

## Capítulo 3

# Transformaciones lineales

Las transformaciones lineales son las funciones con las que trabajaremos en Álgebra Lineal. Se trata de funciones entre  $K$ -espacios vectoriales que son compatibles con la estructura (es decir, con la operación y la acción) de estos espacios.

### 3.1 Definiciones, ejemplos y propiedades básicas

En esta sección introduciremos la noción de transformación lineal, así como también ciertas nociones básicas asociadas a estas funciones.

#### 3.1.1 Transformaciones lineales

**Definición 3.1** Sean  $(V, +_V, \cdot_V)$  y  $(W, +_W, \cdot_W)$  dos  $K$ -espacios vectoriales. Una función  $f : V \rightarrow W$  se llama una *transformación lineal* (u *homomorfismo*, o simplemente *morfismo*) de  $V$  en  $W$  si cumple:

$$\text{i) } f(v +_V v') = f(v) +_W f(v') \quad \forall v, v' \in V.$$

$$\text{ii) } f(\lambda \cdot_V v) = \lambda \cdot_W f(v) \quad \forall \lambda \in K, \forall v \in V.$$

**Observación 3.2** Si  $f : V \rightarrow W$  es una transformación lineal, entonces  $f(0_V) = 0_W$ .

En efecto, puesto que  $f(0_V) = f(0_V + 0_V) = f(0_V) + f(0_V)$ , entonces

$$\begin{aligned} 0_W &= f(0_V) + (-f(0_V)) = \left( f(0_V) + f(0_V) \right) + (-f(0_V)) = \\ &= f(0_V) + \left( f(0_V) + (-f(0_V)) \right) = f(0_V) + 0_W = f(0_V). \end{aligned}$$

**Ejemplos.**

1. Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales. Entonces  $0 : V \rightarrow W$ , definida por  $0(x) = 0_W \forall x \in V$ , es una transformación lineal.
2. Si  $V$  es un  $K$ -espacio vectorial,  $id : V \rightarrow V$  definida por  $id(x) = x$  es una transformación lineal.
3. Sea  $A \in K^{m \times n}$ . Entonces  $f_A : K^n \rightarrow K^m$  definida por  $f_A(x) = (A \cdot x^t)^t$  es una transformación lineal.
4.  $f : K[X] \rightarrow K[X]$ ,  $f(P) = P'$  es una transformación lineal.
5.  $F : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$ ,  $F(g) = \int_0^1 g(x) dx$  es una transformación lineal.

Como hemos mencionado al comienzo, las transformaciones lineales respetan la estructura de  $K$ -espacio vectorial. Esto hace que en algunos casos se respete la estructura de subespacio, por ejemplo en las imágenes y pre-imágenes de subespacios por transformaciones lineales:

**Proposición 3.3** *Sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Entonces:*

1. *Si  $S$  es un subespacio de  $V$ , entonces  $f(S)$  es un subespacio de  $W$ .*
2. *Si  $T$  es un subespacio de  $W$ , entonces  $f^{-1}(T)$  es un subespacio de  $V$ .*

*Demostración.*

1. Sea  $S \subseteq V$  un subespacio y consideremos  $f(S) = \{w \in W \mid \exists s \in S, f(s) = w\}$ .
  - (a)  $0_W \in f(S)$ , puesto que  $f(0_V) = 0_W$  y  $0_V \in S$ .
  - (b) Sean  $w, w' \in f(S)$ . Entonces existen  $s, s' \in S$  tales que  $w = f(s)$  y  $w' = f(s')$ . Luego  $w + w' = f(s) + f(s') = f(s + s') \in f(S)$ , puesto que  $s + s' \in S$ .
  - (c) Sean  $\lambda \in K$  y  $w \in f(S)$ . Existe  $s \in S$  tal que  $w = f(s)$ . Entonces  $\lambda \cdot w = \lambda \cdot f(s) = f(\lambda \cdot s) \in f(S)$ , puesto que  $\lambda \cdot s \in S$ .
2. Sea  $T$  un subespacio de  $W$  y consideremos  $f^{-1}(T) = \{v \in V \mid f(v) \in T\}$ .
  - (a)  $0_V \in f^{-1}(T)$ , puesto que  $f(0_V) = 0_W \in T$ .
  - (b) Sean  $v, v' \in f^{-1}(T)$ . Entonces  $f(v), f(v') \in T$  y, por lo tanto,  $f(v + v') = f(v) + f(v') \in T$ . Luego  $v + v' \in f^{-1}(T)$ .
  - (c) Sean  $\lambda \in K, v \in f^{-1}(T)$ . Entonces  $f(v) \in T$  y, en consecuencia,  $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) \in T$ . Luego  $\lambda \cdot v \in f^{-1}(T)$ . □

De la Definición 3.1 se deduce inmediatamente que una transformación lineal preserva combinaciones lineales. Veremos que, debido a esto, una transformación lineal queda unívocamente determinada por los valores que toma en los elementos de una base cualquiera de su dominio. Comenzamos con un ejemplo.

**Ejemplo.** Hallar, si es posible, una transformación lineal  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que verifique  $f(1, 1) = (0, 1)$  y  $f(1, 0) = (2, 3)$ .

Dado  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  se tiene que  $(x_1, x_2) = x_2(1, 1) + (x_1 - x_2)(1, 0)$ . Entonces, si  $f$  verifica lo pedido, debe ser

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_2 \cdot f(1, 1) + (x_1 - x_2) \cdot f(1, 0) = x_2 \cdot (0, 1) + (x_1 - x_2) \cdot (2, 3) \\ &= (2x_1 - 2x_2, 3x_1 - 2x_2). \end{aligned}$$

Además, es fácil ver que esta función es una transformación lineal y que vale  $f(1, 1) = (0, 1)$  y  $f(1, 0) = (2, 3)$ .

Luego,  $f(x_1, x_2) = (2x_1 - 2x_2, 3x_1 - 2x_2)$  es la única transformación lineal que satisface lo pedido.

La construcción realizada en el ejemplo puede hacerse en general. Por simplicidad, lo probaremos para el caso en que el dominio de la transformación lineal es un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita.

**Proposición 3.4** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales,  $V$  de dimensión finita. Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  y sean  $w_1, \dots, w_n \in W$  vectores arbitrarios. Entonces existe una única transformación lineal  $f: V \rightarrow W$  tal que  $f(v_i) = w_i$  para cada  $1 \leq i \leq n$ .

*Demostración.*

*Existencia.* Dado  $v \in V$  existen únicos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  tales que  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ , es decir,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (v)_B$  es el vector de coordenadas de  $v$  en la base  $B$ . Definimos

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i.$$

(Observar que no hay ambigüedad en la definición de  $f$  por la unicidad de  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .)

Veamos que  $f$  es una transformación lineal:

Sean  $v, v' \in V$ . Supongamos que  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$  y  $v' = \sum_{i=1}^n \alpha'_i v_i$ . Entonces

$$v + v' = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^n \alpha'_i v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha'_i) v_i,$$

y, en consecuencia,

$$f(v + v') = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha'_i) w_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^n \alpha'_i w_i = f(v) + f(v').$$

De manera análoga se prueba que  $f(\lambda v) = \lambda f(v) \forall \lambda \in K, \forall v \in V$ .

*Unicidad.* Supongamos que  $f$  y  $g$  son dos transformaciones lineales de  $V$  en  $W$  tales que  $f(v_i) = w_i$  y  $g(v_i) = w_i$  para cada  $1 \leq i \leq n$ . Entonces, dado  $v \in V$ , si  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ , por la linealidad de  $f$  y  $g$  se tiene que

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g(v_i) = g(v).$$

Luego,  $f(v) = g(v)$  para todo  $v \in V$ , de donde  $f = g$ . □

**Observación 3.5** Con una demostración análoga a la de la proposición anterior se prueba que, si  $V$  y  $W$  son dos  $K$ -espacios vectoriales ( $V$  no necesariamente de dimensión finita),  $B = \{v_i : i \in I\}$  una base de  $V$  y  $\{w_i : i \in I\} \subset W$ , existe una única transformación lineal  $f : V \rightarrow W$  tal que  $f(v_i) = w_i \forall i \in I$ .

Teniendo en cuenta que las transformaciones lineales son funciones entre conjuntos, tiene sentido estudiar la validez de las propiedades usuales de funciones: inyectividad, suryectividad y biyectividad. Las transformaciones lineales que verifican alguna de estas propiedades reciben nombres particulares:

**Definición 3.6** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales, y sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Se dice que:

1.  $f$  es un *monomorfismo* si  $f$  es inyectiva.
2.  $f$  es un *epimorfismo* si  $f$  es suryectiva.
3.  $f$  es un *isomorfismo* si  $f$  es biyectiva.

En algunos casos, consideraremos transformaciones lineales de un  $K$ -espacio vectorial en sí mismo:

**Definición 3.7** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial. Una transformación lineal  $f : V \rightarrow V$  se llama un *endomorfismo* de  $V$ . Si  $f$  es un endomorfismo que es además un isomorfismo, entonces se dice que es un *automorfismo*.

### 3.1.2 Núcleo e imagen de una transformación lineal

A una transformación lineal  $f : V \rightarrow W$  podemos asociarle un subespacio de  $V$ , llamado su núcleo, que de alguna manera mide el tamaño de la pre-imagen por  $f$  de un elemento de su imagen. En particular, conocer este subespacio nos permitirá determinar si  $f$  es inyectiva.

