Capítulo 10

Formas bilineales

Las formas bilineales son un caso particular de funciones multilineales que tienen diversas aplicaciones. En este capítulo sólo daremos una breve introducción al tema para poder demostrar una caracterización de las formas bilineales simétricas reales definidas positivas que se utiliza en el cálculo de extremos de funciones multivariadas.

10.1 Definición y ejemplos

Definición 10.1 Sea V un K-espacio vectorial. Una función $\Phi : V \times V \to K$ es una *forma bilineal* si:

i) $\Phi(v + v', w) = \Phi(v, w) + \Phi(v', w) \ \ \forall\, v, v', w \in V$.

ii) $\Phi(\lambda v, w) = \lambda.\, \Phi(v, w) \ \ \forall\, \lambda \in K, \forall\, v, w \in V$.

iii) $\Phi(v, w + w') = \Phi(v, w) + \Phi(v, w') \ \ \forall\, v, w, w' \in V$.

iv) $\Phi(v, \lambda.w) = \lambda.\, \Phi(v, w) \ \ \forall\, \lambda \in K, \forall\, v, w \in V$.

Notar que el nombre bilineal deriva del hecho que, cuando se fija cualquiera de las variables, la función resulta lineal en la otra.

Ejemplos. Se puede probar fácilmente que:

1. Los productos internos reales son formas bilineales.
2. Sea V un K espacio vectorial y sean $f_1 : V \to K$ y $f_2 : V \to K$ transformaciones lineales. Entonces $\Phi : V \times V \to K$ definida por $\Phi(v, w) = f_1(v).\, f_2(w)$ es una forma bilineal.
3. Sea $A \in K^{n\times n}$. Entonces $\Phi : K^n \times K^n \to K$, $\Phi(x, y) = x.\, A.\, y^t$, es una forma bilineal.

4. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2$. Vemos que
$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= x_1.(y_1+y_2) + x_2.(y_1+3y_2) = (x_1,x_2).\begin{pmatrix} y_1+y_2 \\ y_1+3y_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$
de donde Φ resulta ser una forma bilineal como las del ejemplo anterior.

10.2 Matriz de una forma bilineal

Al igual que las transformaciones lineales y los productos internos, fijando una base, las formas bilineales pueden caracterizarse por una matriz.

Definición 10.2 Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Sea $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal. Se define la *matriz de* Φ en la base B como
$$(|\Phi|_B)_{ij} = \Phi(v_i, v_j) \qquad \forall\, 1 \le i,j \le n.$$

Ejemplo. Para la forma bilineal Φ del ejemplo 4 anterior, si E es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, se tiene
$$|\Phi|_E = \begin{pmatrix} \Phi(e_1,e_1) & \Phi(e_1,e_2) \\ \Phi(e_2,e_1) & \Phi(e_2,e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matriz de una forma bilineal en una base sirve, como en el caso de las transformaciones lineales, para poder calcular el valor de la forma si conocemos las coordenadas de los vectores en dicha base.

Proposición 10.3 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Sea $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal. Entonces, para cada $x, y \in V$,*
$$\Phi(x,y) = (x)_B.\, |\Phi|_B.\, (y)_B^t.$$

Demostración. Sean $x, y \in V$. Supongamos que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ e $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$. Entonces
$$\Phi(x,y) = \Phi\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\Phi(v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\sum_{j=1}^{n} \Phi(v_i, v_j)\beta_j\Big).$$
Por otro lado
$$\begin{aligned}(x)_B.\, |\Phi|_B.\, (y)_B^t &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n).|\Phi|_B.\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(|\Phi|_B \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \right)_{i1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\sum_{j=1}^{n} (|\Phi|_B)_{ij}\beta_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\sum_{j=1}^{n} \Phi(v_i, v_j)\beta_j\Big).\end{aligned}$$

En consecuencia, $\Phi(x, y) = (x)_B . |\Phi|_B . (y)_B^t$. □

Observación 10.4 Si $A \in K^{n\times n}$ es una matriz tal que $\forall\, x, y \in V$ vale $(x)_B.A.(y)_B^t = \Phi(x, y)$, entonces $A_{ij} = \Phi(v_i, v_j)$. En efecto,

$$\Phi(v_i, v_j) = (v_i)_B . A . (v_j)_B^t = e_i . A . e_j^t = A_{ij}.$$

Las matrices de cambio de bases nos permiten calcular la matriz de una forma bilineal en distintas bases.

