Capítulo 4

Espacio dual

Una de las situaciones en donde se aplica la teoría de espacios vectoriales es cuando se trabaja con espacios de funciones, como vimos al final del capítulo anterior. En este capítulo estudiaremos algunas nociones básicas de ciertos espacios que de alguna forma le dan una estructura a las ecuaciones lineales.

4.1 El espacio dual de un espacio vectorial

Definición 4.1 Sea V un K-espacio vectorial. Se llama *espacio dual de* V, y se lo nota V^*, al K-espacio vectorial

$$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K) = \{f : V \to K \ / \ f \text{ es una transformación lineal}\}.$$

Según vimos en la Sección 3.7, si $\dim V = n$, dadas B una base de V y B' una base de K, se tiene que $\Gamma : \mathrm{Hom}_K(V, K) \to K^{1\times n}$ definida por $\Gamma(f) = |f|_{BB'}$, es un isomorfismo. En consecuencia,

$$\dim(V^*) = \dim(K^{1\times n}) = n = \dim V.$$

Ejemplo. Se consideran las transformaciones lineales $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$ definidas por $\delta_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$ para $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^3)^* &= \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es transformación lineal }\} \\
&= \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ / \ f(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}\} \\
&= \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ / \ f = a\,\delta_1 + b\,\delta_2 + c\,\delta_3 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}\} \\
&= < \delta_1, \delta_2, \delta_3 >
\end{aligned}$$

4.2 Base dual

Sea $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Las funciones del ejemplo anterior cumplen la condición $\delta_i(e_j) = \delta_{ij}$ (donde δ_{ij} es la función delta de Kronecker, definida por $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$). En lo que sigue, fijada una base de cualquier espacio vectorial V de dimensión finita, vamos a ver cómo encontrar una base de V^* que cumpla esta propiedad.

Proposición 4.2 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Existe una única base $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de V^* tal que*

$$\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \textit{si } i = j \\ 0 & \textit{si } i \neq j \end{cases}$$

B^* se llama la base dual *de B.*

Demostración. Para cada $1 \leq i \leq n$, sea $\varphi_i : V \to K$ la transformación lineal definida en la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ por:

$$\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Como $\dim(V^*) = n$, para ver que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$ forman una base de V^*, basta verificar que son linealmente independientes. Sean $a_1, \ldots, a_n \in K$ tales que

$$a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n = 0.$$

Evaluando en v_i, resulta que $0 = a_1\varphi_1(v_i) + \cdots + a_i\varphi_i(v_i) + a_n\varphi_n(v_i) = a_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

En consecuencia, $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ verifica las condiciones requeridas.

Supongamos que $\{\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n\}$ sea otra base que satisface las mismas condiciones. Entonces, para cada $1 \leq i \leq n$, se tiene que

- $\widetilde{\varphi}_i(v_j) = 0 = \varphi_i(v_j)$ si $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$,
- $\widetilde{\varphi}_i(v_i) = 1 = \varphi_i(v_i) = 1$,

es decir, $\widetilde{\varphi}_i$ y φ_i son dos transformaciones lineales que coinciden sobre una base. En consecuencia, $\widetilde{\varphi}_i = \varphi_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. □

Ejemplos.

1. El ejemplo de la Sección 4.1 muestra que la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $E^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, donde $\delta_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$ para $i = 1, 2, 3$.

2. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Consideremos la base $B = \{(1,1), (1,-1)\}$. Si $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ es la base dual de B, entonces debe cumplir

$$\begin{cases} \varphi_1(1,1) & = & 1 \\ \varphi_1(1,-1) & = & 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \varphi_2(1,1) & = & 0 \\ \varphi_2(1,-1) & = & 1 \end{cases}$$

Puesto que para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vale

$$(x, y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1)$$

resulta que $\varphi_1(x, y) = \dfrac{x+y}{2}$ y $\varphi_2(x, y) = \dfrac{x-y}{2}$.

Si B es una base de un K-espacio vectorial V de dimensión finita y B^* es su base dual, es posible calcular fácilmente las coordenadas de un elemento de V en la base B utilizando la base B^*. Recíprocamente, utilizando la base B, es fácil obtener las coordenadas en la base B^* de un elemento de V^*.

Observación 4.3 Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y sea $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ su base dual.

