(\alpha)$ que es lo que acabamos de demostrar.

Teorema 6.4. *Con las mismas hipótesis que en el Teorema 6.1 en el caso supercrítico $a > 1$, se tiene que las ventanas optimales Γ_ε convergen a las ventanas optimales del problema sin perturbar en el siguiente sentido: Si definimos las medidas de Radon $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ por*

$$d\mu_\varepsilon = \chi_{\Gamma_\varepsilon} dS,$$

entonces la familia es precompacta para la topología débil de medidas y todo punto de acumulación de $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es de la forma

$$d\mu = \chi_\Gamma dS,$$

donde Γ es una ventana optimal para el problema sin perturbar.

Demostración. Sea $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset X_\alpha^\varepsilon$ una sucesión de autofunciones para $\lambda_\varepsilon(\alpha)$ y $v_\varepsilon = u_\varepsilon \circ T_\varepsilon \in \tilde{X}_\alpha^\varepsilon$ las autofunciones reescaladas.

Como T_ε y T_ε^{-1} junto con sus derivadas convergen a la identidad uniformemente, es fácil ver que

$$\tilde{Q}_\varepsilon(v_\varepsilon) = (1 + o(1))\|v_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \tag{6.18}$$

Dado que $\lambda_\varepsilon(\alpha)$ es convergente cuando $\varepsilon \to 0$, concluimos que $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset W^{1,p}(\Omega)$ es acotado y por ende existe una subsucesión que seguimos notando por $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ y una función $v \in W^{1,p}(\Omega)$ de modo que

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ débil en } W^{1,p}(\Omega). \tag{6.19}$$

Por el Teorema 2.27 y el Teorema 2.30 (y también como consecuencia de estos) tenemos que

$$v_\varepsilon \to v \text{ fuerte en } L^p(\Omega) \tag{6.20}$$
$$v_\varepsilon \to v \text{ fuerte } L^p(\partial\Omega) \tag{6.21}$$
$$v_\varepsilon \to v \text{ casi en todo punto de } \Omega \tag{6.22}$$
$$v_\varepsilon \to v \text{ casi en todo punto de } \partial\Omega. \tag{6.23}$$

Usando (6.21) y el hecho de que $J_\tau^\varepsilon \to 1$ si $\varepsilon \to 0$ tenemos que la función v también esta normalizada ya que

$$1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon|^p \, dS = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial\Omega} |v_\varepsilon|^p J_\tau T_\varepsilon \, dS = \int_{\partial\Omega} |v|^p \, dS.$$

Por otro lado por la semicontinuidad inferior de Q y (6.18) tenemos

$$Q(v) = \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \|v_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p = \liminf_{\varepsilon\to 0} \tilde{Q}_\varepsilon(v_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon(\alpha) = \lambda(\alpha). \tag{6.24}$$

Por la Mosco covergencia de los espacios $\tilde{X}^\varepsilon_\alpha$ se tiene que $v \in X_\alpha$, luego es admisible en la caracterización de $\lambda(\alpha)$ y en consecuencia tenemos que

$$Q(v) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon(\alpha) = \lambda(\alpha) \leq Q(v).$$

Esta última doble desigualdad junto con (6.24) afirma dos cosas: por un lado que v es una autofunción asociada a $\lambda(\alpha)$ es decir $\lambda(\alpha) = Q(v)$, y por otro lado que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|v_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{6.25}$$

Usando ahora (6.19), (6.25) y el hecho de que el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach uniformemente convexo para $1 < p < \infty$ llegamos usando la Proposición 2.4.10 en [1] a que

$$\|v_\varepsilon - v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0 \tag{6.26}$$

como queriamos probar.

Veamos ahora que

$$|\{v_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} \to |\{v = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0 \tag{6.27}$$

En efecto, del Teorema 5.3, se tiene que

$$|\{u_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} = \alpha|\partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} \quad \text{y} \quad |\{v = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} = \alpha|\partial\Omega|_{N-1}.$$

Pero,

$$|\{u_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} = (1+o(1))|\{v_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega|_{N-1} \quad \text{y} \quad |\partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} = (1+o(1))|\partial\Omega|_{N-1},$$

de donde se concluye fácilmente la afirmación.

Ahora usando que las autofunciones $v_\varepsilon, v : \Omega \to \mathbb{R}$ son medibles y positivas junto con (6.23) y (6.27) obtenemos usando el Lema 3.1 en [9] que

$$|(\{v_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega) \triangle (\{v = 0\} \cap \partial\Omega)|_{N-1} \to 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0,$$

de esto último se puede afirmar que

$$\int_{\partial\Omega} \chi_{\{v_\varepsilon=0\}\cap\partial\Omega} f \, dS_{\bar{x}} \to \int_{\partial\Omega} \chi_{\{v=0\}\cap\partial\Omega} f \, dS_{\bar{x}}, \quad \forall f \in L^1(\partial\Omega) \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0 \tag{6.28}$$

ya que

$$\left| \int_{\partial\Omega} \chi_{\{v_\varepsilon=0\}\cap\partial\Omega} f \, dS_{\bar{x}} - \int_{\partial\Omega} \chi_{\{v=0\}\cap\partial\Omega} f \, dS_{\bar{x}} \right| \leq \int_{\partial\Omega} \chi_{(\{v_\varepsilon=0\}\cap\partial\Omega)\triangle(\{v=0\}\cap\partial\Omega)} |f| \, dS_{\bar{x}},$$

es decir

$$\chi_{\{v_\varepsilon=0\}\cap\partial\Omega} \stackrel{*}{\rightharpoonup} \chi_{\{v=0\}\cap\partial\Omega}, \text{ en } L^\infty(\partial\Omega) \text{ si } \varepsilon \to 0. \tag{6.29}$$

Finalmente veamos que esta última afirmación implica el resultado de convergencia de las medidas.

