

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka teoretyczna

JAN CZAJKOWSKI

Pewne własności klastrow w perkolacji na
płaszczyźnie hiperbolicznej

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
dr. Jana Dymary

Wrocław 2008

Oświadczam, że pracę magisterską wykonałem samodzielnie i zgłaszam ją do oceny.

Data Podpis autora pracy

Oświadczam, że praca jest gotowa do oceny przez recenzenta.

Data Podpis opiekuna pracy

1 Wstęp

Teoria perkolacji zajmuje się własnościami losowych grafów. Graf taki losujemy jako podgraf zadanego grafu wyjściowego G , a możemy to robić na różne sposoby.

Najprostszym z nich jest perkolacja Bernoulliego dwóch rodzajów: krawędziowa i wierzchołkowa. Krawędziowa perkolacja Bernoulliego polega na ustaleniu wartości prawdopodobieństwa $p \in [0; 1]$ i losowaniu każdej krawędzi grafu G niezależnie z prawdopodobieństwem p do naszego podgrafu. Jego zbiór wierzchołków jest zawsze zbiorem wszystkich wierzchołków grafu wyjściowego. W wierzchołkowej wersji tego procesu losujemy również z ustalonym prawdopodobieństwem, ale nie krawędzie, lecz niezależnie każdy wierzchołek całego grafu G , i bierzemy podgraf indukowany na zbiorze wylosowanych wierzchołków.

Pytamy się wówczas o składowe spójności (inna nazwa: klastry) takiego losowego podgrafu. Jeśli graf wyjściowy jest nieskończony i spójny, to mogą się zdarzyć wśród nich nieskończone składowe spójności. Okazuje się, że prawdopodobieństwo tego zdarzenia – że wśród składowych spójności losowego podgrafu w perkolacji Bernoulliego jest składowa nieskończona – wynosi zawsze 0 albo 1, niezależnie od grafu G i prawdopodobieństwa p (dowód – patrz np. tw. 1.11 w [Grim]).

Z drugiej strony prawdopodobieństwo tego zdarzenia rośnie wraz z p dla ustalonego grafu G – jest to intuicyjnie zrozumiałe, gdyż, mówiąc nieformalnie, im większe jest p , tym więcej krawędzi ma nasz losowy podgraf. Zatem gdybyśmy zwiększali wartość parametru p od 0 do 1, to w którymś momencie prawdopodobieństwo istnienia nieskończonej składowej w losowym podgrafie przestaje być 0, a zaczyna wynosić 1. To zjawisko przeskoku wartości owego prawdopodobieństwa z 0 na 1 nazywa się przejściem fazowym, a wartość p przy tym przeskoku – prawdopodobieństwem krytycznym, które oznaczamy $p_c(G)$. (Jeżeli p. n. jest nieskończona składowa w naszym podgrafie losowym, to mówimy, że zachodzi perkolacja.)

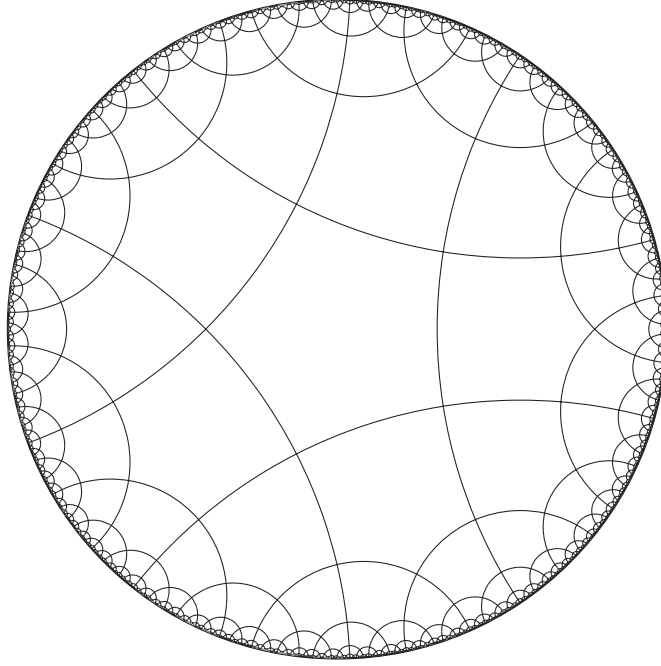
Okazuje się, że analogicznych przejść fazowych może być więcej. Możemy np. pytać się, czy jest w naszym losowym podgrafie konkretna ilość nieskończonych składowych, np. nieskończenie wiele. Wówczas okazuje się, iż mamy do czynienia z przejściem fazowym, które polega na tym, że poniżej pewnej wartości progowej parametr p warunkuje istnienie p. n. nieskończenie wielu składowych w losowym podgrafie, a powyżej – dokładnie jednej składowej. Tę progową wartość p nazywamy z kolei prawdopodobieństwem unifikacji i oznaczamy p_u . (W rzeczywistości zawsze przy założeniach o spójności i nieskończoności i dodatkowym założeniu o tranzytywności¹ grafu G jest p. n. dokładnie zero, jedna albo nieskończenie wiele nieskończonych składowych w losowym podgrafie dla krawędziowej perkolacji Bernoulliego grafu G).