- Dado $v \in V$, podemos escribir $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, con $\alpha_i \in K$. Entonces, para cada $1 \le j \le n$,

$$\varphi_j(v) = \varphi_j\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_j(v_i) = \alpha_j.$$

  Luego, $(v)_B = (\varphi_1(v), \ldots, \varphi_n(v))$.

- Dada $\varphi \in V^*$, existen $\beta_i \in K$ tales que $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i$. Entonces, para cada $1 \le j \le n$,

$$\varphi(v_j) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i\Big)(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i(v_j) = \beta_j.$$

  Luego, $(\varphi)_{B^*} = (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$.

Ejemplo. Sean $B = \{(1,1), (1,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$ y $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, con $\varphi_1(x, y) = \dfrac{x+y}{2}$ y $\varphi_2(x, y) = \dfrac{x-y}{2}$, su base dual (ver Ejemplo 2. en la página 96).

1. Hallar las coordenadas del vector $v = (5, 7) \in \mathbb{R}^2$ en la base B.

   Teniendo en cuenta que B^* es la base dual de B, por la observación anterior resulta que

$$(5, 7)_B = (\varphi_1(5, 7), \varphi_2(5, 7)) = (6, -1).$$

2. Hallar las coordenadas de $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$ dada por $\varphi(x, y) = 5x + 3y$ en la base B^*.

   Por el segundo ítem de la observación anterior tenemos que:

$$(\varphi)_{B^*} = (\varphi(1, 1), \varphi(-1, 1)) = (8, -2).$$

Hemos visto que toda base de un K-espacio vectorial V de dimensión finita posee una base dual asociada. Recíprocamente, resulta que toda base de V^* es la base dual de una base de V:

Proposición 4.4 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, y sea V^* su espacio dual. Sea $B_1 = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ una base de V^*. Entonces existe una única base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V que satisface $B^* = B_1$.*

Demostración.

Existencia. Sea $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de V y sea B_2^* su base dual.

Para cada $1 \le i \le n$, se tiene que $(\varphi_i)_{B_2^*} = (\varphi_i(w_1), \ldots, \varphi_i(w_n))$. Como $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente y tomar coordenadas es un isomorfismo, resulta que $\{(\varphi_1)_{B_2^*}, \ldots, (\varphi_n)_{B_2^*}\} \subset K^n$ es linealmente independiente. En consecuencia, la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_1(w_1) & \cdots & \varphi_1(w_n) \\ \varphi_2(w_1) & \cdots & \varphi_2(w_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n(w_1) & \cdots & \varphi_n(w_n) \end{pmatrix}$$

es inversible (sus filas son linealmente independientes).

Sea $A = (a_{ij})$ su inversa. Entonces $M.A = I_n$, de donde, para cada $1 \le i, j \le n$,

$$\delta_{ij} = (I_n)_{ij} = (M.A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \varphi_i(w_k) a_{kj} = \varphi_i\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} w_k\Big).$$

Para cada $1 \le j \le n$, sea $v_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} w_k$.

Por construcción, es claro que vale $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ para cada $1 \le i, j \le n$. Queda por ver que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V. Como $\dim V = \dim V^* = n$, basta ver que este conjunto es linealmente independiente. Ahora, si $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0$, para cada $1 \le i \le n$, se tiene que

$$0 = \varphi_i\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_i(v_j) = \alpha_i,$$

lo que prueba la independencia lineal.

Unicidad. Supongamos que $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{u_1, \ldots, u_n\}$ son dos bases de V tales que $B^* = (B')^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Entonces, para cada $1 \le i \le n$,

$$(u_i)_B = (\varphi_1(u_i), \ldots, \varphi_n(u_i)) = e_i = (v_i)_B,$$

de donde $u_i = v_i$. $\square$

Ejemplo. Sea $V = \mathbb{R}_2[X]$. Sean $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (\mathbb{R}^2[X])^*$ definidas por $\varepsilon_0(P) = P(0)$, $\varepsilon_1(P) = P(1)$ y $\varepsilon_2(P) = P(2)$.

Veamos que $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$: Como $\dim(\mathbb{R}_2[X])^* = 3$, basta ver que son linealmente independientes. Supongamos que $\alpha_0\varepsilon_0 + \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 = 0$. Entonces para cada $P \in \mathbb{R}_2[X]$, se tiene que $(\alpha_0\varepsilon_0 + \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2)(P) = 0$ o, equivalentemente,

$$\alpha_0\varepsilon_0(P) + \alpha_1\varepsilon_1(P) + \alpha_2\varepsilon_2(P) = 0.$$

Tomando $P = (X-1)(X-2)$ y evaluando, resulta que $\alpha_0 = 0$. De la misma manera, para $P = X(X-2)$ y $P = X(X-1)$ se obtiene $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$ respectivamente. Luego, $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.