**Definición 3.8** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales, y sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Se llama *núcleo de  $f$*  al conjunto  $\text{Nu}(f) = \{v \in V / f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ .

Observamos que si  $f : V \rightarrow W$  es una transformación lineal,  $\text{Nu}(f)$  es un subespacio de  $V$ , puesto que es la pre-imagen por  $f$  del subespacio  $\{0\} \subset W$  (ver Proposición 3.3).

**Ejemplo.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformación lineal definida por  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \text{Nu}(f) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\} \\ &= \langle (0, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

La siguiente proposición nos da una manera de determinar si una transformación lineal es un monomorfismo considerando simplemente su núcleo.

**Proposición 3.9** *Sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Entonces*

$$f \text{ es monomorfismo} \iff \text{Nu}(f) = \{0\}$$

*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ) Si  $f$  es un monomorfismo, entonces es una función inyectiva. En particular, existe a lo sumo un elemento  $v \in V$  tal que  $f(v) = 0$ . Puesto que  $f(0) = 0$ , debe ser  $v = 0$ . Luego,  $\text{Nu}(f) = \{0\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Sean  $v, v' \in V$ . Supongamos que  $f(v) = f(v')$ . Entonces  $f(v - v') = f(v) - f(v') = 0$ , con lo que  $v - v' \in \text{Nu}(f)$  y por lo tanto, la hipótesis  $\text{Nu}(f) = \{0\}$  implica que  $v - v' = 0$ , es decir,  $v = v'$ . Luego  $f$  es inyectiva.  $\square$

Otro conjunto importante asociado a una transformación lineal es su *imagen*. Recordamos que si  $f : V \rightarrow W$ , su imagen se define como  $\text{Im}(f) = \{w \in W / \exists v \in V, f(v) = w\}$ . De la Proposición 3.3 se desprende que la imagen de una transformación lineal  $f : V \rightarrow W$  resulta ser un subespacio de  $W$ .

**Ejemplo.** Hallar la imagen de la transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida como  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, -x_1 + x_2, 2x_1 - 2x_2 + x_3)$ .

Por definición,

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{y \in \mathbb{R}^3 / \exists x \in \mathbb{R}^3, f(x) = y\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^3 / \exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, (x_1 - x_2, x_1 - x_2, 2x_1 - 2x_2 + x_3) = y\}. \end{aligned}$$

Entonces, un elemento de  $y$  pertenece a  $\text{Im}(f)$  si y sólo si es de la forma

$$\begin{aligned} y &= (x_1 - x_2, -x_1 + x_2, 2x_1 - 2x_2 + x_3) \\ &= (x_1, -x_1, 2x_1) + (-x_2, x_2, -2x_2) + (0, 0, x_3) \\ &= x_1 \cdot (1, -1, 2) + x_2 \cdot (-1, 1, -2) + x_3 \cdot (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Luego,  $\text{Im}(f) = \langle (1, -1, 2), (-1, 1, -2), (0, 0, 1) \rangle = \langle (1, -1, 2), (0, 0, 1) \rangle$ .

Otra manera de calcular la imagen de  $f$ , teniendo en cuenta que es una transformación lineal, es la siguiente:

Consideremos un sistema de generadores de  $\mathbb{R}^3$ , por ejemplo la base canónica  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Para cada  $x \in \mathbb{R}^3$  se tiene que  $x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3$ , de donde resulta que

$$f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + x_2 \cdot f(e_2) + x_3 \cdot f(e_3).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{f(x) : x \in \mathbb{R}^3\} = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle = \\ &= \langle (1, -1, 2), (-1, 1, -2), (0, 0, 1) \rangle = \langle (1, -1, 2), (0, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

La proposición siguiente generaliza el segundo de los procedimientos utilizados en el ejemplo anterior para el cálculo de la imagen de una transformación lineal.

**Proposición 3.10** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales y sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Entonces, si  $\{v_i : i \in I\}$  es un sistema de generadores de  $V$ ,  $\{f(v_i) : i \in I\}$  es un sistema de generadores de  $\text{Im}(f)$ .

*Demostración.* Por definición,  $\text{Im}(f) = \{w \in W / \exists v \in V, f(v) = w\} = \{f(v) : v \in V\}$ .

Si  $\{v_i : i \in I\}$  es un sistema de generadores de  $V$ , para cada  $v \in V$ , existen  $i_1, \dots, i_n \in I$  y elementos  $\alpha_{i_j} \in K$  tales que  $v = \sum_{j=1}^n \alpha_{i_j} v_{i_j}$ . Luego

$$f(v) = \sum_{j=1}^n \alpha_{i_j} f(v_{i_j}) \in \langle \{f(v_i) : i \in I\} \rangle.$$

Esto prueba que  $\text{Im}(f) \subseteq \langle \{f(v_i) : i \in I\} \rangle$ . Es claro que vale la otra inclusión, ya que  $f(v_i) \in \text{Im}(f)$  para cada  $i \in I$ .

Luego,  $\text{Im}(f) = \langle \{f(v_i) : i \in I\} \rangle$ . □

**Corolario 3.11** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales y sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Si  $V$  es de dimensión finita, entonces  $\text{Im}(f)$  también lo es y se tiene que  $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim V$ .

**Corolario 3.12** Si  $f : V \rightarrow W$  es un epimorfismo, y  $\{v_i : i \in I\}$  es un sistema de generadores de  $V$ , entonces  $\{f(v_i) : i \in I\}$  es un sistema de generadores de  $W$ .

**Ejemplo.** Sean  $S$  y  $T$  los subespacios de  $\mathbb{R}^3$  definidos por  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 = 0\}$  y  $T = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_3 = 0\}$ . Hallar una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(S) = T$ .

Sabemos que para definir una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  basta con especificar los valores que toma sobre los elementos de una base de  $\mathbb{R}^3$ .

Consideramos entonces una base de  $S$ , por ejemplo  $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ , y la extendemos a una base de  $\mathbb{R}^3$ , por ejemplo  $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ . Teniendo en cuenta que  $T = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ , definimos:

$$f(1, 1, 0) = (1, 0, 0), \quad f(0, 0, 1) = (0, 1, 0), \quad f(1, 0, 0) = (0, 0, 1).$$

Entonces  $f(S) = \langle f(1, 1, 0), f(0, 0, 1) \rangle = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle = T$ .

Observemos que si  $f : V \rightarrow W$  es un epimorfismo y  $\{v_i : i \in I\}$  es una base de  $V$ , entonces  $\{f(v_i) : i \in I\}$  no es necesariamente una base de  $\text{Im}(f)$ : Por el corolario anterior, es un sistema de generadores, pero podría no ser un conjunto linealmente independiente, como puede verse en el ejemplo presentado en la página 69.

Esto es consecuencia de que una transformación lineal arbitraria no preserva independencia lineal. En la proposición siguiente veremos que esto sí es válido para el caso de monomorfismos. Sin embargo, si  $f : V \rightarrow W$  no es un monomorfismo, existe  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , tal que  $f(v) = 0$ , con lo cual  $\{v\} \subset V$  es un conjunto linealmente independiente, pero  $\{f(v)\} = \{0\} \subset W$  no lo es.

**Proposición 3.13** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales y sea  $f : V \rightarrow W$  un monomorfismo. Entonces, si  $\{v_i : i \in I\} \subset V$  es un conjunto linealmente independiente,  $\{f(v_i) : i \in I\} \subset W$  es un conjunto linealmente independiente.

*Demostración.* Supongamos que una combinación lineal de  $\{f(v_i) : i \in I\}$  satisface  $\sum_{i \in I} \alpha_i f(v_i) = 0$ . Como  $f$  es una transformación lineal, entonces  $f\left(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i\right) = 0$ , y como es un monomorfismo, debe ser  $\sum_{i \in I} \alpha_i v_i = 0$ . La independencia lineal de  $\{v_i : i \in I\}$  implica que  $\alpha_i = 0 \forall i \in I$ .  $\square$

**Corolario 3.14** Si  $f : V \rightarrow W$  es un monomorfismo y  $B = \{v_i : i \in I\}$  es una base de  $V$ , entonces  $\{f(v_i) : i \in I\}$  es una base de  $\text{Im}(f)$ . En particular, si  $V$  es un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita,  $\dim(\text{Im}(f)) = \dim V$ .

Teniendo en cuenta que un isomorfismo es una transformación lineal que es a la vez un epimorfismo y un monomorfismo, de los Corolarios 3.12 y 3.14 se deduce:

**Corolario 3.15** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales y sea  $f : V \rightarrow W$  un isomorfismo. Entonces para toda base  $B$  de  $V$ ,  $f(B)$  es una base de  $W$ . En particular, si  $V$  es de dimensión finita,  $W$  también lo es y  $\dim V = \dim W$ .

### 3.1.3 Composición de transformaciones lineales

La composición de funciones usual puede realizarse, en particular, entre dos transformaciones lineales. El resultado es, en este caso, una nueva transformación lineal.

**Proposición 3.16** Sean  $V, W$  y  $Z$   $K$ -espacios vectoriales. Sean  $f : V \rightarrow W$  y  $g : W \rightarrow Z$  transformaciones lineales. Entonces  $g \circ f : V \rightarrow Z$  es una transformación lineal.