En efecto, sea $\phi \in C_b(\mathbb{R}^N)$. Debemos demostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi \, d\mu_\varepsilon \to \int_{\mathbb{R}^N} \phi \, d\mu \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0,$$

donde

$$d\mu_\varepsilon = \chi_{\Gamma_\varepsilon} dS \quad \text{y} \quad d\mu = \chi_\Gamma dS.$$

Pero

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) \, d\mu_\varepsilon(x) &= \int_{\Gamma_\varepsilon} \phi(x) \, dS_x = \int_{\{u_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega_\varepsilon} \phi(x) \, dS_x \\ &= \int_{\{v_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega} \phi(T_\varepsilon^{-1}(y)) J_\tau^\varepsilon(y) \, dS_y.\end{aligned}$$

Ahora el resultado deseado se concluye de (6.29) observando que $(\phi \circ T_\varepsilon^{-1}) J_\tau^\varepsilon \to \phi$ uniformemente sobre compactos. □

Observación 6.5. La propiedad "$v_\varepsilon \rightharpoonup v$ y $\|v_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}$implica $\|v_\varepsilon - v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0$" se conoce como propiedad de *Kadek*. Esta propiedad es siempre válida en espacios de Banach uniformemente convexos.

6.4. Caso crítico ($a = 1$)

Para los resultados de esta sección, asumiremos que las transformaciones T_ε verifican las conclusiones del Teorema 6.3, parte 2. En particular, si T_ε viene dado por (6.4) con $a = 1$. Pero al igual que fuera observado en el caso supercrítico, los resultados de esta sección son más generales.

Sea Ω_ε el dominio perturbado a partir de Ω. Consideramos las siguientes funcionales $Q_\varepsilon \colon W^{1,p}(\Omega_\varepsilon) \to \mathbb{R}$ y $Q \colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida como en la sección previa.

De esta forma $\lambda_\varepsilon(\alpha) = \inf_{u \in X_\alpha^\varepsilon} Q_\varepsilon(u)$ y $\lambda^*(\alpha) = \inf_{u \in X_\alpha^*} Q(u)$, donde X_α^ε esta definido como en (6.14) y

$$X_\alpha^* := \{v \in W^{1,p}(\Omega) \colon \mu^*(\{v = 0\} \cap \partial\Omega) \geq \alpha \mu^*(\partial\Omega), \ \|v\|_{L^p(d\mu^*)} = 1\}, \tag{6.30}$$

y la medida μ^* se define como $d\mu^* = m dS\lfloor_{\partial\Omega}$.

De manera análoga al caso supercrítico, se introducen los operadores $\tilde{Q}_\varepsilon := Q_\varepsilon \circ \mathcal{T}_\varepsilon$, $\tilde{Q}_\varepsilon \colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ y los espacios

$$\tilde{X}_\alpha^\varepsilon := \{v \in W^{1,p}(\Omega) \colon v \circ T_\varepsilon \in X_\alpha^\varepsilon\}.$$

El esquema de la demostración en este caso es el mismo que el utilizado en el caso supercrítico. La mayor diferencia ocurre en la prueba de la $\Gamma-$convergencia dado que en este caso no somos capaces de demostrar la desigualdad del límite inferior para cualquier sucesión débil convergente pero si para una sucesión de mínimos débil convergente, explotando el hecho de que esos mínimos verifican la ecuación de Euler–Lagrange asociada a $\tilde{Q}_\varepsilon$ y que el operador diferencial resultante, el $p-$Laplaciano, es un operador monótono.

Por esto, en lugar de utilizar el Teorema 3.15 usaremos el Teorema 3.18. Debemos entonces probar lo siguiente:

1. Las funcionales $\tilde{Q}_\varepsilon$ son débilmente semicontinuas inferior.
2. Las funcionales $\tilde{Q}_\varepsilon$ son uniformemente coercivas.
3. Los espacios $\tilde{X}^\varepsilon_\alpha$ Mosco convergen a X^*_α.
4. $\tilde{Q}_\varepsilon$ $\Gamma-$converge débil a Q^*_α ($\Gamma-$convergencia según la Definición 3.16).

La demostración de la semicontinuidad inferior con respecto a la topología débil para cada $\tilde{Q}_\varepsilon$ se demuestra de manera análoga al caso supercrítico y es omitida. Lo mismo sucede con la demostración de la coercividad uniforme.

Queda entonces la demostración de la Mosco convergencia de los espacios y de la $\Gamma-$convergencia débil de los funcionales.

6.4.1. Prueba de la Mosco convergencia

Veamos ahora la demostración de la Mosco convergencia. La misma es similar a la realizada en el caso supercrítico pero se basa en el siguiente Lema sobre convergencia de medidas.

Lema 6.6. *Sea (X, Σ, ν) un espacio de medida finita y sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, f$ funciones $\nu-$medibles no negativas. Sean $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, μ medidas absolutamente continuas con respecto a ν tales que*

- *Para todo $A \in \Sigma$, se tiene que $\mu_n(A) \to \mu(A)$.*
- *$f_n \to f$ $\nu-$c.t.p.*

Entonces
$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\{f_n = 0\}) \leq \mu(\{f = 0\}).$$

Observación 6.7. Cuando $\mu_n = \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$ es un lema bien conocido y de sencilla demostración. En este caso, la dificultad aparece porque las medidas van variando. No sabemos si este resultado era conocido previamente ni si las hipótesis sobre las medidas son óptimas. Sin embargo será suficiente para nuestros propósitos.

