

Índice General

1	Espacios vectoriales	1
1.1	Espacios vectoriales y subespacios	1
1.1.1	Preliminares	1
1.1.2	Espacios vectoriales	5
1.1.3	Subespacios	7
1.1.4	Sistemas de generadores	10
1.2	Sistemas de ecuaciones lineales	12
1.2.1	Sistemas lineales homogéneos	13
1.2.2	Método de triangulación	13
1.2.3	Cantidad de soluciones de un sistema homogéneo	17
1.2.4	Sistemas lineales no homogéneos.	19
1.3	Independencia lineal y bases	23
1.3.1	Independencia lineal	23
1.3.2	Bases y dimensión	27
1.4	Suma de subespacios	31
1.4.1	Subespacio suma	31
1.4.2	Suma directa	34
1.5	Ejercicios	36
2	Matrices	47
2.1	Definiciones y propiedades	47
2.2	Matrices inversibles	50
2.3	Matrices elementales	53
2.4	Coordenadas	55
2.4.1	Coordenadas de un vector en una base	55
2.4.2	Cambios de base	56

2.5	Ejercicios	59
3	Transformaciones lineales	65
3.1	Definiciones, ejemplos y propiedades básicas	65
3.1.1	Transformaciones lineales	65
3.1.2	Núcleo e imagen de una transformación lineal	68
3.1.3	Composición de transformaciones lineales	71
3.2	Espacios vectoriales de dimensión finita	72
3.3	Teorema de la dimensión	73
3.4	Proyectores	75
3.5	Representación matricial	76
3.5.1	Matriz de una transformación lineal	77
3.5.2	Matriz de la composición y cambios de bases	78
3.6	Rango de una matriz	79
3.6.1	Rango columna y rango fila	79
3.6.2	Equivalencia de matrices	82
3.7	Espacios vectoriales de transformaciones lineales	83
3.8	Ejercicios	85
4	Espacio dual	95
4.1	El espacio dual de un espacio vectorial	95
4.2	Base dual	96
4.3	Anulador de un subespacio	99
4.4	Ejercicios	102
5	Determinantes	107
5.1	Definición y ejemplos básicos	107
5.1.1	Funciones multilineales alternadas	107
5.1.2	Existencia y unicidad del determinante	110
5.2	Propiedades del determinante	115
5.2.1	Determinante de la transpuesta de una matriz	115
5.2.2	Matrices triangulares	115
5.2.3	Desarrollo del determinante por una fila o columna	117
5.2.4	Determinante del producto de matrices	118
5.3	Determinantes y matrices inversibles	119
5.3.1	Inversibilidad de matrices	119
5.3.2	Adjunta de una matriz	119

5.3.3	Regla de Cramer	121
5.4	Cálculo de algunos determinantes	122
5.5	Rango de una matriz y determinante	124
5.6	Otra fórmula para el determinante	126
5.7	Ejercicios	127
6	Diagonalización	133
6.1	Nociones básicas	133
6.1.1	Autovalores y autovectores	134
6.1.2	Polinomio característico	136
6.2	Una caracterización de matrices diagonalizables	137
6.2.1	Suma directa de subespacios	137
6.2.2	Espacios de autovectores y diagonalización	139
6.3	Polinomios minimales	142
6.3.1	Polinomio minimal de una matriz	142
6.3.2	Polinomio minimal de un vector	146
6.3.3	Teorema de Hamilton-Cayley	148
6.3.4	Un criterio de diagonalización usando el polinomio minimal	151
6.4	Subespacios invariantes	153
6.5	Ejercicios	156
7	Forma de Jordan	163
7.1	Transformaciones lineales nilpotentes	163
7.1.1	Definiciones y propiedades básicas	163
7.1.2	Existencia de forma de Jordan para una transformación lineal nilpotente	165
7.1.3	Unicidad de la forma de Jordan nilpotente. Semejanza	169
7.2	Caso general	172
7.2.1	Forma de Jordan de una transformación lineal	173
7.2.2	Unicidad de la forma de Jordan	178
7.3	Aplicación: Cálculo de las potencias de una matriz	182
7.4	Ejercicios	184
8	Espacios vectoriales con producto interno	189
8.1	Producto interno	189
8.1.1	Definición y ejemplos	189
8.1.2	Norma de un vector	191
8.1.3	Distancia entre vectores	193

8.1.4	Ángulo entre dos vectores	194
8.1.5	Matriz de un producto interno	194
8.2	Ortogonalidad	195
8.2.1	Conjuntos ortogonales y ortonormales	195
8.2.2	Complemento ortogonal	201
8.2.3	Proyección ortogonal	203
8.2.4	Distancia de un punto a un subespacio	204
8.3	Endomorfismos en espacios vectoriales con producto interno	206
8.3.1	Adjunta de una transformación lineal	206
8.3.2	Transformaciones autoadjuntas y matrices hermitianas	209
8.3.3	Transformaciones unitarias y ortogonales	212
8.3.4	Clasificación de transformaciones ortogonales	214
8.4	Ejercicios	222
9	Variedades lineales	231
9.1	Nociones básicas	231
9.1.1	Variedades lineales	231
9.1.2	Algunas variedades lineales particulares	233
9.1.3	Otra forma de describir variedades lineales	235
9.2	Intersección y suma de variedades lineales	235
9.2.1	Intersección de variedades lineales	235
9.2.2	Variedades lineales paralelas y alabeadas	236
9.2.3	Suma de variedades lineales	238
9.3	Variedades lineales en espacios con producto interno	239
9.3.1	Ortogonalidad de variedades lineales	240
9.3.2	Ángulo entre rectas y planos	240
9.3.3	Distancia de un punto a una variedad lineal	241
9.3.4	Distancia entre variedades lineales	242
9.4	Ejercicios	244
10	Formas bilineales	249
10.1	Definición y ejemplos	249
10.2	Matriz de una forma bilineal	250
10.3	Formas bilineales simétricas	252
10.3.1	Definiciones y propiedades básicas	252
10.3.2	Diagonalización de formas bilineales simétricas	253
10.4	Formas bilineales simétricas reales	256

10.4.1	Clasificación	256
10.4.2	Formas bilineales definidas positivas	260
10.5	Ejercicios	262
	Bibliografía	265
	Índice Alfabético	266