*Demostración.* Sean  $v, v' \in V$ . Entonces

$$g \circ f(v + v') = g(f(v + v')) = g(f(v) + f(v')) = g(f(v)) + g(f(v')) = g \circ f(v) + g \circ f(v').$$

Análogamente, si  $\lambda \in K$  y  $v \in V$ , se tiene que

$$g \circ f(\lambda \cdot v) = g(f(\lambda \cdot v)) = g(\lambda \cdot f(v)) = \lambda \cdot g(f(v)) = \lambda \cdot (g \circ f(v)). \quad \square$$

Finalmente, analizamos las propiedades de la función inversa de una transformación lineal biyectiva (es decir, un isomorfismo).

**Proposición 3.17** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales y sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Si  $f$  es un isomorfismo, entonces  $f^{-1} : W \rightarrow V$  es una transformación lineal (que resulta ser un isomorfismo).

*Demostración.* Sean  $w, w' \in W$ . Como  $f$  es un isomorfismo, existen únicos  $v, v' \in V$  tales que  $w = f(v)$  y  $w' = f(v')$ . Entonces

$$f^{-1}(w + w') = f^{-1}(f(v) + f(v')) = f^{-1}(f(v + v')) = v + v' = f^{-1}(w) + f^{-1}(w').$$

Dados  $w \in W$  y  $\lambda \in K$ , existe un único  $v \in V$  tal que  $w = f(v)$ . Entonces

$$f^{-1}(\lambda \cdot w) = f^{-1}(\lambda \cdot f(v)) = f^{-1}(f(\lambda \cdot v)) = \lambda \cdot v = \lambda \cdot (f^{-1}(w)).$$

Luego,  $f^{-1}$  es una transformación lineal. Es claro que es biyectiva.  $\square$

## 3.2 Espacios vectoriales de dimensión finita

Al estudiar espacios vectoriales de dimensión finita en los capítulos anteriores, dijimos que podríamos trabajar en un  $K$ -espacio vectorial arbitrario de dimensión  $n$  “como si fuese”  $K^n$  simplemente considerando vectores de coordenadas. La noción de isomorfismo nos permite formalizar esta idea.

**Proposición 3.18** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ . Entonces existe un isomorfismo  $f : V \rightarrow K^n$ .

*Demostración.* Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ .

Dado  $x \in V$ , existe únicos  $x_1, \dots, x_n \in K$  tales que  $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ . Definimos

$$f : V \rightarrow K^n, \quad f(x) = (x_1, \dots, x_n).$$

Veamos que  $f$  es una transformación lineal:

Sean  $x, y \in V$ . Si  $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$  e  $y = \sum_{i=1}^n y_i v_i$ , entonces  $x + y = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i$ . Luego

$$f(x + y) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = f(x) + f(y).$$

En forma análoga se prueba que  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  para cada  $\lambda \in K$  y cada  $x \in V$ .

Es claro que si  $f(x) = 0$ , entonces  $x = 0$ , de donde  $f$  es un monomorfismo.

Finalmente, dado  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ , consideramos  $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in V$ . Se tiene que  $f(x) = (x_1, \dots, x_n)$ . Luego,  $f$  es un epimorfismo.

En consecuencia,  $f$  es un isomorfismo.  $\square$

**Ejemplo.** Sea  $K_3[X] = \{P \in K[X] / P = 0 \text{ o } \text{gr}(P) \leq 3\}$ , que es  $K$ -espacio vectorial de dimensión 4.

Un isomorfismo  $f : K_3[X] \rightarrow K^4$  puede definirse como sigue:

Si  $P = \sum_{i=0}^3 a_i X^i$ , entonces  $f(P) = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ , lo que corresponde a considerar en la demostración anterior la base  $B = \{1, X, X^2, X^3\}$  de  $K_3[X]$ .

Observar que, teniendo en cuenta que la aplicación  $f$  definida en la demostración de la Proposición 3.18 es tomar coordenadas en la base  $B$ , esto nos permite trabajar con coordenadas en una base en el siguiente sentido:

- i)  $\{w_1, \dots, w_s\}$  es linealmente independiente en  $V \iff \{f(w_1), \dots, f(w_s)\}$  es linealmente independiente en  $K^n$ .
- ii)  $\{w_1, \dots, w_r\}$  es un sistema de generadores de  $V \iff \{f(w_1), \dots, f(w_r)\}$  es un sistema de generadores de  $K^n$ .
- iii)  $\{w_1, \dots, w_n\}$  es una base de  $V \iff \{f(w_1), \dots, f(w_n)\}$  es una base de  $K^n$ .

Por ejemplo, para decidir si  $\{X^2 - X + 1, X^2 - 3X + 5, 2X^2 + 2X - 3\}$  es una base de  $\mathbb{R}_2[X]$ , bastará ver si  $\{(1, -1, 1), (1, -3, 5), (2, 2, -3)\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  para lo que se puede usar el método de triangulación.

### 3.3 Teorema de la dimensión

El siguiente resultado relaciona las dimensiones del núcleo y de la imagen de una transformación lineal con la de su dominio.

**Teorema 3.19 (Teorema de la dimensión para transformaciones lineales)** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales,  $V$  de dimensión finita, y sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Entonces

$$\dim V = \dim(\text{Nu}(f)) + \dim(\text{Im}(f)).$$

*Demostración.* Sean  $n = \dim V$  y  $r = \dim(\text{Nu}(f))$ .

Si  $r = n$ , entonces  $f \equiv 0$  y  $\dim(\text{Im}(f)) = 0$ . Por lo tanto, el teorema vale.

Si  $r = 0$ , entonces  $f$  es un monomorfismo. En este caso, si  $B$  es una base de  $V$ , entonces  $f(B)$  es una base de  $\text{Im}(f)$ . Luego  $\dim(\text{Im}(f)) = \dim V$  (ver Corolario 3.14), y el teorema vale.

Supongamos ahora que  $0 < r < n$ . Sea  $\{v_1, \dots, v_r\}$  una base de  $\text{Nu}(f)$ . Sean  $v_{r+1}, \dots, v_n$  en  $V$  tales que  $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$ .

Veamos que entonces  $\{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\}$  es una base de  $\text{Im}(f)$ , de donde se deduce inmediatamente el teorema:

- Puesto que  $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$ , se tiene que

$$\text{Im}(f) = \langle f(v_1), \dots, f(v_r), f(v_{r+1}), \dots, f(v_n) \rangle = \langle f(v_{r+1}), \dots, f(v_n) \rangle,$$

pues  $f(v_i) = 0$  para  $1 \leq i \leq r$ .

- Sean  $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in K$  tales que  $\sum_{i=r+1}^n \alpha_i f(v_i) = 0$ . Entonces  $f\left(\sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i\right) = 0$ , es decir,  $\sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i \in \text{Nu}(f)$ . Como  $\{v_1, \dots, v_r\}$  es una base de  $\text{Nu}(f)$ , existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$  tales que

$$\sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i \iff \sum_{i=1}^r (-\alpha_i) v_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i = 0$$

Como  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es un conjunto linealmente independiente,  $\alpha_i = 0$  para cada  $1 \leq i \leq n$ . En particular,  $\alpha_i = 0$  para  $i = r+1, \dots, n$ . Luego,  $\{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\}$  es un conjunto linealmente independiente.  $\square$

Como consecuencia de este resultado se prueba que si una transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión  $n$  es inyectiva (resp. suryectiva), entonces también es suryectiva (resp. inyectiva):

**Corolario 3.20** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales de dimensión  $n$  y sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Son equivalentes:

1.  $f$  es un isomorfismo.
2.  $f$  es un monomorfismo.
3.  $f$  es un epimorfismo.

*Demostración.*

(1.  $\Rightarrow$  2.) Por definición.

(2.  $\Rightarrow$  3.) Por el teorema de la dimensión,  $n = \dim V = \dim(\text{Nu}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$ , y como  $f$  es un monomorfismo,  $\dim(\text{Nu}(f)) = 0$ . Entonces  $\dim(\text{Im}(f)) = n = \dim W$ , de donde  $\text{Im}(f) = W$ .

(3.  $\Rightarrow$  1.) Por el teorema de la dimensión, y teniendo en cuenta que  $f$  es un epimorfismo, se tiene que  $n = \dim V = \dim(\text{Nu}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Nu}(f)) + n$ . Esto implica que  $\dim(\text{Nu}(f)) = 0$ , con lo cual,  $\text{Nu}(f) = \{0\}$  y  $f$  es un monomorfismo. Siendo epimorfismo y monomorfismo, resulta que  $f$  es un isomorfismo.  $\square$

A diferencia de lo que sucede para muchos de los resultados que hemos demostrado, en el corolario anterior la hipótesis de que los espacios vectoriales sean de dimensión *finita* es esencial. El resultado no vale para transformaciones lineales definidas en espacios de dimensión infinita:

**Ejemplo.** Sea  $V = K[X]$ .

1. Sea  $f : K[X] \rightarrow K[X]$ ,  $f(P) = P'$ , que es una transformación lineal.

- $f$  es epimorfismo: Sea  $Q = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ . Entonces  $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{i} X^i\right) = Q$ .
- $f$  no es monomorfismo:  $f(1) = 0$ , pero  $1 \neq 0$ .