Proposición 10.5 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sean B_1 y B_2 bases de V. Sea $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal. Entonces*

$$C(B_2, B_1)^t . |\Phi|_{B_1} . C(B_2, B_1) = |\Phi|_{B_2}.$$

Demostración. Sea $A = C(B_2, B_1)^t.|\Phi|_{B_1}.C(B_2, B_1)$. Por la observación anterior, basta verificar que $(x)_{B_2}.A.(y)_{B_2}^t = \Phi(x, y)$ para todo par de vectores $x, y \in V$. Se tiene que

$$\begin{aligned} (x)_{B_2}.A.(y)_{B_2}^t &= (x)_{B_2}.C(B_2, B_1)^t.|\Phi|_{B_1}.C(B_2, B_1).(y)_{B_2}^t = \\ &= \Big(C(B_2, B_1).(x)_{B_2}^t\Big)^t.|\Phi|_{B_1}.(y)_{B_1}^t = (x)_{B_1}|\Phi|_{B_1}(y)_{B_1}^t = \Phi(x, y). \end{aligned}$$ □

Notar que la matriz de cambio de base de la izquierda aparece transpuesta, lo que es natural por la forma de calcular la forma bilineal en un par de vectores, conocidas sus coordenadas.

Ejemplo. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por

$$\Phi(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

Si E es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, vimos que $|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular $|\Phi|_B$ para $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$.

Este cálculo puede hacerse de dos formas:

1. A partir de la definición de matriz de una forma bilineal:

$$|\Phi|_B = \begin{pmatrix} \Phi((1, 1), (1, 1)) & \Phi((1, 1), (1, 2)) \\ \Phi((1, 2), (1, 1)) & \Phi((1, 2), (1, 2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}.$$

2. Usando matrices de cambio de base:

$$\begin{aligned} |\Phi|_B &= C(B, E)^t . |\Phi|_E . C(B, E) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

10.3 Formas bilineales simétricas

10.3.1 Definiciones y propiedades básicas

Las formas bilineales que nos interesan son las que no varían cuando se cambia el orden de los vectores en los que se las calcula. Estas formas se llaman simétricas.

Definición 10.6 Sea V un K-espacio vectorial. Una forma bilineal $\Phi : V \times V \to K$ se dice *simétrica* si $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)\ \forall\, x, y \in V$.

Ejemplo. Un producto interno real es una forma bilineal simétrica.

A las formas bilineales simétricas les corresponden matrices simétricas:

Proposición 10.7 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal. Sea B una base de V. Entonces*

$$\Phi \text{ es simétrica} \iff |\Phi|_B \text{ es simétrica.}$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que Φ es una forma bilineal simétrica. Entonces

$$(|\Phi|_B)_{ij} = \Phi(v_i, v_j) = \Phi(v_j, v_i) = (|\Phi|_B)_{ji}.$$

($\Leftarrow$) Sean $x, y \in V$. Entonces

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= (x)_B.\, |\Phi|_B.\, (y)_B^t = \Big((x)_B.\, |\Phi|_B.\, (y)_B^t\Big)^t \\ &= (y)_B.\, |\Phi|_B^t.\, (x)_B^t = (y)_B.\, |\Phi|_B.\, (x)_B^t = \Phi(y, x). \end{aligned}$$ □

A cada forma bilineal simétrica, se le asocia un subespacio núcleo de la siguiente forma:

Definición 10.8 Sea V un K-espacio vectorial y sea $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica. Se define el *núcleo de* Φ como $\mathrm{Nu}(\Phi) = \{x \in V \ / \ \Phi(x, y) = 0\ \forall\, y \in V\}$. En el caso en que $\mathrm{Nu}(\Phi) \neq \{0\}$ se dice que Φ es una forma bilineal simétrica *degenerada*.

Ejemplo. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica definida por

$$\Phi(x, y) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Nu}(\Phi) &\iff (x_1 + 2x_2, 2x_1 + 4x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall (y_1, y_2) \\ &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \iff x_1 + 2x_2 = 0. \end{aligned}$$

Luego, $\mathrm{Nu}(\Phi) = < (-2, 1) >$.