Są przykłady grafów, dla których te obydwa progi: prawdopodobieństwo krytyczne i prawdopodobieństwo unifikacji są różne i różne od 0 i 1, tzn.

$$0 < p_c(G) < p_u(G) < 1,$$

a więc mamy wówczas trzy fazy względem $p \in [0; 1]$. Takimi grafami są np. grafy parkietażu płaszczyzny hiperbolicznej \mathbb{H}^2 wielokątami foremnymi (patrz: definicje 12 i 15), o czym będzie mówiło twierdzenie 17 opierające się na twierdzeniu 1.1 z pracy [hp]. (Przykładowy graf takiego parkietażu przedstawia rysunek 1.) Wówczas skrótowo można mówić o uprawianiu *perkolacji na płaszczyźnie hiperbolicznej*. Taki właśnie tytuł (*Percolation in the Hyperbolic Plane*) ma wspomniana praca [hp], która była jedną z motywacji dla powstania niniejszej pracy, ale główną motywacją były hipotezy dotyczące krawędziowej perkolacji Bernoulliego na podobnych grafach parkietaży przestrzeni hiperbolicznej \mathbb{H}^3 (np. graf pochodzący od parkietażu \mathbb{H}^3 dwunastościanami foremnymi o kącie prostym). Otóż Benjamini i Schramm postawili hipotezy zawarte w

¹Graf G jest tranzytywny z def., gdy grupa jego automorfizmów działa tranzytywnie na jego zbiorze wierzchołków.



Rysunek 1: Graf parkietażu płaszczyzny hiperbolicznej pięciokątami foremnymi prostokątnymi.

książce [PL] jako hipoteza 6.26 i hipoteza 6.29, z których wynikają identyczne ostre nierówności dla prawdopodobieństwa krytycznego i prawdopodobieństwa unifikacji w przypadku grafu takiego parkietażu \mathbb{H}^3 (gdyż powinien być on tranzytywny, nieśredniowalny i z jednym końcem²). Hipoteza zaproponowana przez mojego promotora postuluje istnienie jeszcze jednego (istotnie różnego od dwóch pozostałych) przejścia fazowego dla takich grafów w \mathbb{H}^3 w ramach fazy środkowej (gdy jest p. n. nieskończenie wiele nieskończonych klastrow). Przejście to nie polegałoby już, oczywiście, na zmianie ilości nieskończonych składowych spójności wylosowanego podgrafu, lecz np. na występujących p. n. geometrycznych własnościach nieskończonych składowych, które ulegają zmianie przy tym przejściu. Otóż o \mathbb{H}^3 można myśleć jako o kuli otwartej w modelu dyskowym Poincarégo. Można wyobrazić sobie, że gdy w takim grafie mamy w podgrafie losowym p. n. jedną nieskończoną składową, to jest ona obiektem w pewnym sensie trójwymiarowym i ma jeden koniec³. W fazie bez nieskończonych klastrow składowe są p. n. skończone, a więc w skali całej \mathbb{H}^3 są podobne do obiektów zerowymiarowych (punktów). Można więc sądzić, że w fazie środkowej, gdy jest p. n. nieskończenie wiele nieskończonych klastrow, dla mniejszych wartości prawdopodobieństwa wylosowania pojedynczej krawędzi p nieskończone klastry są szczupłe, włókniste, czyli „jednowymiarowe”, zaś dla większych p są szersze, wachlarzowate, „dwuwymiarowe”. Próbą rozróżnienia pomiędzy składowymi „jednowymiarowymi”, a „dwuwymiarowymi” jest badanie brzegów ich końców na brzegu przestrzeni hiperbolicznej, co zdefiniuję potem (patrz def. 18). Mianowicie „jednowymiarową” składową charakteryzowałoby to, że każdy jej koniec ma brzeg jednopunktowy.