Entonces, por la proposición anterior, existe una única base $B = \{P_0, P_1, P_2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $B^* = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Hallemos esta base: El polinomio P_0 debe satisfacer las condiciones

$$\begin{cases} P_0(0) &= 1 \\ P_0(1) &= 0 \\ P_0(2) &= 0 \end{cases}$$

con lo que $P_0 = \dfrac{(X-1)(X-2)}{(-1)(-2)} = \dfrac{1}{2}(X-1)(X-2)$. Análogamente se calculan los otros dos elementos de la base: $P_1 = -X(X-2)$ y $P_2 = \dfrac{1}{2}X(X-1)$.

Si se quiere hallar un polinomio $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tal que $P(0) = \alpha$, $P(1) = \beta$ y $P(2) = \gamma$, basta tener en cuenta que esto equivale a que

$$(P)_{\{P_0,P_1,P_2\}^*} = (\alpha, \beta, \gamma),$$

puesto que $\{P_0, P_1, P_2\}^* = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Luego, $P = \alpha.P_0 + \beta.P_1 + \gamma.P_2$.

Nótese que este polinomio P hallado es el único polinomio de grado menor o igual que 2 que cumple lo pedido (polinomio interpolador de Lagrange).

4.3 Anulador de un subespacio

En lo que sigue vamos a relacionar los subespacios de V con ciertos subespacios de V^*. Esencialmente, dado un subespacio S de V consideraremos el conjunto de todas las ecuaciones lineales que se anulan en S y veremos que tiene una estructura de subespacio.

Definición 4.5 Sea V un K-espacio vectorial y sea S un subespacio de V. Se llama *anulador* de S al conjunto

$$S^\circ = \{f \in V^* \;/\; f(s) = 0 \;\forall\, s \in S\} = \{f \in V^* \;/\; S \subseteq \mathrm{Nu}(f)\}.$$

Observación 4.6 S° es un subespacio de V^*.

En efecto:

- Es claro que $0 \in S^\circ$.
- Si $f, g \in S^\circ$, entonces $f(s) = 0$ y $g(s) = 0$ para todo $s \in S$, de donde $(f+g)(s) = f(s) + g(s) = 0$ para todo $s \in S$. Luego, $f + g \in S^\circ$.
- Si $\lambda \in K$ y $f \in S^\circ$, entonces $(\lambda \cdot f)(s) = \lambda \cdot f(s) = \lambda \cdot 0 = 0$ para todo $s \in S$, puesto que $f(s) = 0$ para cada $s \in S$. Luego $\lambda \cdot f \in S^\circ$.

En el caso de un K-espacio vectorial de dimensión finita, existe una relación entre las dimensiones de un subespacio y su anulador.

Proposición 4.7 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea S un subespacio de V. Entonces* $\dim(S^\circ) = n - \dim S$.

Demostración. Sea $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base de S, y sean $v_{r+1}, \dots, v_n \in V$ tales que $B = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base de V. Sea $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n\} \subset V^*$ la base dual de B. Entonces, para cada $r + 1 \le i \le n$, se tiene que $\varphi_i(v_1) = \ldots = \varphi_i(v_r) = 0$ y, por lo tanto, φ_i se anula sobre todo S. En consecuencia, $\{\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n\} \subseteq S^\circ$.

Como $\{\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n\}$ es parte de una base, es un conjunto linealmente independiente. Veamos que también es un sistema de generadores de S°:

Sea $g \in S^\circ$. Puesto que B^* es una base de V^*, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tales que $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$. Por la Observación 4.3, para cada $1 \le i \le n$, se tiene que $\alpha_i = g(v_i)$. Además, como $g \in S^\circ$ y $\{v_1, \dots, v_r\}$ es una base de S, $g(v_i) = 0$ para cada $1 \le i \le r$. En consecuencia, $\alpha_i = 0$ para cada $1 \le i \le r$, y por lo tanto $g \in < \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n >$.

Luego, $\{\varphi_{r+1} \dots, \varphi_n\}$ es una base de S°, de donde

$$\dim S + \dim S^\circ = n. \qquad \square$$

La demostración de la proposición anterior nos da una manera de calcular el anulador de un subespacio:

Ejemplo. Sea $S = < (1, 1, 1), (1, 2, 1) > \subseteq \mathbb{R}^3$. Hallar una base de S°.