Observación 10.9 Sea $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica. Entonces:

1. $\mathrm{Nu}(\Phi)$ es un subespacio de V.
2. Si $\dim V = n$ y B es una base de V, entonces
$$\begin{aligned} \mathrm{Nu}(\Phi) &= \{x \in V \ / \ (x)_B . |\Phi|_B . (y)_B^t = 0 \ \forall y \in V\} = \{x \in V \ / \ (x)_B . |\Phi|_B = 0\} \\ &= \{x \in V \ / \ |\Phi|_B^t . (x)_B^t = 0\} = \{x \in V \ / \ |\Phi|_B . (x)_B^t = 0\} \\ &= \{x \in V \ / \ (x)_B \in \mathrm{Nu}(|\Phi|)_B\}. \end{aligned}$$
En consecuencia, $\dim \mathrm{Nu}(\Phi) = n - \mathrm{rg}(|\Phi|_B)$.

A partir de este resultado, se define una noción de rango de una forma bilineal simétrica:

Definición 10.10 Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica. Se define el *rango de* Φ como
$$\mathrm{rg}(\Phi) = \dim V - \dim \mathrm{Nu}(\Phi).$$

Notar que, por la observación anterior, si B es cualquier base de V, entonces $\mathrm{rg}(\Phi) = \mathrm{rg}(|\Phi|_B)$.

10.3.2 Diagonalización de formas bilineales simétricas

A continuación, se mostrará un proceso inductivo algorítmico que permite diagonalizar formas bilineales simétricas en cuerpos arbitrarios donde $2 \neq 0$.

Proposición 10.11 *Sea K un cuerpo tal que $2 \neq 0$ en K. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita, y sea $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica. Entonces existe una base B de V tal que $|\Phi|_B$ es diagonal.*

Demostración. Sea $B_0 = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Supongamos que
$$|\Phi|_{B_0} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & & & \\ \vdots & & M & \\ a_{1n} & & & \end{pmatrix}$$
donde $M \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ es una matriz simétrica.

1. Si $a_{11} \neq 0$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{12}}{a_{11}} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ -\frac{a_{1n}}{a_{11}} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & & & \\ \vdots & & M & \\ a_{1n} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \text{con } M' \text{ simétrica.}$$

Ahora se sigue diagonalizando M'.

2. Si $a_{1i} = 0 \; \forall \, 1 \leq i \leq n$:

   Entonces $|\Phi|_{B_0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & M & \\ 0 & & \end{pmatrix}$ y basta diagonalizar M.

3. Si $a_{11} = 0$ y existe i con $2 \leq i \leq n$ tal que $a_{1i} \neq 0$, pueden pasar dos cosas:

i) Si $a_{ii} \neq 0$, se multiplica a izquierda y a derecha por la matriz elemental P^{1i} y se obtiene la matriz simétrica $P^{1i}.|\Phi|_{B_0}.P^{1i}$ tal que $(P^{1i}.|\Phi|_{B_0}.P^{1i})_{11} = a_{ii}$, con lo que estamos en el primer caso.

ii) Si $a_{ii} = 0$, sea $C^{(i)}$ la matriz definida por

$$C^{(i)}_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \text{ o } k = i, \ell = 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces $((C^{(i)})^t.|\Phi|_{B_0}.C^{(i)})_{11} = 2.a_{1i}$ y la matriz es simétrica, con lo que también estamos en el primer caso, pues $2 \neq 0$ en K. □

Ejemplos.

1. Sea $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica tal que

$$|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz $|\Phi|_B$ sea diagonal.

Siguiendo el algoritmo que demuestra la proposición anterior, estamos en el caso en que $a_{11} = 0$ pero $a_{22} \neq 0$. Multiplicando a izquierda y a derecha por la matriz P^{12} obtenemos

$$P^{12}.|\Phi|_E.P^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estamos ahora en condiciones de aplicar el primer paso del algoritmo, ya que tenemos $(P^{12}.|\Phi|_E.P^{12})_{11} = 1 \neq 0$. Luego

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, nos basta diagonalizar el bloque $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, que nuevamente satisface las condiciones del paso 1, así que,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, podemos resumir la operaciones efectuadas de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.P^{12}.|\Phi|_E.P^{12}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la base B de $\mathbb{R}^3$ que estamos buscando debe satisfacer que

$$C(B,E) = P^{12}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto, la base B resulta ser $B = \{(0,1,0),(1,-1,0),(1,-1,1)\}$.

2. Sea $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica tal que

$$|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz $|\Phi|_B$ sea diagonal.