2. Sea  $g : K[X] \rightarrow K[X]$ ,  $g(P) = X.P$ .

- $g$  es monomorfismo: Si  $f(P) = X.P = 0$ , entonces  $P = 0$ .
- $g$  no es epimorfismo:  $1 \notin \text{Im}(f)$ .

## 3.4 proyectores

**Definición 3.21** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial. Una transformación lineal  $f : V \rightarrow V$  se llama un *proyector* si  $f \circ f = f$ .

**Proposición 3.22** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial, y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal. Entonces  $f$  es un proyector si y sólo si  $f(x) = x$  para cada  $x \in \text{Im}(f)$ .

*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $f$  es un proyector. Sea  $x \in \text{Im}(f)$ . Entonces existe  $v \in V$  tal que  $x = f(v)$ . Luego,  $f(x) = f(f(v)) = f \circ f(v) = f(v) = x$ .

( $\Leftarrow$ ) Sea  $v \in V$ . Entonces  $f(v) \in \text{Im}(f)$  y, por hipótesis,  $f(f(v)) = f(v)$ , es decir,  $f \circ f(v) = f(v)$ . Como esto vale para cada  $v \in V$ , resulta que  $f \circ f = f$ .  $\square$

**Proposición 3.23** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sea  $f : V \rightarrow V$  un proyector. Entonces  $\text{Nu}(f) \oplus \text{Im}(f) = V$ .

*Demostración.* En primer lugar, veamos que  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ : Sea  $x \in \text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f)$ . Como  $x \in \text{Im}(f)$ , por la proposición anterior,  $f(x) = x$ . Pero  $x \in \text{Nu}(f)$ , de donde  $f(x) = 0$ . Luego,  $x = 0$ .

Veamos ahora que  $\text{Nu}(f) + \text{Im}(f) = V$ : Sea  $x \in V$ . Entonces  $x = (x - f(x)) + f(x)$  y se tiene que  $f(x - f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0$ , con lo que  $x - f(x) \in \text{Nu}(f)$  y  $f(x) \in \text{Im}(f)$ .  $\square$

**Proposición 3.24** *Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial, y sean  $S$  y  $T$  subespacios de  $V$  tales que  $S \oplus T = V$ . Entonces existe un único proyector  $f : V \rightarrow V$  tal que  $\text{Nu}(f) = S$ ,  $\text{Im}(f) = T$ .*

*Demostración.* Como  $V = S \oplus T$ , para cada  $x \in V$ , existen únicos  $s \in S$  y  $t \in T$  tales que  $x = s + t$ . Entonces, si  $f : V \rightarrow V$  es un proyector tal que  $\text{Nu}(f) = S$ ,  $\text{Im}(f) = T$ , se tiene que  $f(x) = f(s + t) = f(s) + f(t) = 0 + t = t$ , donde la penúltima igualdad es consecuencia de que  $f$  es un proyector y  $t \in \text{Im}(f)$  (ver Proposición 3.22).

Consideremos entonces la función  $f : V \rightarrow V$  definida por

$$f(x) = t \quad \text{si } x = s + t \text{ con } s \in S, t \in T.$$

Observamos que  $f$  es una transformación lineal:

- Si  $x, x' \in V$  tales que  $x = s + t$ ,  $x' = s' + t'$ , con  $s, s' \in S$  y  $t, t' \in T$ , entonces  $x + x' = (s + s') + (t + t')$  con  $s + s' \in S$  y  $t + t' \in T$  (puesto que  $S$  y  $T$  son subespacios de  $V$ ) y, por lo tanto,  $f(x + x') = t + t' = f(x) + f(x')$ .
- Si  $\lambda \in K$  y  $x \in V$ ,  $x = s + t$  con  $s \in S$ ,  $t \in T$ , entonces  $\lambda.x = (\lambda.s) + (\lambda.t)$  con  $\lambda.s \in S$ ,  $\lambda.t \in T$ . Luego  $f(\lambda.x) = \lambda.t = \lambda.f(x)$ .

Además,  $f$  es un proyector: Si  $x \in V$  y  $x = s + t$  con  $s \in S$ ,  $t \in T$ , entonces  $f \circ f(x) = f(f(s + t)) = f(t) = f(0 + t) = f(x)$ .

Es claro que  $\text{Im}(f) = T$ . Veamos que  $\text{Nu}(f) = S$ : Si  $x \in \text{Nu}(f)$  y  $x = s + t$  con  $s \in S$ ,  $t \in T$ , entonces  $0 = f(x) = t$ , con lo cual,  $x = s \in S$ . Por otro lado, si  $s \in S$ , entonces  $s = s + 0$  con  $s \in S$ ,  $0 \in T$  y, por lo tanto,  $f(s) = 0$ .

Luego, la función  $f$  que hemos definido es el único proyector  $f : V \rightarrow V$  con  $\text{Nu}(f) = S$ ,  $\text{Im}(f) = T$ .  $\square$

### 3.5 Representación matricial

Uno de los primeros ejemplos de transformaciones lineales que hemos visto son aquéllas de la forma  $f : K^n \rightarrow K^m$ ,  $f(x) = A.x$  con  $A \in K^{m \times n}$  (cuando quede claro por el contexto, suprimiremos el signo de  $^t$ , escribiendo  $A.x$  en lugar de  $(A.x^t)^t$ ).

En esta sección veremos que toda transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita puede representarse de esta manera. Para esto, utilizaremos de manera fundamental el hecho de que fijada una base de un  $K$ -espacio vectorial  $V$  de dimensión finita  $n$ , se tiene un isomorfismo entre  $V$  y  $K^n$  tomando coordenadas en dicha base.

En esta sección todos los espacios vectoriales considerados serán de dimensión finita.

### 3.5.1 Matriz de una transformación lineal

Si  $V$  y  $W$  son  $K$ -espacios vectoriales de dimensión  $n$  y  $m$  respectivamente, una transformación lineal  $f : V \rightarrow W$  queda unívocamente determinada por los  $n$  vectores de  $W$  que son los valores de  $f$  en una base cualquiera de  $V$ . Además, fijada una base de  $W$ , estos  $n$  vectores quedan determinados por medio de sus vectores de coordenadas en  $K^m$ . Se define entonces una matriz asociada a  $f$  que contiene toda esta información.

**Definición 3.25** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita. Sean  $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  y  $B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$  una base de  $W$ . Sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Supongamos que  $f(v_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} w_i$  ( $1 \leq j \leq n$ ). Se llama *matriz de  $f$  en las bases  $B_1, B_2$* , y se nota  $|f|_{B_1 B_2}$ , a la matriz en  $K^{m \times n}$  definida por  $(|f|_{B_1 B_2})_{ij} = \alpha_{ij}$  para cada  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ .

*Notación.* Si  $f : V \rightarrow V$  y  $B_1 = B_2 = B$ , notaremos  $|f|_B = |f|_{BB}$ .

**Ejemplo.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + 3x_2)$ , y sean  $B_1$  y  $B_2$  las bases canónicas de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^2$  respectivamente. Se tiene que

$$f(1, 0, 0) = (1, 1), \quad f(0, 1, 0) = (2, 3), \quad f(0, 0, 1) = (-1, 0).$$

$$\text{Entonces } |f|_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Observación 3.26** Si consideramos la transformación lineal asociada a una matriz  $A \in K^{n \times m}$ ,  $f_A : K^m \rightarrow K^n$  definida por  $f_A(x) = Ax$ , entonces, a partir de la definición anterior, la matriz de  $f_A$  en las bases canónicas  $E$  y  $E'$  de  $K^m$  y  $K^n$  respectivamente resulta ser  $|f_A|_{EE'} = A$ .

**Observación 3.27** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ , y sean  $B_1$  y  $B_2$  bases de  $V$ . Entonces  $|id_V|_{B_1 B_2} = C(B_1, B_2)$ , la matriz de cambio de base de  $B_1$  a  $B_2$  (ver Definición 2.16).

Mediante el uso de las matrices introducidas en la Definición 3.25 y de vectores de coordenadas, toda transformación lineal puede representarse como la multiplicación por una matriz fija.

**Proposición 3.28** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita, y sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Si  $B_1$  y  $B_2$  son bases de  $V$  y  $W$  respectivamente, entonces para cada  $x \in V$ ,

$$|f|_{B_1 B_2} \cdot (x)_{B_1} = (f(x))_{B_2}.$$

*Demostración.* Supongamos que  $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

Sea  $x \in V$  y sea  $(x)_{B_1} = (x_1, \dots, x_n)$ , es decir,  $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ .

Para cada  $1 \leq i \leq n$ , sea  $C_i$  la  $i$ -ésima columna de  $|f|_{B_1 B_2}$ . Por definición,  $C_i = (f(v_i))_{B_2}$ . Entonces

$$\begin{aligned} |f|_{B_1 B_2} \cdot (x)_{B_1} &= x_1 \cdot C_1 + \dots + x_n \cdot C_n = \\ &= x_1 \cdot (f(v_1))_{B_2} + \dots + x_n \cdot (f(v_n))_{B_2} = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i f(v_i) \right)_{B_2} = (f(x))_{B_2}. \quad \square \end{aligned}$$

### 3.5.2 Matriz de la composición y cambios de bases

La composición de dos transformaciones lineales “se traduce” como la multiplicación de sus matrices.