Observación 6.8. La condición complicada de verificar para poder aplicar este lema es que $\mu_n(A) \to \mu(A)$ para todo A $\nu-$medible. La forma más simple de verificar este hecho que será nuestra situación es si las densidades de μ_n convergen débil-* en $L^\infty(d\nu)$ a la densidad de μ.

Demostración del Lema 6.6. Vamos a demostrar por el absurdo, supongamos entonces que existe $\delta > 0$ tal que $\forall n_0$ existe al menos $n \geq n_0$ que cumple
$$\mu(\{f = 0\}) + \delta < \mu_n(\{f_n = 0\}).$$
Como $\{f = 0\} = \bigcap_{j=1}^\infty \{f \leq 1/j\}$ se cumple que $\mu(\{f = 0\}) = \lim_{j\to\infty} \mu(\{f \leq 1/j\})$. Luego, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $j \geq j_0$,
$$\mu(\{f \leq 1/j\}) + \frac{\delta}{2} < \mu_n(\{f_n = 0\}).$$

Por otro lado, como $f_n \to f$ $\nu-$c.t.p., se tiene que

$$\{f \leq 1/j\} \supset \bigcap_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq n_0} \{f_n < 1/j\},$$

así que

$$\mu\left(\bigcap_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq n_0} \{f_n < 1/j\}\right) \leq \mu(\{f \leq 1/j\}.$$

Pero, como

$$\lim_{n_0 \to \infty} \mu\left(\bigcup_{n \geq n_0} \{f_n > 1/j\}\right) = \mu\left(\bigcap_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq n_0} \{f_n < 1/j\}\right),$$

existe $n_0(\delta)$ tal que

$$\mu\left(\bigcup_{k \geq n_0} \{f_k < 1/j\}\right) + \frac{\delta}{4} < \mu_n(\{f_n = 0\}).$$

Poniendo $A = \cup_{k \geq n_0}\{f_k < 1/j\}$, tenemos por hipótesis que $\lim_{n \to \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ y por ende,

$$\mu_n\left(\bigcup_{k \geq n_0} \{f_k < 1/j\}\right) + \frac{\delta}{8} < \mu_n(\{f_n = 0\}).$$

Finalmente observamos que $\{f_n > 1/j\} \subset \bigcup_{k \geq n_0}\{f_k < 1/j\}$ y por lo tanto concluimos que

$$\mu_n(\{f_n < 1/j\}) + \frac{\delta}{8} < \mu_n(\{f_n = 0\}),$$

lo que es un absurdo. □

Ahora si, con la ayuda del Lema 6.6 y del Lema 6.2, podemos demostrar la Mosco convergencia de los espacios.

Lema 6.9. *Sean $\tilde{X}_\alpha^\varepsilon$ y X_α^* los espacios definidos en* (6.15) *y* (6.30) *respectivamente. Entonces*

$$\tilde{X}_\alpha^\varepsilon \xrightarrow{M} X_\alpha^*.$$

Demostración. La demostración de este lema es análoga a la de la Sección 6.3.3.

Sea $v \in X_\alpha^*$. Debemos ver que, dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon_\delta > 0$ con $\varepsilon_\delta \to 0$ cuando $\delta \to 0$ y $v_\delta \in \tilde{X}_{\tilde{\alpha}}^{\varepsilon_\delta}$ con $\tilde{\alpha} \in (0,1)$ tal que $v_\delta \rightharpoonup v$ débil en $W^{1,p}(\Omega)$.

La demostración de esta afirmación es completamente análoga a la del caso supercrítico y es omitida.

Resta ver que si $v_\varepsilon \in \tilde{X}_\alpha^\varepsilon$ verifica que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$, entonces $v \in X_\alpha^*$. Pero esta afirmación es una consecuencia directa del Lema 6.6.

En efecto, se aplica el Lema 6.6 a las funciones $v_\varepsilon, v \in W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\partial\Omega)$ (que se puede suponer que $v_\varepsilon \to v$ en casi todo punto de $\partial\Omega$) y a las medidas

$$d\mu_\varepsilon = J_\tau T_\varepsilon dS, \quad d\mu = mdS, \quad d\nu = dS.$$

En consecuencia, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu(\{v=0\}\cap\partial\Omega) &\geq \limsup_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon(\{v_\varepsilon = 0\}\cap\partial\Omega) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\{v_\varepsilon=0\}\cap\partial\Omega} J_\tau T_\varepsilon \, dS \\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0} |\{v_\varepsilon \circ T_\varepsilon = 0\}\cap\partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} \\
&\geq \limsup_{\varepsilon\to 0} \alpha|\partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} = \alpha\mu(\partial\Omega).
\end{aligned}$$

Lo que finaliza la demostración. □

6.4.2. Prueba de la $\Gamma-$convergencia

A continuación nos ocupamos de la $\Gamma-$convergencia en el sentido de la definición 3.16.

Para hacer la prueba de la $\Gamma-$convergencia en le sentido de la definición 3.16 ($\Gamma-$convergencia débil) consideramos las funcionales $\tilde{Q}_\varepsilon \colon \tilde{X}^\varepsilon_\alpha \to \bar{\mathbb{R}}$ y $Q \colon X^*_\alpha \to \bar{\mathbb{R}}$.