En este caso, $a_{11} = 0$ pero $a_{22} = 0$. Como estamos en el caso 3. ii) del algoritmo anterior, multiplicamos por las matrices $C^{(2)}$ y $(C^{(2)})^t$ a derecha y a izquiera respectivamente y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.|\Phi|_E.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, como estamos en el primer caso del algoritmo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizando ahora el bloque de 2×2 queda que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como antes, si B es la base buscada, la matriz de cambio de base $C(B,E)$ resulta

$$C(B,E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con lo que $B = \{(1,1,0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (0,-2,1)\}$.

10.4 Formas bilineales simétricas reales

10.4.1 Clasificación

En lo que sigue daremos una clasificación de formas bilineales simétricas reales que se utiliza, entre otras cosas, para la clasificación de extremos locales de funciones multivariadas:

Definición 10.12 Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Una forma bilineal simétrica $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ se dice:

i) *Definida positiva* si $\Phi(x,x) > 0 \ \forall x \neq 0$.

ii) *Semidefinida positiva* si $\Phi(x,x) \geq 0 \ \forall x \in V$.

iii) *Definida negativa* si $\Phi(x,x) < 0 \ \forall x \neq 0$.

iv) *Semidefinida negativa* si $\Phi(x,x) \leq 0 \ \forall x \in V$.

v) *Indefinida* si no vale ninguna de las condiciones anteriores.

Ejemplos.

i) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(x,y) = \langle x, y \rangle$ es definida positiva.

ii) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(x,y) = x_1 y_1$ es semidefinida positiva.

iii) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(x,y) = -\langle x, y \rangle$ es definida negativa.

iv) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(x,y) = -x_1 y_1$ es semidefinida negativa.

v) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$, $\Phi(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ es indefinida.

Todas las formas bilineales simétricas reales pueden diagonalizarse de una forma especial:

Teorema 10.13 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y sea $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Entonces existe una base B de V tal que $|\Phi|_B$ es diagonal con 1, -1 y 0 en la diagonal, es decir,*

$$(|\Phi|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{si } 1 \le i \le r,\ j = i \\ -1 & \textit{si } r+1 \le i \le s,\ j = i \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases} \qquad (*)$$

Demostración. Sea B_1 una base de V. Como Φ es simétrica, $|\Phi|_{B_1}$ es simétrica. En consecuencia, es diagonalizable. Más aún, existe una matriz ortogonal O tal que

$$O^t.\,|\Phi|_{B_1}.\,O = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \alpha_r & & & & & & \\ & & & \beta_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \beta_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{con } \alpha_i > 0,\ \beta_i < 0.$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz definida por

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} & \text{si } 1 \le i \le r,\ j = i \\ \frac{1}{\sqrt{-\beta_i}} & \text{si } r+1 \le i \le s,\ j = i \\ 1 & \text{si } i = j > s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es fácil ver que $A.O^t.\,|\Phi|_{B_1}.\,O.A$ tiene la forma del enunciado del teorema.

Puesto que O y A son ambas inversibles, entonces $O.A$ es inversible. En consecuencia, existe una base B tal que $O.A = C(B, B_1)$. Además, $A.O^t = A^t.O^t = (O.A)^t = C(B, B_1)^t$.

Por lo tanto

$$|\Phi|_B = C(B, B_1)^t.\,|\Phi|_{B_1}.\,C(B, B_1) = A.O^t.\,|\Phi|_{B_1}.\,O.A$$

es de la forma $(*)$. □

La cantidad de 1, la de -1 y la de 0 que aparecen en la diagonal cuando se diagonaliza una forma bilineal simétrica real son invariantes asociados a la forma bilineal.

Teorema 10.14 *Sea $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Sean*

$$\begin{aligned} B_1 &= \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n\} \\ B_2 &= \{w_1, \dots, w_t, w_{t+1}, \dots, w_\ell, w_{\ell+1}, \dots, w_n\} \end{aligned}$$

bases de V tales que

$$
\begin{aligned}
(|\Phi|_{B_1})_{ij} &= \begin{cases} 1 & \textit{si } 1 \leq i \leq r,\ j = i \\ -1 & \textit{si } r+1 \leq i \leq s,\ j = i \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases} \\
(|\Phi|_{B_2})_{ij} &= \begin{cases} 1 & \textit{si } 1 \leq i \leq t,\ j = i \\ -1 & \textit{si } t+1 \leq i \leq \ell,\ j = i \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Entonces $r = t$ y $s = \ell$.

