
Lista de ejercicios número 3

MÉTODOS VARIACIONALES

---

1. Hallar $L = L(p, z, x)$ tal que la ecuación diferencial

$$-\Delta u + D\phi \cdot Du = f \qquad \text{en } \Omega,$$

sea la ecuación de Euler-Lagrange del funcional

$$I(w) = \int_\Omega L(Dw, w, x)\, dx.$$

En este problema, $\phi, f : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones regulares dadas.

---

2. La *regularización elíptica* de la ecuación del calor es

$$u_t - \Delta u - \varepsilon u_{tt} = 0 \qquad \text{en } \Omega \times (0, T], \tag{$\star$}$$

donde $\varepsilon > 0$. Mostrar que $(\star)$ es la ecuación de Euler-Lagrange asociada a un funcional de energía

$$I_\varepsilon(w) = \int_0^T \int_\Omega L_\varepsilon(Dw, w_t, w, x, t)\, dx\, dt.$$

---

3. Explicar por qué los métodos variacionales no funcionan para probar la existencia de un minimizante del funcional

$$I(w) = \int_\Omega \left(1 + |Dw|^2\right)^{1/2}\, dx$$

sobre $\mathcal{A} = \{w \in W^{1,q}(\Omega) \,|\, w = g \text{ en } \partial\Omega\}$, para algún $1 \leq q < \infty$.

---

4. Sea $1 < p < \infty$. Probar que existe una única solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $f \in L^{p'}(\Omega)$ es dada y $\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du)$ es el $p-$laplaciano. Verificar que además se tiene la estimación

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'/p}.$$

---

5. Probar, minimizando un funcional adecuado, que existe una solución débil no trivial del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $0 < p < 1$.

---

6. Sea $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano de clase C^2 y asumamos que u es un minimizante del funcional

$$I(v) := \int_U L(Dv, v, x)\, dx.$$

Usar el hecho de que si $i(t) := I(u + t\phi)$ entonces $i''(0) \geq 0$ para deducir que

$$\sum_{i,j=1}^{n} L_{p_i p_j}(Du, u, x)\xi_i \xi_j \geq 0 \ (\xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in U).$$

Sugerencia: Usar las funciones test

$$\phi_\epsilon(x) := \epsilon\rho\left(\frac{x \cdot \xi}{\epsilon}\right)\zeta(x) \quad (x \in U),$$

donde $\zeta \in C_c^\infty(U)$ y $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función "zig-zag" periódica, definida por:

$$\rho(s) = \begin{cases} s & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 1 - s & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases},\ \rho(s+1) = \rho(s)\ (s \in \mathbb{R}).$$

---

7. Sea $u \in H^1(U)$ una solución débil de

$$-\sum_{i=1}^{n} (L_{p_i}(Du))_{x_i} = f \quad \text{en } U,$$

donde L verifica:

$$L = L(p), \quad |D^2 L(p)| \leq C\ (p \in \mathbb{R}^n), \quad \sum_{i,j=1}^{n} L_{p_i p_j}(p)\xi_i \xi_j \geq \theta|\xi|^2\ (p, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Probar que $u \in H^2_{loc}(U)$.

---

8. Sea $\mathcal{A} := \{w \in H_0^1(U) \,|\, w \geq h \text{ c.t.p. } U\}$ donde $h : U \to \mathbb{R}$ es una función regular llamada el *obstáculo*. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ regular y asumamos que el conjunto de funciones admisibles $\mathcal{A}$ es no vacío. Probar que existe una única función $u \in \mathcal{A}$ que verifica

$$I(u) = \inf_{w \in \mathcal{A}} I(w),$$

donde

$$I(w) := \int_U \frac{1}{2}|Dw|^2 - fw\, dx.$$

---

9. Con la notación del ejercicio anterior, probar que u verifica la siguiente *desigualdad variacional*

$$\int_u Du \cdot D(w-u)\,dx \geq \int_U f(w-u)\,dx,$$

para toda $w \in \mathcal{A}$.

---

10. Con la notación del ejercicio 8, probar que si $u \in W^{2,\infty}(U)$ se tiene que

$$O := \{x \in U \mid u(x) > h(x)\}$$

es abierto, y

$$C := \{x \in U \mid u(x) = h(x)\}$$

es (relativamente) cerrado. Más aún, probar que $u \in C^\infty(O)$,

$$-\Delta u = f \qquad \text{en } O$$

y

$$-\Delta u \geq f \qquad \text{c.t.p. } U.$$

---

11. Probar que existe un único minimizante $u \in \mathcal{A}$ de

$$I(w) := \int_U \frac{1}{2}|Dw|^2 - fw\,dx.$$

donde $f \in L^2(U)$ y

$$\mathcal{A} := \{w \in H_0^1(U) \mid |Dw| \leq 1 \text{ c.t.p.}\}.$$

Probar luego que u verifica

$$\int_u Du \cdot D(w-u)\,dx \geq \int_U f(w-u)\,dx,$$

para toda $w \in \mathcal{A}$.

---

12. Probar, usando el Teorema del Paso de la Montaña, que existe una solución débil no trivial de la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es regular y, para algún $1 < p < 2^* - 1$ verifica

$$|f(s)| \leq C(1+|s|^p), \qquad |f'(s)| \leq C(1+|s|^{p-1})$$

con $C > 0$ una constante. Además, existe $\gamma < \frac{1}{2}$ tal que

$$0 \leq F(s) \leq \gamma f(s)s$$

donde $F(s) = \int_0^s f(t)\,dt$ y, finalmente,

$$a|s|^{p+1} \leq F(s) \leq A|s|^{p+1}.$$

En el siguiente ejercicio hay que usar el siguiente teorema (Teorema de trazas)

Teorema 1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto con borde suave y sea $1 \leq p < 2_* := \frac{2(N-1)}{N-2}$. Entonces se tiene que*

$$L^p(\partial\Omega) \subset\subset H^1(\Omega).$$

13. (a) Probar que $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = |u|^{p-2}u & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

si y sólo si es un punto crítico del funcional

$$I(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Dw|^2 + |w|^2\,dx - \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} |w|^p\,dS.$$

(b) Probar que el funcional I dado en (a) tiene un punto crítico si $p \neq 2$. (Sugerencia: separar en casos $1 < p < 2$ y $p > 2$). ¿Qué sucede si $p = 2$?

---

14. Usar el método de los multiplicadores de Lagrange para probar la existencia de una solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $1 < p < 2^*$, $p \neq 2$. ¿Y si $p = 2$?