Observamos que gracias al Lema 3.7 tenemos asegurada, por cada $\varepsilon > 0$ la existencia de los mínimos de las funcionales $\tilde{Q}_\varepsilon$ sobre el espacio $\tilde{X}^\varepsilon_\alpha$.

Al igual que en el caso supercrítico, dividimos la demostración en dos etapas.

Desigualdad del límite inferior

Suponemos para probar la desigualdad del límite inferior una sucesión $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \in \tilde{X}^\varepsilon_\alpha$ de mínimos ($\tilde{Q}_\varepsilon(v_\varepsilon) = \inf_{\tilde{X}^\varepsilon_\alpha} \tilde{Q}_\varepsilon$) que cumplen $v_\varepsilon \rightharpoonup v \in X^*_\alpha$ débil en $W^{1,p}(\Omega)$. Debemos probar que $\liminf_{\varepsilon\to 0} \tilde{Q}_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq Q(v)$.

Por el Teorema 2.27 se cumple que $v_\varepsilon \to v$ fuerte en $L^p(\Omega)$ y como $JT_\varepsilon \to 1$ en casi todo punto si $\varepsilon \to 0$ y están uniformemente acotados, se tiene que

$$\int_\Omega |v_\varepsilon|^p JT_\varepsilon \, dx \to \int_\Omega |v|^p \, dx, \text{ si } \varepsilon \to 0. \tag{6.31}$$

Teniendo en cuenta (6.31) y las expresiones de $\tilde{Q}_\varepsilon(v_\varepsilon)$ y $Q(v)$, sólo debemos probar que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon (DT_\varepsilon \circ T_\varepsilon^{-1})|^p JT_\varepsilon \, dx \geq \int_\Omega |\nabla v|^p \, dx \tag{6.32}$$

para concluir que $\liminf_{\varepsilon\to 0} \tilde{Q}_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq Q(v)$.

La dificultad en este caso y la principal diferencia con respecto al caso supercrítico es que en este caso no tenemos la convergencia de T_ε a la identidad en norma C^1. Esto hace que el análisis sea más delicado.

Lo primero que demostraremos es que

$$\nabla v_\varepsilon \to \nabla v, \text{ casi en todo punto de } \Omega. \tag{6.33}$$

Para esto usamos el hecho de que la sucesión $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es la sucesión de extremales, por lo tanto se cumple que

$$\int_\Omega (|\nabla v_\varepsilon(DT_\varepsilon \circ T_\varepsilon^{-1})|^{p-2}\nabla v_\varepsilon(DT_\varepsilon \circ T_\varepsilon^{-1})\cdot\nabla\psi + |v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon\psi)JT_\varepsilon\,dx = \lambda_\varepsilon\int_{\partial\Omega}|v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon\psi J_\tau T_\varepsilon\,dS$$

para toda $\psi \in W^{1,p}_\Gamma(\Omega)$. Si consideramos ahora $\psi_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente chico, como dado $K \subset \Omega$ compacto, tenemos que $T_\varepsilon = id$ sobre K para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se cumple que

$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon\nabla\psi_0 + |v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon\psi_0\,dx = 0.$$

Definimos ahora $K = \mathrm{sop}(\psi_0)$. Considerando ahora $\delta < d(K, \partial\Omega)$, escribimos $K_\delta = \{x \in \Omega\colon d(x,K) < \delta\}$, de esta forma se cumple que $K \subset K_\delta \subset\subset \Omega$ y si ε es suficientemente pequeño, se tiene que $T_\varepsilon = id$ en K_δ.

A partir de lo anterior consideramos una función $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ de modo que $\eta = 1$ en K, $\mathrm{sop}(\eta) \subset K_\delta$ y $0 \le \eta \le 1$ en $K_\delta \setminus K$.

Ponemos ahora $\psi_\varepsilon = \eta(v_\varepsilon - v)$, de esta forma se cumple que

$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon\nabla\psi_\varepsilon + |v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon\psi_\varepsilon\,dx = 0,$$

es decir

$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon(v_\varepsilon - v)\nabla\eta + |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon\nabla(v_\varepsilon - v)\eta + |v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon\eta(v_\varepsilon - v)\,dx = 0. \tag{6.34}$$

Usando que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ débil en $W^{1,p}(\Omega)$ y que son mínimos tenemos que $\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \le C$, y por lo tanto

$$\left|\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon(v_\varepsilon - v)\nabla\eta\,dx\right| \le \|\nabla\eta\|_\infty C\|v_\varepsilon - v\|_{L^p(\Omega)}. \tag{6.35}$$

Por otro lado usando que $\|v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \le C$ (pues $v_\varepsilon \to v$ en $L^p(\Omega)$) se tiene que

$$\left|\int_\Omega |v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon\eta(v_\varepsilon - v)\,dx\right| \le \|\eta\|_\infty\|v_\varepsilon\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|v_\varepsilon - v\|_{L^p(\Omega)} \le \|\eta\|_\infty C\|v_\varepsilon - v\|_{L^p(\Omega)}. \tag{6.36}$$

Usando ahora (6.35) y (6.36) en (6.34) se llega a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_\delta}|\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon\nabla(v_\varepsilon - v)\eta\,dx = 0. \tag{6.37}$$

Además como $|\nabla v|^{p-2}\nabla v \in L^{p'}(\Omega)$ (donde $1/p + 1/p' = 1$) y $\nabla v_\varepsilon \rightharpoonup \nabla v$ débil en $L^p(\Omega)$ se tiene que

$$\int_{K_\delta} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla (v_\varepsilon - v)\eta \, dx \to 0. \tag{6.38}$$

Juntando (6.37) y (6.38) llegamos a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{K_\delta} (|\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla(v_\varepsilon - v)\eta \, dx = 0$$

que junto con la monotonía del operador $p-$laplaciano (Observación 4.11) dicen que $(|\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla(v_\varepsilon - v) \to 0$ casi en todo punto de K, y esto junto con el Lema 4.10 permiten concluir que $\nabla v_\varepsilon \to \nabla v$ casi en todo punto de K. Como el conjunto K es un compacto arbitrario en Ω concluimos (6.33).