Demostración. Sabemos que $\mathrm{rg}(|\Phi|_B) = \dim V - \dim \mathrm{Nu}(\Phi)$ para cualquier base B de V. Entonces $s = \mathrm{rg}(|\Phi|_{B_1}) = \mathrm{rg}(|\Phi|_{B_2}) = \ell$. Más aún, $\mathrm{Nu}(\Phi) = < v_{s+1}, \ldots, v_n > = < w_{\ell+1}, \ldots, w_n >$.

Consideremos

- V^+ un subespacio de V de dimensión máxima tal que $\Phi_{|_{V^+ \times V^+}}$ es definida positiva.
- V^- un subespacio de V de dimensión máxima tal que $\Phi_{|_{V^- \times V^-}}$ es definida negativa.

Veamos que $V^+ \oplus V^- \oplus \mathrm{Nu}(\Phi)$:

i) $V^+ \cap (V^- + \mathrm{Nu}(\Phi)) = \{0\}$:
Supongamos que $x \in V^+$ y $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in V^-$ y $x_2 \in \mathrm{Nu}(\Phi)$. Entonces

$$\Phi(x, x) = \Phi(x_1 + x_2, x_1 + x_2) = \Phi(x_1, x_1) + 2\,\Phi(x_1, x_2) + \Phi(x_2, x_2).$$

Como $x_1 \in V^-$, $\Phi(x_1, x_1) \leq 0$, y como $x_2 \in \mathrm{Nu}(\Phi)$, $\Phi(x_1, x_2) = \Phi(x_2, x_2) = 0$. Entonces $\Phi(x, x) \leq 0$. Pero $x \in V^+$, con lo que $\Phi(x, x) > 0$ o $x = 0$.

En consecuencia, $x = 0$.

ii) $V^- \cap (V^+ + \mathrm{Nu}(\Phi)) = \{0\}$:
Se prueba de la misma manera que el caso anterior.

iii) $\mathrm{Nu}(\Phi) \cap (V^+ + V^-) = \{0\}$:
Supongamos que $x \in \mathrm{Nu}(\Phi)$ y $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in V^+$, $x_2 \in V^-$. Entonces

$$
\begin{aligned}
0 &= \Phi(x, x_1) = \Phi(x_1 + x_2, x_1) = \Phi(x_1, x_1) + \Phi(x_2, x_1), \\
0 &= \Phi(x, x_2) = \Phi(x_1 + x_2, x_2) = \Phi(x_1, x_2) + \Phi(x_2, x_2),
\end{aligned}
$$

y como $\Phi(x_1, x_2) = \Phi(x_2, x_1)$, resulta que $\Phi(x_1, x_1) = \Phi(x_2, x_2)$.

Puesto que $x_1 \in V^+$ y $x_2 \in V^-$ se tiene que $\Phi(x_1, x_1) \geq 0$ y $\Phi(x_2, x_2) \leq 0$, con lo cual debe ser

$$\Phi(x_1, x_1) = \Phi(x_2, x_2) = 0.$$

Luego, $x_1 = x_2 = 0$ y entonces $x = 0$.

Observamos que si $S = < v_1, \dots, v_r >$, entonces $\Phi_{|S\times S}$ es definida positiva, puesto que

$$\Phi\Big(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{r}\alpha_j v_j\Big) = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i\sum_{j=1}^{r}\alpha_j\Phi(v_i, v_j) = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2 > 0$$

si algún $\alpha_i \neq 0$. Como V^+ tiene dimensión máxima entre los subespacios en los cuales la restricción de Φ es definida positiva, $\dim V^+ \geq \dim S = r$.

De la misma manera resulta que $\dim V^- \geq \dim < v_{r+1}, \dots, v_s > = s - r$.

En consecuencia se tiene que

$$n \geq \dim(V^+ \oplus V^- \oplus \mathrm{Nu}\Phi) = \dim V^+ + \dim V^- + \dim \mathrm{Nu}(\Phi) \geq r + (s-r) + (n-s) = n,$$

de donde se desprende que $V^+ \oplus V^- \oplus \mathrm{Nu}\Phi = V$, $\dim V^+ = r$ y $\dim V^- = s - r$.

Considerando la base B_2 se obtiene $\dim V^+ = t$ y $\dim V^- = \ell - t$.