**Proposición 3.29** Sean  $V, W$  y  $U$  tres  $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita. Sean  $B_1, B_2$  y  $B_3$  bases de  $V, W$  y  $U$  respectivamente. Sean  $f: V \rightarrow W$  y  $g: W \rightarrow U$  transformaciones lineales. Entonces

$$|g \circ f|_{B_1 B_3} = |g|_{B_2 B_3} \cdot |f|_{B_1 B_2}.$$

*Demostración.* Sean  $n = \dim V$ ,  $m = \dim W$  y  $r = \dim U$ . Entonces  $|g|_{B_2 B_3} \in K^{r \times m}$  y  $|f|_{B_1 B_2} \in K^{m \times n}$ , con lo que  $|g|_{B_2 B_3} \cdot |f|_{B_1 B_2} \in K^{r \times n}$ . Además  $|g \circ f|_{B_1 B_3} \in K^{r \times n}$ .

Para cada  $x \in V$  se tiene que

$$|g|_{B_2 B_3} \cdot |f|_{B_1 B_2} \cdot (x)_{B_1} = |g|_{B_2 B_3} \cdot (f(x))_{B_2} = g(f(x))_{B_3} = (g \circ f(x))_{B_3} = |g \circ f|_{B_1 B_3} \cdot (x)_{B_1}$$

Luego,  $|g|_{B_2 B_3} \cdot |f|_{B_1 B_2} = |g \circ f|_{B_1 B_3}$  (ver Proposición 2.18).  $\square$

**Corolario 3.30** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita, y sean  $B_1$  y  $B_2$  bases de  $V$  y  $W$  respectivamente. Sea  $f: V \rightarrow W$  un isomorfismo. Entonces  $|f^{-1}|_{B_2 B_1} = (|f|_{B_1 B_2})^{-1}$ .

*Demostración.* Se deduce inmediatamente aplicando la proposición anterior a  $f^{-1} \circ f = id_V$  y  $f \circ f^{-1} = id_W$ .  $\square$

Concluimos esta sección estudiando cómo se puede obtener a partir de la matriz de una transformación lineal  $f: V \rightarrow W$  en un par de bases  $B_1$  y  $B_2$  de  $V$  y  $W$  respectivamente, la matriz de la misma transformación lineal en cualquier otro par de bases  $B'_1$  y  $B'_2$  de dichos espacios.

**Proposición 3.31** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita. Sean  $B_1, B'_1$  bases de  $V$  y  $B_2, B'_2$  bases de  $W$ . Entonces

$$|f|_{B'_1 B'_2} = C(B_2, B'_2) \cdot |f|_{B_1 B_2} \cdot C(B'_1, B_1).$$

*Demostración.* Se tiene que  $f = id_W \circ f \circ id_V$ . Aplicando dos veces el resultado dado en la Proposición 3.29 y el hecho que la matriz de la transformación lineal identidad en un par de bases coincide con la matriz de cambio de base entre las mismas, se obtiene

$$\begin{aligned} |f|_{B'_1 B'_2} &= |id_W \circ f \circ id_V|_{B'_1 B'_2} = |id_W \circ f|_{B_1 B'_2} |id_V|_{B'_1 B_1} = \\ &= |id_W|_{B_2 B'_2} \cdot |f|_{B_1 B_2} \cdot |id_V|_{B'_1 B_1} = C(B_2, B'_2) \cdot |f|_{B_1 B_2} \cdot C(B'_1, B_1), \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar.  $\square$

## 3.6 Rango de una matriz

Utilizando la relación entre matrices y transformaciones lineales introduciremos un nuevo invariante asociado a una matriz: su rango.

### 3.6.1 Rango columna y rango fila

Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales tales que  $\dim V = m$  y  $\dim W = n$ , y sean  $B_1$  y  $B_2$  bases de  $V$  y  $W$  respectivamente. Sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Consideremos la matriz de  $f$  en las bases  $B_1$  y  $B_2$  dada por sus columnas:

$$|f|_{B_1 B_2} = (C_1 \mid \dots \mid C_m) \in K^{n \times m}.$$

Si  $B_1 = \{v_1, \dots, v_m\}$ , entonces  $\text{Im}(f) = \langle f(v_1), \dots, f(v_m) \rangle$ . Tomando coordenadas en la base  $B_2$  se obtiene un subespacio  $T \subseteq K^n$  dado por  $T = \langle (f(v_1))_{B_2}, \dots, (f(v_m))_{B_2} \rangle = \langle C_1, \dots, C_m \rangle$ . Como tomar coordenadas en una base es un isomorfismo, se tiene que

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim \langle C_1, \dots, C_m \rangle.$$

Esto motiva la siguiente definición:

**Definición 3.32** Sea  $A \in K^{n \times m}$ . Se llama *rango columna* de  $A$ , y se nota  $\text{rg}_C(A)$ , a la dimensión del subespacio de  $K^n$  generado por las columnas de  $A$ , es decir, si  $A = (C_1 \mid \dots \mid C_m)$ , entonces  $\text{rg}_C(A) = \dim \langle C_1, \dots, C_m \rangle$ .

Mediante el cálculo del rango columna de una matriz  $A$  es posible obtener la dimensión del subespacio de soluciones del sistema lineal homogéneo asociado a  $A$ :

**Observación 3.33** Sea  $A \in K^{n \times m}$  y sea  $S = \{x \in K^m / A \cdot x = 0\}$ . Entonces  $\dim S = m - \text{rg}_C(A)$ .

En efecto, consideramos la transformación lineal asociada a  $A$ ,  $f_A : K^m \rightarrow K^n$  definida por  $f_A(x) = A \cdot x$ . Entonces  $A = |f_A|_{EE'}$  (donde  $E$  y  $E'$  son las bases canónicas de  $K^m$  y  $K^n$  respectivamente) y  $S = \text{Nu}(f_A)$ . Entonces

$$\dim S = \dim(\text{Nu}(f_A)) = m - \dim(\text{Im}(f_A)) = m - \text{rg}_C(A).$$

**Ejemplo.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ , y sea  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / A.x = 0\}$ . Entonces

$$\dim S = 3 - \operatorname{rg}_C(A) = 3 - \dim \langle (1, -1, 1), (-2, 2, -2), (3, 1, 4) \rangle = 3 - 2 = 1.$$

Teniendo en cuenta el subespacio generado por las filas de una matriz en lugar del generado por sus columnas puede darse la siguiente definición de rango fila análoga a la de rango columna.

**Definición 3.34** Sea  $A \in K^{n \times m}$ . Se define el *rango fila* de  $A$ , y se nota  $\operatorname{rg}_F(A)$ , como la dimensión del subespacio de  $K^m$  generado por las filas de  $A$ . Es decir, si  $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$ , entonces  $\operatorname{rg}_F(A) = \dim \langle F_1, \dots, F_n \rangle$ .

**Observación 3.35** Sea  $A \in K^{n \times m}$ . Entonces  $\operatorname{rg}_F(A) = \operatorname{rg}_C(A^t)$ .

Nuestro siguiente objetivo es mostrar que el rango fila y el rango columna de una matriz coinciden. Para hacer esto nos basaremos en la observación anterior. Primero mostraremos que el rango columna de una matriz  $A$  no cambia si se la multiplica a izquierda o derecha por matrices inversibles.

**Lema 3.36** Sea  $A \in K^{n \times m}$ . Sean  $C \in GL(n, K)$  y  $D \in GL(m, K)$ . Entonces

$$\operatorname{rg}_C(A) = \operatorname{rg}_C(C.A.D).$$

*Demostración.* Sea  $f_A : K^m \rightarrow K^n$  la transformación lineal inducida por la multiplicación a izquierda por  $A$ . Si  $E$  y  $E'$  son las bases canónicas de  $K^m$  y  $K^n$  respectivamente, se tiene que  $|f_A|_{EE'} = A$  y por lo tanto,  $\operatorname{rg}_C(A) = \dim(\operatorname{Im}(f_A))$ .

Por la Proposición 2.22, puesto que  $D \in GL(m, K)$ , existe una base  $B_1$  de  $K^m$  tal que  $D = C(B_1, E)$ , y como  $C \in GL(n, K)$ , existe una base  $B_2$  de  $K^n$  tal que  $C = C(E', B_2)$ .

Entonces

$$C.A.D = C(E', B_2) \cdot |f_A|_{EE'} \cdot C(B_1, E) = |f_A|_{B_1 B_2},$$

de donde  $\operatorname{rg}_C(C.A.D) = \dim(\operatorname{Im}(f_A)) = \operatorname{rg}_C(A)$ . □

Ahora veremos que multiplicando a  $A$  por matrices inversibles convenientes se puede obtener una matriz tal que su rango y el de su transpuesta son fáciles de comparar.

**Lema 3.37** Sea  $A \in K^{n \times m} - \{0\}$ . Entonces existen  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq \min\{n, m\}$ , y matrices  $C \in GL(n, K)$  y  $D \in GL(m, K)$  tales que

$$(C.A.D)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \leq k \\ 0 & \text{si } i = j > k \end{cases}$$

*Demostración.* Consideremos la transformación lineal  $f_A : K^m \rightarrow K^n$  inducida por la multiplicación a izquierda por  $A$ . Sea  $\{v_1, \dots, v_s\}$  una base de  $\text{Nu}(f_A)$  y sean  $w_1, \dots, w_{m-s} \in K^m$  tales que

$$B_1 = \{w_1, \dots, w_{m-s}, v_1, \dots, v_s\}$$

es una base de  $K^m$  (si  $\text{Nu}(f_A) = \{0\}$ ,  $s = 0$  y se toma una base  $B_1$  cualquiera de  $K^m$ ).