Finalmente usando (6.33), $JT_\varepsilon \to 1$ y que las componentes de la matriz DT_ε convergen a las respectivas componenetes de la matriz identidad se tiene que

$$|\nabla v_\varepsilon (DT_\varepsilon \circ T_\varepsilon^{-1})|^p JT_\varepsilon \to |\nabla v|^p, \text{ en casi todo punto de } \Omega.$$

Esto último junto con el lema de Fatou permiten concluir (6.32), queda demostrada así la desigualdad del límite inferior.

Desigualdad del límite superior

Sea $v \in X^*_\alpha$. Como $\tilde{X}^\varepsilon_\alpha \overset{M}{\to} X^*_\alpha$, existe una sucesión $\{\varepsilon_\delta\}_{\delta>0}$ con $\varepsilon_\delta \to 0$ si $\delta \to 0$ y $v_{\varepsilon_\delta} \in \tilde{X}^{\varepsilon_\delta}_\alpha$, $v_{\varepsilon_\delta} \to v$ fuerte en $W^{1,p}(\Omega)$ si $\delta \to 0$ tal que $\limsup_{\delta\to 0} \tilde{Q}_{\varepsilon_\delta}(v_{\varepsilon_\delta}) \le Q(v)$.

Ahora

$$\tilde{Q}_{\varepsilon_\delta}(v_{\varepsilon_\delta}) = \int_\Omega (|\nabla v_{\varepsilon_\delta}(DT_{\varepsilon_\delta} \circ T_{\varepsilon_\delta}^{-1})|^p + |v_{\varepsilon_\delta}|^p) JT_{\varepsilon_\delta} \, dx \tag{6.39}$$

y como $JT_{\varepsilon_\delta} \to 1$, $DT_{\varepsilon_\delta} \to Id$ y $T_{\varepsilon_\delta}^{-1} \to id$ en casi todo punto, tenemos que

$$\lim_{\delta\to 0} \tilde{Q}_{\varepsilon_\delta}(v_{\varepsilon_\delta}) = Q(v)$$

en particular se satisface la desigualdad del límite superior para el caso crítico.

6.4.3. Fin de la demostración

Tenemos entonces todas las hipótesis del Teorema 3.18, podemos entonces concluir que $\lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{\tilde{X}^\varepsilon_\alpha} \tilde{Q}_\varepsilon = \inf_{X^*_\alpha} Q$ y en consecuencia tenemos la convergencia de la mejor constante de trazas esta vez para el caso crítico a la mejor constante del problema con peso, es decir

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon(\alpha) = \lambda^*(\alpha), \quad \forall \alpha \in (0,1).$$

6.4.4. Convergencia de las ventanas optimales

Como consecuencia de la convergencia de las constantes $\lambda_\varepsilon(\alpha)$ a la constante $\lambda^*(\alpha)$ obtenemos la convergencia en casi todo punto de las correspondientes autofunciones y de las ventanas optimales reescaladas en un cierto sentido, todo esto es lo que describiremos a continuación.

Como en el caso supercrítico podemos considerar por cada ε en la expresión de $\lambda_\varepsilon(\alpha)$ a las autofunciones asociadas $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset X_\alpha^\varepsilon$. Considerando ahora las autofunciones reescaladas $v_\varepsilon = u_\varepsilon \circ T_\varepsilon^{-1} \in \tilde{X}_\alpha^\varepsilon$.

Como $\lambda_\varepsilon(\alpha)$ es convergente (luego acotada) y $\tilde{Q}_\varepsilon$ son uniformemente equicoersivos, sigue que $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es acotada en $W^{1,p}(\Omega)$. En efecto

$$\theta \|v_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \leq \tilde{Q}_\varepsilon(v_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon(\alpha) \leq C.$$

Existe por lo tanto una subsucesión de $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ que aún seguiremos denotando $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ y una función $v \in W^{1,p}(\Omega)$ de modo que

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ débil en } W^{1,p}(\Omega), \tag{6.40}$$

esto a su vez implica para esta subsucesión que

$$v_\varepsilon \to v \quad \text{fuerte en } L^p(\Omega) \tag{6.41}$$
$$v_\varepsilon \to v \quad \text{fuerte en } L^p(\partial\Omega) \tag{6.42}$$
$$v_\varepsilon \to v \quad \text{casi en todo punto en } \Omega \tag{6.43}$$
$$v_\varepsilon \to v \quad \text{casi en todo punto en } \partial\Omega. \tag{6.44}$$

Por (6.42), el Lema 6.2 se cumple que

$$\int_{\partial\Omega} |v|^p m\, dS = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial\Omega} |v_\varepsilon|^p J_\tau T_\varepsilon\, dS = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon|^p\, dS = 1.$$

Por lo tanto

$$\int_{\partial\Omega} |v|^p m\, dS = 1. \tag{6.45}$$

Vamos ahora a ver que v es una función admisible en la caracterización de $\lambda^*(\alpha)$. En efecto, por el Lema 6.2 obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu(\{v=0\}\cap\partial\Omega) &= \int_{\{v=0\}\cap\partial\Omega} m\, dS \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\{v=0\}\cap\partial\Omega} J_\tau T_\varepsilon\, dS \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\{u_\varepsilon=0\}\cap\partial\Omega_\varepsilon} dS \\
&\geq \lim_{\varepsilon\to 0} \alpha \int_{\partial\Omega} J_\tau T_\varepsilon\, dS \\
&= \alpha \int_{\partial\Omega} m\, dS = \alpha\mu(\partial\Omega).
\end{aligned}$$

En esto último se usó también el hecho de que u_ε es función admisible en la caracterización de la constante $\lambda_\varepsilon(\alpha)$.