Por lo tanto, $r = t$. □

Observación 10.15 Los subespacios V^+ y V^- que aparecen en la demostración anterior no son únicos.

Por ejemplo, para la forma bilineal $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ podría tomarse $V^+ = < (1, 0) >$ o $V^+ = < (1, 1) >$.

La clasificación de formas bilineales introducida al comienzo de esta sección puede efectuarse a partir de las cantidades de 1, de -1 y de 0 en la matriz diagonal dada por el Teorema 10.13:

Observación 10.16 Sea V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, y sea $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Si B es una base de V tal que $|\Phi|_B$ es de la forma $(*)$, entonces:

i) Φ es definida positiva $\iff r = n$.

ii) Φ es semidefinida positiva $\iff r < n$ y $s = r$.

iii) Φ es definida negativa $\iff r = 0$ y $s = n$.

iv) Φ es semidefinida negativa $\iff r = 0$ y $s < n$.

v) Φ es indefinida $\iff 0 < r < s$.

La suma de la cantidad de 1 y la de -1 en una matriz de la forma $(*)$ es el rango de la forma bilineal Φ. Definimos a continuación otro invariante que, junto con el rango, permite clasificar formas bilineales simétricas reales:

Definición 10.17 Sea V un espacio vectorial real y sea $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica tal que para una base B

$$(|\Phi|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i \leq r,\ j = i \\ -1 & \text{si } r+1 \leq i \leq s,\ j = i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Se define la *signatura de* Φ como la diferencia entre la cantidad de 1 y la cantidad de -1 que aparecen en $|\Phi|_B$, es decir

$$\text{signatura}(\Phi) = \dim V^+ - \dim V^- = 2r - s.$$

10.4.2 Formas bilineales definidas positivas

El hecho de que una forma bilineal simétrica real sea definida positiva se relaciona con los signos de los autovectores de su matriz en una base.

Proposición 10.18 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y sea $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Sea B una base de V. Entonces Φ es definida positiva si y sólo si todos los autovalores de $|\Phi|_B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son positivos.*

Demostración. Como A es una matriz simétrica, existe una matriz ortogonal $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$O^t.\, A.\, O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de A.

Sea $B' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V tal que $O = C(B', B)$. Entonces

$$|\Phi|_{B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

($\Rightarrow$) Para cada $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i = \Phi(v_i, v_i)$. Si Φ es definida positiva, resulta $\lambda_i > 0\ \forall\, 1 \leq i \leq n$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son positivos. Entonces, para cada $x \in V$, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, se tiene que

$$\Phi(x, x) = (x_1, \ldots, x_n). \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0,$$

y vale $\Phi(x, x) = 0$ si y sólo si $x_i = 0\ \forall\, 1 \leq i \leq n$, es decir, si y sólo si $x = 0$.

En consecuencia, Φ es definida positiva. □

Finalmente, estamos en condiciones de demostrar el criterio que permite decidir si una forma bilineal simétrica real es definida positiva mediante el cálculo de los menores principales de su matriz en una base.

Teorema 10.19 (Criterio de Sylvester) *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y sea $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Sea B una base de V. Entonces Φ es definida positiva si y sólo si todos los menores principales de $|\Phi|_B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son positivos.*

Demostración. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y denotemos por $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a la matriz de Φ en la base B.

($\Rightarrow$) Por inducción en n.

Es claro que vale para $n = 1$.

Supongamos que vale para $n-1$ y que V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n.

Como Φ es definida positiva, $a_{11} = \Phi(v_1, v_1) > 0$. Entonces, A se puede triangular, en el sentido de las formas bilineales, como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{12}}{a_{11}} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ -\frac{a_{1n}}{a_{11}} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} . A . \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que estas operaciones *no* cambian los menores principales. Por lo tanto, el i-ésimo menor principal de A se obtiene multiplicando el $(i-1)$-ésimo menor principal de M por a_{11}.

Ahora, si $S = < v_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}} . v_1, \dots, v_n - \frac{a_{1n}}{a_{11}} . v_1 >$, entonces M es la matriz (simétrica) de la forma bilineal $\Phi_{|S\times S} : S \times S \to \mathbb{R}$ (que se obtiene al restringir Φ a $S \times S$) en la base $B_S = \{v_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}} . v_1, \dots, v_n - \frac{a_{1n}}{a_{11}} . v_1\}$. Como $\Phi_{|S\times S}$ es definida positiva y $\dim S = n-1$, por hipótesis inductiva, los menores principales de M son positivos.