Consideramos una base B de $\mathbb{R}^3$ que extienda a una base de S, por ejemplo

$$B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 0, 0)\}.$$

Si $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es la base dual de B, de la demostración anterior deducimos que $\{\varphi_3\}$ es una base de S°. A partir de las condiciones $\varphi_3(1, 1, 1) = 0$, $\varphi_3(1, 2, 1) = 0$, $\varphi_3(1, 0, 0) = 1$ obtenemos que $\varphi_3(x, y, z) = x - z$.

En la siguiente proposición veremos cómo recuperar un subespacio a partir de su anulador.

Proposición 4.8 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea S un subespacio de V. Entonces*

$$\{x \in V \,/\, f(x) = 0 \ \forall f \in S^\circ\} = S.$$

Demostración. Sea $T = \{x \in V \ / \ f(x) = 0 \ \forall f \in S^\circ\}$. Veamos que $T = S$.

($\supseteq$) Si $x \in S$, para cada $f \in S^\circ$ se tiene que $f(x) = 0$. Luego, $x \in T$.

($\subseteq$) Supongamos que existe $x \in T$ tal que $x \notin S$.

Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de S. Entonces $\{v_1, \ldots, v_r, x\}$ es linealmente independiente. Sean $v_{r+2}, \ldots, v_n \in V$ tales que $B = \{v_1, \ldots, v_r, x, v_{r+2}, \ldots, v_n\}$ es una base de V. Si $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n\}$ es la base dual de B, se tiene que $\varphi_{r+1}(v_1) = \ldots = \varphi_{r+1}(v_r) = 0$, de donde $\varphi_{r+1} \in S^\circ$.

Como $x \in T$, debe ser $\varphi_{r+1}(x) = 0$, lo que contradice que, por construcción, vale $\varphi_{r+1}(x) = 1$.

Luego, $T \subseteq S$. $\square$

Este resultado nos da otra forma de encontrar ecuaciones para un subespacio:

Ejemplo. Sea $S = < (1, 1, 1), (1, 2, 1) > \subseteq \mathbb{R}^3$. Hallar ecuaciones para S.

En el ejemplo anterior vimos que $S^\circ = < \varphi_3 > \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$, donde $\varphi_3(x, y, z) = x - z$. Entonces, por la Proposición 4.8,

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x, y, z) = 0 \ \forall f \in S^\circ\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \lambda.(x - z) = 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - z = 0\}. \end{aligned}$$

Más en general, podemos enunciar el siguiente resultado.

Observación 4.9 Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea S un subespacio de V. Sea $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ una base de S°. Entonces

$$S = \{v \in V \ / \ \varphi_1(v) = 0 \wedge \ldots \wedge \varphi_r(v) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Nu}(\varphi_i).$$

Para terminar, vamos a ver cómo se comporta el anulador con la suma y la intersección de subespacios.

Proposición 4.10 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n. Sean S y T subespacios de V. Entonces:*

1. $(S + T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$.
2. $(S \cap T)^\circ = S^\circ + T^\circ$.

Demostración.

1. Sea $f \in V^*$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} f \in (S+T)^\circ &\iff f(s+t) = 0 \quad \forall\, s \in S,\ \forall\, t \in T \\ &\iff f(s) = 0 \quad \forall\, s \in S \quad \wedge \quad f(t) = 0 \quad \forall\, t \in T \\ &\iff f \in S^\circ \cap T^\circ \end{aligned}$$

2. Sea $f \in S^\circ + T^\circ$. Entonces $f = f_S + f_T$, con $f_S \in S^\circ$ y $f_T \in T^\circ$. Para cada $x \in S \cap T$, se tiene que $f(x) = f_S(x) + f_T(x) = 0 + 0 = 0$. Luego, $f \in (S \cap T)^\circ$. Por lo tanto, $S^\circ + T^\circ \subseteq (S \cap T)^\circ$.