Entonces  $\{f_A(w_1), \dots, f_A(w_{m-s})\}$  es una base de  $\text{Im}(f_A)$  y puede extenderse a una base de  $K^n$ . Sean  $z_1, \dots, z_{n-m+s} \in K^n$  tales que

$$B_2 = \{f_A(w_1), \dots, f_A(w_{m-s}), z_1, \dots, z_{n-m+s}\}$$

es una base de  $K^n$ .

Se tiene que

$$(|f_A|_{B_1 B_2})_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \leq m - s \\ 0 & \text{si } i = j > m - s \end{cases}$$

Observamos que

$$|f_A|_{B_1 B_2} = C(E', B_2) \cdot |f_A|_{E E'} \cdot C(B_1, E) = C.A.D,$$

donde  $C = C(E', B_2) \in GL(n, K)$  y  $D = C(B_1, E) \in GL(m, K)$ .  $\square$

**Proposición 3.38** Sea  $A \in K^{n \times m}$ . Entonces  $\text{rg}_C(A) = \text{rg}_F(A)$ .

*Demostración.* Es claro que el resultado vale si  $A = 0$ . Dada  $A \in K^{n \times m} - \{0\}$ , por el lema anterior, existen matrices  $C \in GL(n, K)$ ,  $D \in GL(m, K)$  y  $k \in \mathbb{N}$ , tales que

$$(C.A.D)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \leq k \\ 0 & \text{si } i = j > k \end{cases}$$

Por el Lema 3.36 se tiene que  $\text{rg}_C(A) = \text{rg}_C(C.A.D)$ , y es claro que  $\text{rg}_C(C.A.D) = k$ .

Por otro lado, transponiendo se obtiene

$$(D^t.A^t.C^t)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \leq k \\ 0 & \text{si } i = j > k \end{cases}$$

con  $D^t \in GL(m, K)$  y  $C^t \in GL(n, K)$ , de donde  $\text{rg}_C(A^t) = \text{rg}_C(D^t.A^t.C^t) = k$ .

En consecuencia

$$\text{rg}_F(A) = \text{rg}_C(A^t) = \text{rg}_C(D^t.A^t.C^t) = k = \text{rg}_C(A). \quad \square$$

**Definición 3.39** Sea  $A \in K^{n \times m}$ . Al número  $\text{rg}_C(A) = \text{rg}_F(A)$  lo llamaremos el *rango de la matriz*  $A$ , y lo notaremos  $\text{rg}(A)$ .

La Observación 3.33 puede ahora reescribirse utilizando la noción de rango de una matriz.

**Proposición 3.40** Sea  $A \in K^{n \times m}$  y sea  $S = \{x \in K^m / A.x = 0\}$ . Entonces  $\dim S = m - \text{rg}(A)$ .

Esto significa que la dimensión del espacio de soluciones de un sistema lineal homogéneo es igual a la cantidad de incógnitas menos la cantidad de ecuaciones independientes.

### 3.6.2 Equivalencia de matrices

**Definición 3.41** Sean  $A, B \in K^{n \times m}$ . Se dice que  $A$  es *equivalente* a  $B$ , y se nota  $A \equiv B$ , si existen matrices  $C \in GL(n, K)$  y  $D \in GL(m, K)$  tales que  $A = C.B.D$ .

Es inmediato verificar que  $\equiv$  es una relación de equivalencia.

Como hemos visto en la sección anterior, si dos matrices son equivalentes entonces tienen el mismo rango. A continuación veremos que la recíproca de esta propiedad también es cierta. En consecuencia, el rango resulta ser un invariante que nos permite determinar fácilmente si dos matrices son equivalentes.

**Proposición 3.42** Sean  $A, B \in K^{n \times m}$ . Entonces  $A \equiv B \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ .

*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ) Es consecuencia del Lema 3.36.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = k$ . Entonces existen matrices  $C_1, C_2 \in GL(n, K)$  y  $D_1, D_2 \in GL(m, K)$  tales que

$$(C_1.A.D_1)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \leq k \\ 0 & \text{si } i = j > k \end{cases} \quad \text{y} \quad (C_2.B.D_2)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \leq k \\ 0 & \text{si } i = j > k \end{cases}$$

En consecuencia,  $C_1.A.D_1 = C_2.B.D_2$ , de donde

$$A = (C_1^{-1}.C_2).B.(D_2.D_1^{-1}) = C.B.D$$

con  $C = C_1^{-1}.C_2 \in GL(n, K)$  y  $D = D_2.D_1^{-1} \in GL(m, K)$ .

Luego,  $A \equiv B$ . □

Finalmente, la siguiente proposición caracteriza matrices equivalentes por medio de transformaciones lineales: dos matrices son equivalentes si y sólo si son las matrices de una misma transformación lineal en distintas bases.

**Proposición 3.43** Sean  $A, B \in K^{n \times m}$ . Entonces  $A \equiv B$  si y sólo si existe una transformación lineal  $f : K^m \rightarrow K^n$  y bases  $B_1, B'_1$  de  $K^m$  y  $B_2, B'_2$  de  $K^n$  tales que  $|f|_{B_1 B_2} = A$  y  $|f|_{B'_1 B'_2} = B$ .

*Demostración.* La validez de  $(\Leftarrow)$  se deduce de la proposición anterior, teniendo en cuenta que  $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(B)$ .

Veamos que vale la otra implicación. Consideremos la transformación lineal  $f : K^m \rightarrow K^n$  definida por  $f(x) = B \cdot x$ . Entonces  $B = |f|_{EE'}$ , donde  $E$  y  $E'$  son las bases canónicas de  $K^m$  y  $K^n$  respectivamente.

Por definición, si  $A \equiv B$ , existen matrices inversibles  $C$  y  $D$  tales que  $A = C \cdot B \cdot D$ . Sea  $B_1$  base de  $K^m$  tal que  $D = C(B_1, E)$  y sea  $B_2$  base de  $K^n$  tal que  $C = C(E', B_2)$ . Entonces

$$A = C \cdot B \cdot D = C(E', B_2) |f|_{EE'} C(B_1, E) = |f|_{B_1 B_2}. \quad \square$$

### 3.7 Espacios vectoriales de transformaciones lineales

Fijados dos  $K$ -espacios vectoriales  $V$  y  $W$ , tiene sentido considerar el conjunto de todas las transformaciones lineales de  $V$  en  $W$ . En esta sección, estudiaremos la estructura de estos conjuntos de transformaciones lineales.

**Definición 3.44** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales. Definimos

$$\text{Hom}_K(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ es una transformación lineal}\}.$$

Definimos ahora una operación en  $\text{Hom}_K(V, W)$  y una acción de  $K$  en  $\text{Hom}_K(V, W)$  que lo convierten en un  $K$ -espacio vectorial:

*Suma.* Dadas  $f, g \in \text{Hom}_K(V, W)$  se define  $f + g$  como

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in V.$$

Veamos que  $f + g \in \text{Hom}_K(V, W)$ , con lo cual  $+$  resulta un operación en  $\text{Hom}_K(V, W)$ :

- Es claro que  $f + g : V \rightarrow W$ .
- $f + g$  es una transformación lineal:

Para cada  $x, y \in V$ , se tiene que

$$\begin{aligned} (f + g)(x + y) &= f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = \\ &= (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y)) = (f + g)(x) + (f + g)(y). \end{aligned}$$

Por otro lado, para cada  $\mu \in K$  y cada  $x \in V$  vale

$$\begin{aligned} (f + g)(\mu \cdot x) &= f(\mu \cdot x) + g(\mu \cdot x) = \mu \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) = \\ &= \mu \cdot (f(x) + g(x)) = \mu \cdot (f + g)(x). \end{aligned}$$

Es fácil verificar que  $(\text{Hom}_K(V, W), +)$  es un grupo abeliano.

*Producto por escalares.* Dados  $f \in \text{Hom}_K(V, W)$  y  $\lambda \in K$  se define  $(\lambda \cdot f) : V \rightarrow W$  como

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in V.$$

Veamos que  $\lambda \cdot f \in \text{Hom}_K(V, W)$ , y por lo tanto,  $\cdot$  es una acción de  $K$  en  $\text{Hom}_K(V, W)$ :

- Por definición,  $\lambda \cdot f : V \rightarrow W$ .
- $\lambda \cdot f$  es una transformación lineal:

Para todo par de elementos  $x, y \in V$ :

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot f)(x + y) &= \lambda \cdot (f(x + y)) = \lambda \cdot (f(x) + f(y)) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot f(y) = \\ &= (\lambda \cdot f)(x) + (\lambda \cdot f)(y). \end{aligned}$$

Para todo  $\mu \in K$  y todo  $x \in V$ :

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot f)(\mu \cdot x) &= \lambda \cdot (f(\mu \cdot x)) = \lambda \cdot (\mu \cdot f(x)) = (\lambda \cdot \mu) \cdot f(x) = \\ &= \mu \cdot (\lambda \cdot f(x)) = \mu \cdot ((\lambda \cdot f)(x)). \end{aligned}$$

Además se cumplen las siguientes propiedades: Si  $\lambda, \mu \in K$  y  $f, g \in \text{Hom}_K(V, W)$ ,

- $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$
- $(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$
- $1 \cdot f = f$
- $(\lambda \cdot \mu) \cdot f = \lambda \cdot (\mu \cdot f)$

En consecuencia:

**Proposición 3.45**  $(\text{Hom}_K(V, W), +, \cdot)$  es un  $K$ -espacio vectorial.

En el caso en que ambos  $V$  y  $W$  son  $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita,  $\dim V = n$  y  $\dim W = m$ , este  $K$ -espacio vectorial resulta ser isomorfo a  $K^{m \times n}$ .