Hemos probado entonces que $\mu(\{v = 0\} \cap \partial\Omega) \geq \alpha\mu(\partial\Omega)$ y esto junto con (6.45) dicen que v es una función admisible en la caracterización de $\lambda^*(\alpha)$, es decir, $v \in X^*_\alpha$.

Luego $\lambda^*(\alpha) \leq Q(v)$. Por otro lado, por la $\Gamma-$convergencia de $\tilde{Q}_\varepsilon$ a Q, tenemos que

$$Q(v) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \tilde{Q}_\varepsilon(v_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon(\alpha) = \lambda^*(\alpha),$$

de donde $Q(v) = \lambda^*(\alpha)$ y por ende v es un extremal.

Hemos probado así que los límites débiles de suceciones de extremales para $\lambda_\varepsilon(\alpha)$ resultan extremales para $\lambda^*(\alpha)$.

Nos ocupamos ahora de la convergencia de las ventanas optimales.

Para demostrar la convergencia de las ventanas óptimales vamos a necesitar un par de resultados que nos permitirán concluir la convergencia de las mismas.

Lema 6.10. *Sea (X, Σ, ν) un espacio de medida finita y sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, f$ funciones $\nu-$medibles no negativas. Sean $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, μ medidas absolutamente continuas con respecto a ν tales que*

- *Para todo $A \in \Sigma$, se tiene que $\mu_n(A) \to \mu(A)$.*
- *$f_n \to f$ $\nu-$c.t.p.*

Si $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\{f_n = 0\}) = \mu(\{f = 0\})$, entonces se tiene que, dado $\varepsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq j_0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\{0 < f_n \leq \frac{1}{j}\}) < \varepsilon.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\chi_{\{0<f\leq\frac{1}{j}\}} \to 0$ $\nu-$c.t.p. cuando $j \to \infty$, tenemos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(\{0 < f \leq \frac{1}{j}\}) < \varepsilon, \quad \text{para todo } j \geq j_0. \tag{6.46}$$

Como $f_n \to f$ $\nu-$c.t.p., tenemos que

$$\{f \leq \frac{1}{j}\} \supset \bigcap_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n_0} \{f_k \leq \frac{1}{j}\},$$

de donde

$$\mu(\{f \leq \frac{1}{j}\}) \geq \lim_{n_0\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k\geq n_0} \{f_k \leq \frac{1}{j}\}\right).$$

Luego, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(\{f \leq \frac{1}{j}\}) + \delta \geq \mu\left(\bigcup_{k\geq n_0} \{f_k \leq \frac{1}{j}\}\right) \tag{6.47}$$

Por nuestra hipótesis sobre la convergencia de las medidas,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n \left(\bigcup_{k\geq n_0} \{f_k \leq \frac{1}{j}\} \right) = \mu \left(\bigcup_{k\geq n_0} \{f_k \leq \frac{1}{j}\} \right),$$

de donde

$$\mu \left(\bigcup_{k\geq n_0} \{f_k \leq \frac{1}{j}\} \right) + \delta \geq \mu_n \left(\bigcup_{k\geq n_0} \{f_k \leq \frac{1}{j}\} \right) \geq \mu_n(\{f_n \leq \frac{1}{j}\}), \tag{6.48}$$

para todo n suficientemente grande.

De (6.47) y (6.48) sigue que

$$\mu(\{f \leq \frac{1}{j}\}) + 2\delta \geq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\{f_n \leq \frac{1}{j}\})$$

Como $\delta > 0$ es arbitrario, sigue que

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\{f_n \leq \frac{1}{j}\}) \leq \mu(\{f \leq \frac{1}{j}\}) \tag{6.49}$$

Ahora el lema sigue de (6.46) y (6.49) usando la hipótesis que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\{f_n = 0\}) = \mu(\{f = 0\}).$$

□

Este lema es el análogo del Lema 6.6 para el caso crítico. La dificulad acá consiste en que las medidas van variando para cada $n \in \mathbb{N}$. Esa dificultad se sortea gracias al Lema 6.10.

Lema 6.11. *Sea (X, Σ, ν) un espacio de medida finita y sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, f$ funciones $\nu-$medibles no negativas. Sean $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, μ medidas absolutamente continuas con respecto a ν tales que*

- *Para todo $A \in \Sigma$, se tiene que $\mu_n(A) \to \mu(A)$.*
- *$f_n \to f$ $\nu-$c.t.p.*

Si $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\{f_n = 0\}) = \mu(\{f = 0\})$, entonces se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\{f_n = 0\} \triangle \{f = 0\}) = 0.$$

Demostración. La demostración es análoga a la del Lema 6.6 con la ayuda del Lema 6.10. En efecto

Usando el teorema de Egoroff tenemos que para $\delta > 0$ existe un conjunto $C_\delta \subset X$ tal que

$$f_n \rightrightarrows f, \text{ si } n \to \infty \text{ sobre } X \setminus C_\delta$$

con

$$|C_\delta| < \delta.$$

Definimos ahora el conjunto $E_\delta = X \setminus C_\delta$ y usando ahora esta convergencia uniforme que tenemos sobre el conjunto E_δ, se cumple que

$$\{f_n = 0\} \cap E_\delta \subset \{f \leq \delta\} \cap E_\delta,$$

para ε suficientemente pequeño.