   Además, por el teorema de la dimensión para la suma de subespacios, la Proposición 4.7 y el hecho que $S^\circ \cap T^\circ = (S+T)^\circ$, resulta que

$$\begin{aligned} \dim(S^\circ + T^\circ) &= \dim S^\circ + \dim T^\circ - \dim(S^\circ \cap T^\circ) \\ &= \dim S^\circ + \dim T^\circ - \dim(S+T)^\circ \\ &= (n - \dim S) + (n - \dim T) - (n - \dim(S+T)) \\ &= n - (\dim S + \dim T - \dim(S+T)) \\ &= n - \dim(S \cap T) \\ &= \dim(S \cap T)^\circ. \end{aligned}$$

   En consecuencia, $(S \cap T)^\circ = S^\circ + T^\circ$. $\square$

4.4 Ejercicios

Ejercicio 1. Sea $S \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ el subespacio $S = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* \,/\, \varphi(1,-1,2) = 0\}$. Encontrar una base de S.

Ejercicio 2. Dada la base B del K-espacio vectorial V, hallar su base dual en cada uno de los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^2,\ B = \{(1,-1),(2,0)\}$

ii) $V = \mathbb{R}^3,\ B = \{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

iii) $V = \mathbb{R}_3[X],\ B = \{-X+2,\ X-1,\ X^2-3.X+2,\ X^3-3.X^2+2.X\}$

Ejercicio 3. Sea $B' = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ definida por

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 \qquad \varphi_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_3 \qquad \varphi_3(x_1,x_2,x_3) = x_2 + x_3$$

Hallar la base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $B' = B^*$.

Ejercicio 4. Sean f_1, f_2 y $f_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$ las siguientes formas lineales:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx \qquad f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx \qquad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)\,dx$$

i) Probar que $\{f_1,\ f_2,\ f_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.

ii) Hallar una base B de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $B^* = \{f_1,\ f_2,\ f_3\}$.

Ejercicio 5. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n.

i) Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in V^* - \{0\}$. Demostrar que $\mathrm{Nu}(\varphi_1) = \mathrm{Nu}(\varphi_2) \iff \{\varphi_1, \varphi_2\}$ es linealmente dependiente.

ii) Sean φ_i $(1 \le i \le r)$ formas lineales en V^* y sea $\varphi \in V^*$ tales que

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \ldots = \varphi_r(x) = 0 \ \Rightarrow\ \varphi(x) = 0.$$

Probar que $\varphi \in <\varphi_1, \ldots, \varphi_r>$.

iii) Sean φ_i $(1 \le i \le n)$ formas lineales en V^*. Probar que

$$\{\,\varphi_1, \ldots, \varphi_n\,\} \ \text{ es base de } V^* \iff \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Nu}(\varphi_i) = 0.$$

Ejercicio 6. Sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2.x_1 + 3.x_2 - x_3$ y sea $E^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ la base dual de la canónica.

i) Calcular las coordenadas de φ en E^*.

ii) Calcular las coordenadas de φ en la base $B^* = \{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_2, \delta_1\}$.

iii) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 /\, 2.x_1 + 3.x_2 - x_3 = 0\}$ y sea $B \subset \mathbb{R}^3$ la base $B = \{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 0)\}$. Encontrar una ecuación para S en la base B.

(Sugerencia: notar que B^* es la base dual de B y no hacer ninguna cuenta.)

Ejercicio 7. Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ la base $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$. Encontrar las coordenadas de la base dual de B en la base dual de la canónica.

Ejercicio 8. Sean B y B_1 las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas por $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ y $B_1 = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$. Si $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ tiene coordenadas $(1, -3, 2)$ respecto de B^*, calcular sus coordenadas respecto de B_1^*.

Ejercicio 9. Hallar una base de $S^\circ \subseteq V^*$ en los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = <(1, -1, 2), (2, 1, 3), (1, 5, 0)>$

ii) $V = \mathbb{R}^4$ y $S = <(1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1)>$

iii) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2.x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}\right\}$

iv) $V = \mathbb{R}^4$ y $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2.x_1 + x_2 - 2.x_3 + 3.x_4 = 0 \\ 4.x_1 - x_2 + 5.x_4 = 0 \end{cases} \right\}$

Ejercicio 10. Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y sea $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / \, A.B = 0\}$. Sea $f \in W^\circ$ tal que $f(I_2) = 0$ y $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Calcular $f(B)$.

Ejercicio 11. Para los siguientes subespacios S y T de V, determinar una base de $(S+T)^\circ$ y una base de $(S \cap T)^\circ$.

i) $V = \mathbb{R}^4$, $S = <(1,1,-1,1),(2,-1,3,1)>$, $T = <(2,-4,8,0),(-1,1,2,3)>$

ii) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$, $T = <(2,1,3,1)>$

iii) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \,/\, \begin{cases} x_1 - 2.x_2 + x_3 = 0 \\ 3.x_2 - 2.x_3 = 0 \end{cases} \right\}$,

$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / \, 2.x_1 - x_2 = 0\}$

Ejercicio 12. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios tales que $V = S \oplus T$. Probar que $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$.