W niniejszej pracy będę zajmował się krawędziową perkolacją Bernoulliego na pewnych grafach parkietażu płaszczyzny hiperbolicznej wielokątami foremnymi. Udowodnię twierdzenie wykluczające przejście fazowe zdefiniowane przy pomocy brzegów końców nieskończonych klastrow

²Patrz def. 16

³Patrz def. 16

w przypadku \mathbb{H}^2 . Chcielibyśmy bowiem, aby nie było czterech faz w przypadku \mathbb{H}^2 , a jedynie w przypadku \mathbb{H}^3 , gdyż fazy dla perkolacji na grafie parkietażu \mathbb{H}^2 miałyby odpowiadać intuicji zero-, jedno- i dwuwymiarowych klastrów. Dodatkowo w rozdziale pt. „Drzewa” będę pomocniczo rozważał krawędziową perkolację Bernoulliego na pełnych nieskończonych d -arnych drzewach.

Bardzo dziękuję mojemu promotorowi dr. Janowi Dymarze za cenne sugestie i wskazówki redakcyjne i merytoryczne oraz za propozycję tematu pracy.

2 Podstawowe pojęcia

Dla dowolnego grafu G niech $E(G)$, $V(G)$ oznaczają zbiory odpowiednio krawędzi i wierzchołków w G . Formalnie zdefiniujemy teraz podstawowe pojęcia: dla dowolnego nieskończonego, spójnego grafu G niech $\omega^{(p)}(G)$ oznacza proces krawędziowej perkolacji Bernoulliego na grafie G z prawdopodobieństwem p wylosowania pojedynczej krawędzi, czyli taki losowy podgraf G , że

- p. n. $V(\omega^{(p)}(G)) = V(G)$;
- dla krawędzi $e \in E(G)$ zachodzi $P(e \in E(\omega^{(p)}(G))) = p$;
- rodzina $\{\{e \in E(\omega^{(p)}(G))\} : e \in E(G)\}$ jest rodziną zdarzeń stochastycznie niezależnych.

Prawdopodobieństwo krytyczne i prawdopodobieństwo unifikacji definiujemy w następujący sposób:

$$p_c(G) = \sup\{p \in [0; 1] : P(\omega^{(p)}(G) \text{ ma nieskończoną składową spójności}) = 0\},$$

$$p_u(G) = \inf\{p \in [0; 1] : P(\omega^{(p)}(G) \text{ ma dokładnie jedną nieskończoną składową spójności}) = 1\}.$$

Dla wierzchołka $v \in V(G)$ dowolnego grafu G niech $a_v(p)$ oznacza prawdopodobieństwo, że v leży w nieskończonej składowej $\omega^{(p)}(G)$. Okazuje się, że perkolacja w $\omega^{(p)}(G)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_v(p) > 0$ dla pewnego (równoważnie: każdego) $v \in V(G)$ (patrz znów tw. 1.11 z [Grim]).

Uwaga 1. W przypadku dowolnego grafu G dla każdego jego wierzchołka $v \in V(G)$ funkcja a_v jest niemalejąca.

Dowód. Przyjmijmy skrótowe oznaczenie $\omega^{(p)}$ na konfigurację losową w perkolacji dla grafu G przy $p \in [0; 1]$, czyli $\omega^{(p)} = \omega^{(p)}(G)$. Rodzinę

$$\{\omega^{(p)} : p \in [0; 1]\}$$

można skonstruować w następujący sposób: niech $\{X_e : e \in E(G)\}$ będzie rodziną zmiennych losowych stochastycznie niezależnych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0; 1]$. Wówczas dla $p \in [0; 1]$ podgraf losowy $\omega^{(p)}$ zdefiniowany jako podgraf G o zbiorze wierzchołków $V(G)$, a zbiorze krawędzi $\{e \in E(G) : X_e \leq p\}$ jest zgodny z definicją procesów perkolacyjnych Bernoulliego $\omega^{(p)}$ na krawędziach G .