Tenemos entonces que

$$\{f = 0\} \setminus \{f_n = 0\} \subset ((\{f \leq \delta\} \setminus \{f_n = 0\}) \cap E_\delta) \cup C_\delta$$

de donde

$$\mu_n(\{f = 0\} \setminus \{f_n = 0\}) \leq \mu_n(\{f \leq \delta\}) - \mu_n(\{f_n = 0\}) + \delta.$$

Tomando límite, $n \to \infty$, se obtiene

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\{f = 0\} \setminus \{f_n = 0\}) \leq \mu(\{f \leq \delta\}) - \mu(\{f = 0\}) + \delta,$$

y ahora haciendo $\delta \to 0$ se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\{f = 0\} \setminus \{f_n = 0\}) = 0.$$

Por otro lado, dado $j \in \mathbb{N}$, se tiene que existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{f = 0\} \cap E_j \subset \{f_{n_j} < \frac{1}{j}\} \cap E_j,$$

donde $\nu(X \setminus E_j) \leq \frac{1}{j}$.

Luego, razonando igual que en el caso previo,

$$\limsup_{j\to\infty} \mu_{n_j}(\{f_{n_j} = 0\} \setminus \{f = 0\}) \leq \limsup_{j\to\infty} \left(\mu_{n_j}(\{f_{n_j} < \frac{1}{j}\})\right) - \mu(\{f = 0\}).$$

Pero, del Lema 6.10, sigue que

$$\mu_{n_j}(\{f_{n_j} < \frac{1}{j}\}) = \mu_{n_j}(\{f_{n_j} = 0\}) + \mu_{n_j}(\{0 < f_{n_j} < \frac{1}{j}\}) \to \mu(\{f = 0\}),$$

lo que finaliza la demostración. □

Con la ayuda del Lema 6.11 podemos demostrar la convergencia de las ventanas óptimas en el caso crítico.

Teorema 6.12. *Con las mismas hipótesis que en el Teorema 6.1 en el caso crítico $a = 1$, se tiene que las ventanas optimales Γ_ε convergen a las ventanas optimales del problema límite en el siguiente sentido: Si definimos las medidas de Radon $\{\nu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ por*

$$d\nu_\varepsilon = \chi_{\Gamma_\varepsilon} dS,$$

entonces la familia es precompacta para la topología débil de medidas y todo punto de acumulación de $\{\nu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es de la forma

$$d\nu^* = \chi_{\Gamma^*} m dS,$$

donde Γ^* es una ventana optimal para el problema (6.2) y el peso m viene dado por (6.3).

Demostración. Sea $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$ un extremal normalizado para $\lambda_\varepsilon(\alpha)$. Luego, por los resultados del Capítulo previo, tenemos que $\{u_\varepsilon = 0\} \cap \Omega_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon$ es una ventana óptima y por ende verifica que $|\Gamma_\varepsilon|_{N-1} = \alpha|\Omega_\varepsilon|_{N-1}$.

Consideremos ahora las funciones reescaladas $v_\varepsilon := u_\varepsilon \circ T_\varepsilon^{-1}$. Tenemos entonces que v_ε es un extremal asociado a $\tilde{Q}_\varepsilon$ en el conjunto $\tilde{X}_\alpha^\varepsilon$.

Al igual que en el caso supercrítico, es fácil ver que $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es acotado en $W^{1,p}(\Omega)$, luego podemos asumir (pasando eventualmente a una subsucesión) que existe $v \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} v_\varepsilon &\rightharpoonup v \quad \text{débil en } W^{1,p}(\Omega), \\ v_\varepsilon &\to v \quad \text{fuerte en } L^p(\Omega), \text{ en } L^p(\partial\Omega) \text{ y c.t.p. en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Más aún, por el Teorema 3.17, sabemos que v resulta un extremal normalizado para el problema $\lambda^*(\alpha)$ y, en particular,

$$\mu^*(\{v = 0\}) = \alpha\mu^*(\partial\Omega).$$

Por otro lado, observemos que

$$|\{u_\varepsilon = 0\} \cap \partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \chi_{\{u_\varepsilon=0\}}\, dS = \int_{\partial\Omega} \chi_{\{v_\varepsilon=0\}} J_\tau T_\varepsilon\, dS.$$

Luego, si llamamos μ_ε a la medida $d\mu_\varepsilon = J_\tau T_\varepsilon dS$ sobre $\partial\Omega$, tenemos que

$$\mu_\varepsilon(\{v_\varepsilon = 0\}) = \alpha|\partial\Omega_\varepsilon|_{N-1} = \alpha\mu_\varepsilon(\partial\Omega),$$

y como $J_\tau T_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} m$ en $L^\infty(\partial\Omega)$, tenemos que

$$\mu_\varepsilon(A) \to \mu^*(A),$$

para todo $A \subset \partial\Omega$ de Borel. En particular, $\mu_\varepsilon(\partial\Omega) \to \mu^*(\partial\Omega)$.