Como además $a_{11} > 0$, resulta que todos los menores principales de A son positivos.

($\Leftarrow$) Por inducción en n.

Para $n = 1$ no hay nada que hacer.

Supongamos que $n > 1$ y que el resultado vale para $n - 1$.

El primer menor principal de A es positivo, es decir, $a_{11} > 0$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{12}}{a_{11}} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ -\frac{a_{1n}}{a_{11}} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} . A . \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Observar que todos los menores principales de M son positivos, puesto que al multiplicarlos por a_{11} se obtienen menores principales de A, que son positivos.

Si $S = < v_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}.v_1, \dots, v_n - \frac{a_{1n}}{a_{11}}.v_1 >$ y $B_S = \{v_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}.v_1, \dots, v_n - \frac{a_{1n}}{a_{11}}.v_1\}$, entonces $M = |\Phi_{|S\times S}|_{B_S}$. Por hipótesis inductiva, $\Phi_{|S\times S}$ es definida positiva. Entonces existe una base $B' = \{w_2, \dots, w_n\}$ de S tal que $|\Phi_{|S\times S}|_{B'} = I_{n-1}$ (ver Observación 10.16). En consecuencia,

$$|\Phi|_{\{v_1, w_2, \dots, w_n\}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } a_{11} > 0.$$

Luego, Φ es definida positiva. □

10.5 Ejercicios

Ejercicio 1. Probar que las siguientes funciones son formas bilineales:

i) $\Phi : K^n \times K^n \to K$ definida por $\Phi(x, y) = x.A.y^t$ donde $A \in K^{n\times n}$.

ii) $\Phi : V \times V \to K$ definida por $\Phi(v, w) = f_1(v).f_2(w)$ donde V es un K-espacio vectorial y $f_1,\ f_2 \in V^*$.

iii) $\Phi : K^{m\times n} \times K^{m\times n} \to K$ definida por $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(A^t.C.B)$ donde $C \in K^{m\times m}$.

Ejercicio 2. Determinar si las siguientes funciones son o no formas bilineales. En caso afirmativo calcular su matriz en la base canónica correspondiente y determinar si la forma bilineal es simétrica:

i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$

ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = -x_1.y_1 - x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 + 2.x_1.y_2$

iii) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = (1 + i).x_1.y_1 + x_2.y_1 + (1 - i).x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$

iv) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = x_1^2 + x_2.y_1 + x_1.y_2 - x_2^2$

v) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_3.y_3 - x_1.y_3 - x_3.y_1$

vi) $\Phi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = x_1.y_1 + (2 + i).x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 + (2 + i).x_1.y_2 + x_1.y_3 + x_3.y_1 - x_3.y_3$

vii) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = (3x_1 + x_2 - x_3).(4y_2 + 2y_3)$

Ejercicio 3.

i) Para las formas bilineales sobre $\mathbb{R}^3$ del ejercicio anterior, calcular su matriz en la base $\{(1,2,4),(2,-1,0),(-1,2,0)\}$.

ii) Para las formas bilineales simétricas del ejercicio anterior calcular su núcleo.

Ejercicio 4. Hallar una forma bilineal Φ simétrica en $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(\Phi) =< (1,2,-1) >$ y $\Phi((1,1,1),(1,1,1)) < 0$. Calcular la matriz de Φ en la base canónica.

Ejercicio 5. Para cada una de las formas bilineales reales siguientes hallar una base ortonormal tal que la matriz de la forma bilineal en dicha base sea diagonal y exhibir la matriz de la forma bilineal en esta base. Calcular signatura y rango, decidir si es degenerada o no, definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) o indefinida.

i) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

ii) $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x,y) = 2.x_1.y_1 + 2.x_1.y_3 + 2.x_3.y_1 - x_3.y_3 - x_4.y_4$.

Ejercicio 6. Para cada una de las formas bilineales simétricas reales dadas en la base canónica por las matrices siguientes, hallar una base B tal que la matriz de la forma bilineal en dicha base sea diagonal con 1, -1 y 0 en la diagonal. Calcular signatura y rango, decidir si es degenerada o no, definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) o indefinida.

i) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \\ -2 & -5 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que la forma bilineal que tiene a A como matriz en la base canónica es definida negativa si y sólo si los signos de los menores principales de A van alternándose comenzando por un signo menos.