Definicja 2. Mówimy, że własność A podgrafu G (niech formalnie A będzie rodziną podgrafów G o tej własności) jest niemalejąca (odp. nierosnąca), gdy dla podgrafu γ o własności A każdy podgraf G zawierający γ (odp. zawarty w γ) też ma własność A . Wówczas zdarzenie losowe nazywamy niemalejącym (odp. nierosnącym), gdy jest ono postaci $\{\omega^{(p)} \in A\}$ dla własności niemalejącej (odp. nierosnącej) A .

Jeśli A jest własnością niemalejącą (odp. nierosnącą), to zawsze $P(\omega^{(p)} \in A)$ jest niemalejące (odp. nierosnące) względem p , gdyż dla $p < q$, gdzie $p, q \in [0; 1]$ zachodzi p. n.

$$\{e \in E(G) : X_e \leq p\} \subseteq \{e \in E(G) : X_e \leq q\},$$

czyli $\omega^{(p)}$ jest podgrafem $\omega^{(q)}$, więc p. n. jeśli A jest niemalejąca i $\omega^{(p)} \in A$, to $\omega^{(q)} \in A$, czyli

$$P(\omega^{(p)} \in A) \leq P(\omega^{(q)} \in A).$$

Podobnie, gdy A jest nierosnąca, to

$$P(\omega^{(p)} \in A) \geq P(\omega^{(q)} \in A).$$

Otóż zdarzenie mówiące, że składowa spójności wierzchołka v jest nieskończona (jest to własność podgrafu grafu G) jest zdarzeniem niemalejącym, gdyż dla podgrafów γ, γ' grafu G , gdzie γ jest podgrafem γ' , jeśli γ ma nieskończoną składową zawierającą v , to γ' zawiera tę składową, więc γ' tym bardziej spełnia ten warunek. Zatem $a_v(p)$ jako prawdopodobieństwo powyższego zdarzenia jest funkcją niemalejącą względem p . ■

3 Drzewa

Rozważamy krawędziową perkolację Bernoulliego na pełnym nieskończonym d -arnym drzewie T , gdzie $d = 2, 3, 4, \dots$ (z teoriografowego punktu widzenia wierzchołek obrany jako korzeń ma stopień d , a wszystkie pozostałe - stopień $d + 1$).

Oznaczenia 3. Niech $\omega^{(p)}$ dla $p \in [0; 1]$ oznacza konfigurację (podgraf) wylosowaną w procesie perkolacyjnym Bernoulliego na zbiorze krawędzi T z prawdopodobieństwem p wylosowania pojedynczej krawędzi. Niech $\text{Sk}^{(p)}$ oznacza zdarzenie, że korzeń drzewa, który oznaczę przez v , leży w skończonej składowej spójności $\omega^{(p)}$, a $a(p) = P((\text{Sk}^{(p)})^c) = 1 - P(\text{Sk}^{(p)})$, czyli $a(p) = a_v(p)$.

Twierdzenie 4. $a(p)$ jest funkcją ciągłą p na odcinku $[0; 1]$ i

$$(1) \quad a(p) \begin{cases} = 0 & \text{dla } p \leq \frac{1}{d} \\ > 0 & \text{dla } p > \frac{1}{d} \end{cases}$$

(Przy tym oczywiście $a(1) = 1$ i a jest rosnąca.) Zatem perkolacja zachodzi dokładnie gdy $p > \frac{1}{d}$.

Dowód.

Oznaczenia 5. Ponumerujmy krawędzie wychodzące z korzenia liczbami od 1 do d i oznaczmy i -tą krawędź przez e_i . Niech wówczas:

T_i - i -te poddrzewo na pierwszym poziomie (czyli ukorzenione w i -tym dziecku korzenia T).