Toda esta discusión nos permite concluir que

$$\mu_\varepsilon(\{v_\varepsilon = 0\}) \to \mu^*(\{v = 0\}).$$

Luego, estamos en las condiciones del Lema 6.11 y concluimos que

$$\mu_\varepsilon(\{v_\varepsilon = 0\} \triangle \{v = 0\}) \to 0.$$

Ahora si estamos en condiciones de demostrar el teorema. En efecto, sea Γ_ε una ventana optimal, u_ε el extremal asociado y v_ε la función reescalada como fuera descripta anteriormente donde asumimos que $v_\varepsilon \to v$ c.t.p. de $\partial\Omega$ con v un extremal asociado a $\lambda^*(\alpha)$.

Sea $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\begin{aligned}
\int f\, d\nu_\varepsilon - \int f\, d\nu^* &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} f\chi_{\{u_\varepsilon=0\}}\, dS - \int_{\partial\Omega} f\chi_{\{v=0\}} m\, dS \\
&= \int_{\partial\Omega} (f \circ T_\varepsilon^{-1})\chi_{\{v_\varepsilon=0\}}\, d\mu_\varepsilon - \int_{\partial\Omega} f\chi_{\{v=0\}}\, d\mu^* \\
&= \int_{\partial\Omega} (\chi_{\{v_\varepsilon=0\}} - \chi_{\{v=0\}})(f \circ T_\varepsilon^{-1})\, d\mu_\varepsilon + \int_{\partial\Omega} \chi_{\{v=0\}} [(f \circ T_\varepsilon^{-1}) - f]\, d\mu_\varepsilon \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \chi_{\{v=0\}} f (d\mu_\varepsilon - d\mu^*) \\
&= A_\varepsilon + B_\varepsilon + C_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Para cada uno de esos términos es fácil ver que convergen a cero. En efecto,

$$|A_\varepsilon| \le \|f\|_\infty \mu_\varepsilon(\{v_\varepsilon = 0\} \triangle \{v = 0\}) \to 0,$$

por el Lema 6.11. Por otro lado

$$|B_\varepsilon| \le \|(f \circ T_\varepsilon^{-1}) - f\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \mu_\varepsilon(\partial\Omega) \to 0,$$

dado que $\mu_\varepsilon(\partial\Omega)$ es convergente, y por ende acotado, y $f \circ T_\varepsilon^{-1} \rightrightarrows f$ sobre compactos.

Finalmente, usando que $\mu_\varepsilon \rightharpoonup \mu^*$ en el sentido de medidas, sigue que

$$|C_\varepsilon| \to 0.$$

El Teorema queda entonces demostrado. □

Bibliografía

[1] Hedy Attouch, Giuseppe Buttazzo, and Gérard Michaille, *Variational analysis in Sobolev and BV spaces*, MPS/SIAM Series on Optimization, vol. 6, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA; Mathematical Programming Society (MPS), Philadelphia, PA, 2006, Applications to PDEs and optimization. MR 2192832 (2006j:49001) 70

[2] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2011, Corrected reprint of the 1978 original [MR0503330]. MR 2839402 62

[3] Andrea Braides, Γ*-convergence for beginners*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 22, Oxford University Press, Oxford, 2002. MR 1968440 (2004e:49001) 27

[4] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983, Théorie et applications. [Theory and applications]. MR 697382 (85a:46001) 66

[5] Doina Cioranescu and François Murat, *A strange term coming from nowhere [MR0652509 (84e:35039a); MR0670272 (84e:35039b)]*, Topics in the mathematical modelling of composite materials, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 31, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997, pp. 45–93. MR 1493040 59

[6] Leandro Del Pezzo, Julián Fernández Bonder, and Wladimir Neves, *Optimal boundary holes for the Sobolev trace constant*, J. Differential Equations **251** (2011), no. 8, 2327–2351. MR 2823670 (2012g:49102) 2, 3, 51, 54, 55, 58

[7] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR 2597943 (2011c:35002) 7, 10, 42

[8] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. MR 1158660 (93f:28001) 55

[9] Julián Fernández Bonder, Pablo Groisman, and Julio D. Rossi, *Optimization of the first Steklov eigenvalue in domains with holes: a shape derivative approach*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **186** (2007), no. 2, 341–358. MR 2295124 (2007m:35179) 70

[10] Julián Fernández Bonder, Rafael Orive, and Julio D. Rossi, *The best Sobolev trace constant in a domain with oscillating boundary*, Nonlinear Anal. **67** (2007), no. 4, 1173–1180. MR 2325371 (2008g:35010) 59

[11] Julián Fernández Bonder, Julio D. Rossi, and Noemi Wolanski, *Regularity of the free boundary in an optimization problem related to the best Sobolev trace constant*, SIAM J. Control Optim. **44** (2005), no. 5, 1614–1635 (electronic). 2

[12] ———, *On the best Sobolev trace constant and extremals in domains with holes*, Bull. Sci. Math. **130** (2006), no. 7, 565–579. 1, 2

[13] Antoine Henrot and Michel Pierre, *Variation et optimisation de formes*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], vol. 48, Springer, Berlin, 2005, Une analyse géométrique. [A geometric analysis]. MR 2512810 (2009m:49003) 61

[14] Gary M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. **12** (1988), no. 11, 1203–1219. MR 969499 (90a:35098) 46

[15] ———, *The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Ural′tseva for elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), no. 2-3, 311–361. MR 1104103 (92c:35041) 46

[16] W. Stekloff, *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique (suite et fin)*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **19** (1902), 455–490. MR 1509018 44

[17] J. L. Vázquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. **12** (1984), no. 3, 191–202. MR 768629 (86m:35018) 44, 46, 54