**Proposición 3.46** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita, con  $\dim V = n$  y  $\dim W = m$ . Sean  $B$  y  $B'$  bases de  $V$  y  $W$  respectivamente. Entonces la función  $T : \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow K^{m \times n}$  definida por  $T(f) = |f|_{BB'}$  es un isomorfismo.

*Demostración.* Supongamos que  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ .

- $T$  es una transformación lineal:

Sean  $f, g \in \text{Hom}_K(V, W)$ . Por definición,  $T(f + g) = |f + g|_{BB'}$ . Observemos que la  $j$ -ésima columna de esta matriz es

$$((f + g)(v_j))_{B'} = (f(v_j) + g(v_j))_{B'} = (f(v_j))_{B'} + (g(v_j))_{B'},$$

es decir, es la suma de las  $j$ -ésimas columnas de  $|f|_{BB'}$  y  $|g|_{BB'}$ .

Luego,  $|f + g|_{BB'} = |f|_{BB'} + |g|_{BB'}$  o, equivalentemente,  $T(f + g) = T(f) + T(g)$ .

En forma análoga se prueba que  $T(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot T(f)$ .

- $T$  es un isomorfismo:

$T$  es monomorfismo: Sea  $f \in \text{Hom}_K(V, W)$  tal que  $T(f) = 0$ , es decir,  $|f|_{BB'} = 0$ . Entonces,  $\text{Im}(f) = \{0\}$ , de donde  $f \equiv 0$ .

$T$  es epimorfismo: Sea  $A \in K^{m \times n}$ . Consideramos  $f_A : V \rightarrow W$  definida por  $(f_A(x))_{B'} = (A \cdot (x)_B)^t$  para cada  $x \in V$ .

Se tiene que  $f_A \in \text{Hom}_K(V, W)$  y  $T(f_A) = |f_A|_{BB'} = A$ .  $\square$

### 3.8 Ejercicios

**Ejercicio 1.** Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3, x_1 - \frac{1}{2}x_2)$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2, 1 + x_1)$
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 7x_3, 0, 3x_2 + 2x_3)$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, |x_1|)$
- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = i \cdot z$  (considerando a  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial)
- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = i \cdot \text{Im}(z)$  (considerando a  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial)
- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \bar{z}$  (considerando a  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial)
- $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
- $f : \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = (3a_{13} - a_{23}, a_{11} + 2a_{22} - a_{23}, a_{22} - a_{12})$
- $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$
- $f : \mathbb{C}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \overline{a_{12}} \\ \overline{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix}$  (considerando a  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial)

**Ejercicio 2.** Interpretar geoméricamente las siguientes aplicaciones lineales  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

- $f(x, y) = (x, 0)$
- $f(x, y) = (0, y)$

- iii)  $f(x, y) = (x, -y)$
- iv)  $f(x, y) = (\frac{1}{2} \cdot (x + y), \frac{1}{2} \cdot (x + y))$
- v)  $f(x, y) = (x \cdot \cos t - y \cdot \operatorname{sen} t, x \cdot \operatorname{sen} t + y \cdot \cos t)$

**Ejercicio 3.**

- i) Encontrar una función  $f : V \rightarrow V$  (para un  $K$ -espacio vectorial  $V$  conveniente) que cumpla  $f(v + w) = f(v) + f(w)$  para cualquier par de vectores  $v, w \in V$  pero que no sea una transformación lineal.
- ii) Encontrar una función  $f : V \rightarrow V$  (para un  $K$ -espacio vectorial  $V$  conveniente) que cumpla  $f(k \cdot v) = k \cdot f(v)$  para cualquier escalar  $k \in K$  y cualquier vector  $v \in V$  pero que no sea una transformación lineal.

**Ejercicio 4.** Probar la linealidad de las siguientes aplicaciones:

- i)  $tr : K^{n \times n} \rightarrow K$
- ii)  $t : K^{n \times m} \rightarrow K^{m \times n}, t(A) = A^t$
- iii)  $f : K^{n \times m} \rightarrow K^{r \times m}, f(A) = B \cdot A$  donde  $B \in K^{r \times n}$
- iv)  $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}), \delta(f) = f'$
- v)  $\epsilon_\alpha : K[X] \rightarrow K, \epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$  donde  $\alpha \in K$
- vi)  $s : K^{\mathbb{N}} \rightarrow K^{\mathbb{N}}, s(\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$

**Ejercicio 5.**

- i) Probar que existe una única transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 1) = (-5, 3)$  y  $f(-1, 1) = (5, 2)$ . Para dicha  $f$ , determinar  $f(5, 3)$  y  $f(-1, 2)$ .
- ii) ¿Existirá una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 1) = (2, 6)$ ,  $f(-1, 1) = (2, 1)$  y  $f(2, 7) = (5, 3)$ ?
- iii) Sean  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  transformaciones lineales tales que

$$f(1, 0, 1) = (1, 2, 1), \quad f(2, 1, 0) = (2, 1, 0), \quad f(-1, 0, 0) = (1, 2, 1),$$

$$g(1, 1, 1) = (1, 1, 0), \quad g(3, 2, 1) = (0, 0, 1), \quad g(2, 2, -1) = (3, -1, 2).$$

Determinar si  $f = g$ .

- iv) Hallar todos los  $a \in \mathbb{R}$  para los cuales exista una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfaga que  $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$ ,  $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$  y  $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$ .

- v) Hallar una fórmula para todas las transformaciones lineales  $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfacen  $f(X^3 + 2X^2 - X + 4) = (6, 5, 3)$ ,  $f(3X^2 + 2X - 5) = (0, 0, -3)$ ,  $f(X^3 - 2X^2 + 3X - 2) = (0, -1, 1)$  y  $f(2X^3 - 3X^2 + 7) = (6, 4, 7)$ .

**Ejercicio 6.**

- i) Calcular bases del núcleo y de la imagen para cada transformación lineal del ejercicio 1. Decidir, en cada caso, si  $f$  es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular  $f^{-1}$ .
- ii) Clasificar las transformaciones lineales  $tr$ ,  $t$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon_\alpha$  y  $s$  del ejercicio 4 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

**Ejercicio 7.** Sean  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$  y  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$ . Calcular el núcleo y la imagen de  $f$ , de  $g$  y de  $g \circ f$ . Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

**Ejercicio 8.** Sean  $g : V \rightarrow V'$  y  $f : V' \rightarrow V''$  transformaciones lineales. Probar:

- i)  $\text{Nu}(g) \subseteq \text{Nu}(f \circ g)$ .
- ii) Si  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$ , entonces  $\text{Nu}(g) = \text{Nu}(f \circ g)$ .
- iii)  $\text{Im}(f \circ g) \subseteq \text{Im}(f)$ .
- iv) Si  $\text{Im}(g) = V'$ , entonces  $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$ .

**Ejercicio 9.**

- i) Sean  $S, T \subset \mathbb{R}^4$  los subespacios definidos por  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  y  $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / 2x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$ .  
¿Existirá algún isomorfismo  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $f(S) = T$ ?
- ii) ¿Existirá algún monomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ?
- iii) ¿Existirá algún epimorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ?
- iv) Sean  $v_1 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $v_2 = (1, 1, 1, 0)$  y  $v_3 = (1, 1, 1, 1)$ . ¿Existirá alguna transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \text{Im}(f)$ ?

**Ejercicio 10.** Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  que verifique  $\text{Im}(f) = S$  y  $\text{Nu}(f) = T$  en los siguientes casos:

- i)  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$ ,  $T = \langle (1, 2, 1) \rangle$
- ii)  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$ ,  $T = \langle (1, -2, 1) \rangle$

**Ejercicio 11.** En cada uno de los siguientes casos encontrar una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que verifique lo pedido:

- i)  $(1, 1, 0) \in \text{Nu}(f)$  y  $\dim(\text{Im}(f)) = 1$
- ii)  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \langle (1, 1, 2) \rangle$
- iii)  $f \neq 0$  y  $\text{Nu}(f) \subseteq \text{Im}(f)$
- iv)  $f \neq 0$  y  $f \circ f = 0$
- v)  $f \neq Id$  y  $f \circ f = Id$
- vi)  $\text{Nu}(f) \neq \{0\}$ ,  $\text{Im}(f) \neq \{0\}$  y  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$

**Ejercicio 12.** En cada uno de los siguientes casos construir un proyector  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que cumpla:

- i)  $\text{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- ii)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- iii)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$  e  $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$

**Ejercicio 13.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sea  $f : V \rightarrow V$  un proyector. Probar que  $g = id_V - f$  es un proyector con  $\text{Im}(g) = \text{Nu}(f)$  y  $\text{Nu}(g) = \text{Im}(f)$ .