Ejercicio 13. Sea V un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial de dimensión n. Probar que

$$\#\{S \subseteq V \text{ subespacio} / \dim(S) = 1\} = \#\{S \subseteq V \text{ subespacio} / \dim(S) = n-1\}.$$

Calcular dicho número.

Ejercicio 14. Sea $tr : K^{n\times n} \to K$ la forma lineal traza y dado $a \in K^{n\times n}$ se define $f_a : K^{n\times n} \to K$ como $f_a(x) = tr(a.x)$.

i) Probar que $f_a \in (K^{n\times n})^* \; \forall a \in K^{n\times n}$.

ii) Probar que $f_a(x) = 0 \; \forall x \in K^{n\times n} \Rightarrow a = 0$.

iii) Se define $\gamma : K^{n\times n} \to (K^{n\times n})^*$ como $\gamma(a) = f_a$. Probar que γ es un isomorfismo.

iv) Sea $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 3.a_{11} - 2.a_{12} + 5.a_{22}.$$

Encontrar una matrix $a \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\gamma(a) = f$.

Ejercicio 15. Sea $\varphi \in (K^{n\times n})^*$ tal que $\varphi(a.b) = \varphi(b.a)\ \forall\, a,\, b \in K^{n\times n}$. Probar que $\exists\, \alpha \in K$ tal que $\varphi = \alpha.tr$. Deducir que si $\varphi(a.b) = \varphi(b.a)\ \forall\, a,\, b \in K^{n\times n}$ y $\varphi(I_n) = n$ entonces $\varphi = tr$.

Ejercicio 16. Sean $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. Para cada i, $0 \leq i \leq n$, se define $\epsilon_{\alpha_i} : K_n[X] \to K$ como $\epsilon_{\alpha_i}(P) = P(\alpha_i)$.

i) Probar que $B_1 = \{\epsilon_{\alpha_0}, \dots, \epsilon_{\alpha_n}\}$ es una base de $(K_n[X])^*$.

ii) Sea $B = \{P_0, \dots, P_n\}$ la base de $K_n[X]$ tal que $B^* = B_1$. Probar que el polinomio

$$P = \sum_{i=0}^{n} \beta_i.P_i$$

es el único polinomio en $K[X]$ de grado menor o igual que n tal que, $\forall\, i\,,\ 0 \leq i \leq n$, $P(\alpha_i) = \beta_i$. Este polinomio se llama el *polinomio interpolador de Lagrange.*

iii) Probar que existen números reales $a_0, \dots, a_n$ tales que, para todo $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 P(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} a_i.P(\alpha_i).$$

Hallar a_0, a_1 y a_2 en el caso en que $n = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = 0$.

Ejercicio 17. Sean V y W K-espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Se define la función $f^t : W^* \to V^*$ de la siguiente manera:

$$f^t(\varphi) = \varphi \circ f \qquad \forall\, \varphi \in W^*.$$

f^t se llama la función *transpuesta* de f.

i) Probar que f^t es una tranformación lineal.

ii) Probar que $(\mathrm{Im}(f))^\circ = \mathrm{Nu}(f^t)$ y que $\mathrm{Im}(f^t) = (\mathrm{Nu}(f))^\circ$.

iii) Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \mathbb{R}^3$ y sea $f(x_1, x_2) = (2.x_1 - x_2, 3x_1, x_1 - 2.x_2)$.
Si $B = \{(1, 2), (1, 3)\}$ y $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, calcular $|f|_{BB_1}$ y $|f^t|_{B_1^* B^*}$.

iv) Si B y B_1 son bases de V y W respectivamente, probar que

$$|f^t|_{B_1^* B^*} = (|f|_{BB_1})^t.$$

Ejercicio 18. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Sean $f\,,\, g \in V^*$ tales que $f.\, g \in V^*$. Probar que $f = 0$ ó $g = 0$.

Ejercicio 19. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sean $v_1, \dots, v_n \in V$ vectores no nulos. Probar que existe una forma lineal $f \in V^*$ tal que $f(v_i) \neq 0\ \forall\, i$, $1 \leq i \leq n$.