

Lista de ejercicios número 2

ECUACIONES LINEALES

1. Sea

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + cu,$$

donde la matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ es uniformemente elíptica y $c \in L^\infty(U)$.

Pruebe que existe una constante $\mu > 0$ tal que la correspondiente forma bilinear $B[\cdot, \cdot]$ satisface las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram si

$$c(x) \geq -\mu \quad \text{c.t.p. } U.$$

2. Hallar una formulación débil para la ecuación bi-armónica

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } U \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

donde $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.

Probar existencia y unicidad de soluciones débiles para ese problema.

3. Supongamos que U es conexo. Dar una definición de solución débil para el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

Probar que existe solución débil para este problema si y sólo si

$$\int_U f \, dx = 0.$$

¿Qué puede decir sobre la unicidad?

4. Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto una solución débil de

$$-\Delta u + c(u) = f \quad \text{en } \mathbb{R}^n,$$

donde $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 con $c(0) = 0$ y $c' \geq 0$.

Pruebe que $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

5. Estudie el problema de autovalores de Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

6. De una definición de solución débil para el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = f & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

donde $f \in L^2(\partial\Omega)$. Pruebe que este problema tiene solución si y sólo si

$$\int_{\partial U} f \, dS = 0.$$

¿Qué puede decir de la unicidad?

7. Estudie el problema de autovalores de Steklov:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

8. Probar el principio de min-max de Courant:

Si $L := -\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_{x_j}$, donde la matriz (a_{ij}) es simétrica y uniformemente elíptica. Asumamos que el operador L con condiciones de borde Dirichlet tiene autovalores $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$. Pruebe que

$$\lambda_k = \max_{S \in \Sigma_{k-1}} \min_{\substack{u \in S^\perp \\ \|u\|_{L^2(U)} = 1}} B[u, u], \quad k = 1, 2, \dots$$

9. Probar que la solución de la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } U \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{en } \partial U \times (0, \infty) \\ u = \phi & \text{en } U \times \{0\} \end{cases}$$

verifica que

$$u \rightarrow v$$

donde v es la solución de

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

¿En qué sentido es la convergencia?

En particular, si $f = 0$, se tiene que $u \rightarrow 0$.

10. Probar que la solución de la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } U \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial U \times (0, \infty) \\ u = \phi & \text{en } U \times \{0\} \end{cases}$$

verifica que

$$u \rightarrow \int_U \phi \, dx.$$

¿En qué sentido es la convergencia? Dar una interpretación física.