**Ejercicio 14.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal. Se dice que  $f$  es *nilpotente* si  $\exists s \in \mathbb{N}$  tal que  $f^s = 0$ .

- i) Probar que si  $f$  es nilpotente, entonces  $f$  no es ni monomorfismo ni epimorfismo.
- ii) Si  $V$  es de dimensión  $n$  probar que  $f$  es nilpotente  $\iff f^n = 0$ .  
(Sugerencia: considerar si las inclusiones  $\text{Nu}(f^i) \subseteq \text{Nu}(f^{i+1})$  son estrictas o no).
- iii) Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ . Se define la transformación lineal  $f : V \rightarrow V$  de la siguiente forma:

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & \text{si } i = n \end{cases}$$

Probar que  $f^n = 0$  y  $f^{n-1} \neq 0$ .

- iv) Si  $V = \mathbb{R}^n$ , para cada  $i$ ,  $2 \leq i \leq n$ , construir una transformación lineal nilpotente  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f^i = 0$  y  $f^{i-1} \neq 0$ .

**Ejercicio 15.** Sea  $S = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ .

- i) Hallar una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\text{Nu}(f) = S$ .

- ii) Hallar ecuaciones para  $S$  (usar i)).
- iii) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea  $\langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle + (0, 1, 1, 2)$ .

**Ejercicio 16.**

- i) Sea  $S \subseteq K^n$  el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo. Encontrar una transformación lineal  $f : K^n \rightarrow K^n$  tal que  $\text{Nu}(f) = S$ .
- ii) Sea  $T \subseteq K^n$  el conjunto de soluciones de un sistema lineal no homogéneo. Encontrar una transformación lineal  $f : K^n \rightarrow K^n$  y  $x \in K^n$  tales que  $T = f^{-1}(x)$ .

**Ejercicio 17.** Sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal y sean  $B, B'$  bases de  $V$ . Calcular  $|f|_{BB'}$  en cada uno de los siguientes casos:

- i)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$ ,  
 $B = B'$  la base canónica de  $\mathbb{R}^3$
- ii)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$ ,  
 $B = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$  y  $B' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 3, 1)\}$
- iii)  $V = \mathbb{C}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$ ,  $B = B'$  es la base canónica de  $\mathbb{C}^2$  como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.
- iv)  $V = \mathbb{C}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$ ,  $B = B' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$  considerando a  $\mathbb{C}^2$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.
- v)  $V = \mathbb{R}_4[X]$ ,  $f(P) = P'$ ,  $B = B' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$
- vi)  $V = \mathbb{R}_4[X]$ ,  $f(P) = P'$ ,  $B = B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$
- vii)  $V = \mathbb{R}_4[X]$ ,  $f(P) = P'$ ,  $B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$  y  $B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$
- viii)  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $f(A) = A^t$ ,  $B = B'$  la base canónica de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- ix)  $V, f$  y  $B = B'$  como en el ejercicio 14, iii)

**Ejercicio 18.** Sean  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  una base de  $\mathbb{R}^3$  y  $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  una base de  $\mathbb{R}^4$ . Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la transformación lineal tal que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- i) Hallar  $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ . ¿Cuáles son sus coordenadas en la base  $B'$ ?

- ii) Hallar una base de  $\text{Nu}(f)$  y una base de  $\text{Im}(f)$ .  
 iii) Describir el conjunto  $f^{-1}(w_1 - 3.w_3 - w_4)$ .

**Ejercicio 19.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y  $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  una base de  $V$ . Sea  $f : V \rightarrow V$  la transformación lineal tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- i) Calcular  $|f^{-1}|_B$ .  
 ii) Calcular  $f^{-1}(v_1 - 2.v_2 + v_4)$ .

**Ejercicio 20.** En cada uno de los siguientes casos, hallar una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  para un  $n$  adecuado que verifique:

- i)  $A \neq I_n$  y  $A^3 = I_n$ .  
 ii)  $A \neq 0$ ;  $A \neq I_n$  y  $A^2 = A$ .

**Ejercicio 21.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita y sea  $B$  una base de  $V$ .

- i) Sea  $tr : \text{Hom}(V, V) \rightarrow K$  la aplicación definida por  $tr(f) = tr(|f|_B)$ . Probar que  $tr(f)$  no depende de la base  $B$  elegida.  
 $tr(f)$  se llama la *traza* del endomorfismo  $f$ .  
 ii) Probar que  $tr : \text{Hom}(V, V) \rightarrow K$  es una transformación lineal.

**Ejercicio 22.** Sean  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $U = \{v_1 + v_3, v_1 + 2.v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$  y  $U' = \{w_1, w_2, w_3\}$  bases de  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $E$  la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal tal que

$$|f|_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad |f|_{UU'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar  $U'$ .

**Ejercicio 23.**

- i) Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

y sea  $v = (1, 0, 0, 0)$ . Probar que  $B = \{v, f(v), f^2(v), f^3(v)\}$  es una base de  $\mathbb{R}^4$ . Calcular  $|f|_B$ .

- ii) Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal tal que  $f^n = 0$  y  $f^{n-1} \neq 0$ . Probar que existe una base  $B$  de  $V$  tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(Sugerencia: elegir  $v_1 \notin \text{Nu}(f^{n-1})$ ).

**Ejercicio 24.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $f : V \rightarrow V$  un proyector. Probar que existe una base  $B$  de  $V$  tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j ; i \leq \dim(\text{Im}(f)) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

**Ejercicio 25.** Sea  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2.x_1 - x_5, x_2 + 2.x_3, x_1 + x_4 + x_5, -x_1 + x_4 + x_5).$$

Encontrar bases  $B$  y  $B'$  de  $\mathbb{R}^5$  y  $\mathbb{R}^4$  respectivamente tales que  $|f|_{BB'}$  sea una matriz diagonal.

**Ejercicio 26.** Sean  $V$  y  $W$   $K$ -espacios vectoriales,  $\dim V = n$  y  $\dim W = m$ , y  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal tal que  $\dim(\text{Im}(f)) = s$ . Probar que existen una base  $B$  de  $V$  y una base  $B'$  de  $W$  tal que

$$(|f|_{BB'})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j ; i \leq s \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

**Ejercicio 27.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2.x_1 - 3.x_2 + 2.x_3, 3.x_1 - 2.x_2 + x_3).$$

- i) Determinar bases  $B$  y  $B'$  de  $\mathbb{R}^3$  tales que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- ii) Si  $A$  es la matriz de  $f$  en la base canónica, encontrar matrices  $C, D \in GL(3, \mathbb{R})$  tales que

$$C.A.D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 28.** Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{iii)} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \text{iv)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Ejercicio 29.** Calcular el rango de  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  para cada  $k \in \mathbb{R}$  siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 30.** Sean  $A \in K^{m \times n}$ ,  $b \in K^m$ . Se considera el sistema  $A.x = b$  y sea  $(A | b)$  su matriz ampliada. Probar que  $A.x = b$  tiene solución  $\iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A | b)$ .

**Ejercicio 31.** Sea  $A \in K^{m \times n}$ ,  $\text{rg}(A) = s$  y sea  $T = \{x \in K^{n \times r} / A.x = 0\}$ . Calcular la dimensión de  $T$ .

**Ejercicio 32.** Sean  $A \in K^{m \times n}$  y  $B \in K^{n \times r}$ . Probar que  $\text{rg}(A.B) \leq \text{rg}(A)$  y  $\text{rg}(A.B) \leq \text{rg}(B)$ .

**Ejercicio 33.** Sean  $A, D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Determinar  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4 \in GL(3, \mathbb{R})$  tales que

$$C_1.A.C_2 = C_3.D.C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Determinar  $f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  y bases  $B, B', B_1$  y  $B'_1$  de  $\mathbb{R}^3$  tales que

$$|f|_{BB'} = A \quad \text{y} \quad |f|_{B_1B'_1} = D$$

**Ejercicio 34.** Dadas  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , decidir si existen matrices  $P, Q \in GL(n, \mathbb{R})$  tales que  $A = P.B.Q$ .

$$\text{i) } n = 2; A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } n = 2; A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } n = 3; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv) } n = 3; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 35.** Sean  $A, B \in K^{n \times n}$ . Se dice que  $A$  es *semejante* a  $B$  (y se nota  $A \sim B$ ) si existe  $C \in GL(n, K)$  tal que  $A = C.B.C^{-1}$ .

- i) Demostrar que  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $K^{n \times n}$ .
- ii) Probar que dos matrices semejantes son equivalentes. ¿Vale la recíproca?

**Ejercicio 36.** Sean  $A, C \in K^{n \times n}$ . Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $A \sim C$ .
- ii)  $\exists f : K^n \rightarrow K^n$  transformación lineal y bases  $B$  y  $B'$  de  $K^n$  tales que  $|f|_B = A$  y  $|f|_{B'} = C$

**Ejercicio 37.**

- i) Sean  $A, C \in K^{n \times n}$  tales que  $A \sim C$ . Probar que  $\text{tr}(A) = \text{tr}(C)$ .
- ii) Sean  $A, C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Existen  $f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  y bases  $B$  y  $B'$  de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $|f|_B = A$  y  $|f|_{B'} = C$ ?