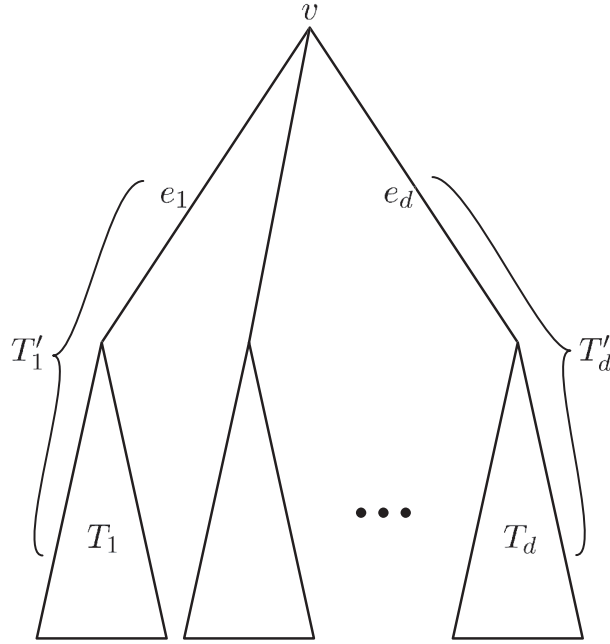
T'_i - T_i z dodanym korzeniem T i krawędzią e_i .

$\text{Sk}_i^{(p)}$ - zdarzenie: korzeń T_i jest w skończonej składowej obcięcia $\omega^{(p)}$ do T_i .

Uwaga 6. Niech $\Sigma^{(p)}$ oznacza σ -ciało zdarzeń generowane przez zmienne oznaczające stany krawędzi dla $\omega^{(p)}$, czyli $\mathbf{1}_{e \in \omega^{(p)}}$ dla $e \in E(T)$:

$$\Sigma^{(p)} = \sigma(\{\mathbf{1}_{e \in \omega^{(p)}}\}_{e \in E(T)}).$$

Można łatwo pokazać, że wówczas istotnie $\text{Sk}^{(p)}, \text{Sk}_i^{(p)} \in \Sigma^{(p)}$ dla $i = 1, \dots, d$.



Rysunek 2: Drzewo T z zaznaczonymi fragmentami, o których mowa w oznaczeniach 5.

Ponieważ $\text{Sk}_i^{(p)}$ jest tak samo zdefiniowane dla drzewa T_i , jak $\text{Sk}^{(p)}$ dla drzewa T , a T_i i T są izomorficzne, to $\text{P}(\text{Sk}_i^{(p)}) = \text{P}(\text{Sk}^{(p)})$. Z drugiej strony zdarzenie $\text{Sk}^{(p)}$ można opisać „rekurencyjnie” za pomocą zdarzeń $\text{Sk}_i^{(p)}$:

$$\begin{aligned} \text{Sk}^{(p)} &= \bigcap_{i=1}^d \{ \omega^{(p)} \text{ obcięta do } T'_i \text{ ma skończoną składową wierzchołka } v \text{ (czyli korzenia } T'_i) \} \\ &= \bigcap_{i=1}^d \left(\{e_i \notin \omega^{(p)}\} \cup \text{Sk}_i^{(p)} \right). \end{aligned}$$

Ponieważ $\{e_i \notin \omega^{(p)}\}$, $\text{Sk}_i^{(p)}$ dla $i = 1, \dots, d$ są zdarzeniami stochastycznie niezależnymi, to

$$\begin{aligned} \text{P}(\text{Sk}^{(p)}) &= \text{P} \left(\bigcap_{i=1}^d \left(\{e_i \notin \omega^{(p)}\} \cup \text{Sk}_i^{(p)} \right) \right) = \prod_{i=1}^d \text{P} \left(\{e_i \notin \omega^{(p)}\} \cup \text{Sk}_i^{(p)} \right) \\ &= \prod_{i=1}^d \left(1 - \text{P} \left(\{e_i \in \omega^{(p)}\} \cap (\text{Sk}_i^{(p)})^c \right) \right) = \prod_{i=1}^d \left(1 - \text{P} \left(\{e_i \in \omega^{(p)}\} \right) \text{P} \left((\text{Sk}_i^{(p)})^c \right) \right) \\ &= \prod_{i=1}^d \left(1 - p \text{P} \left((\text{Sk}^{(p)})^c \right) \right) = \left(1 - p \text{P} \left((\text{Sk}^{(p)})^c \right) \right)^d, \end{aligned}$$

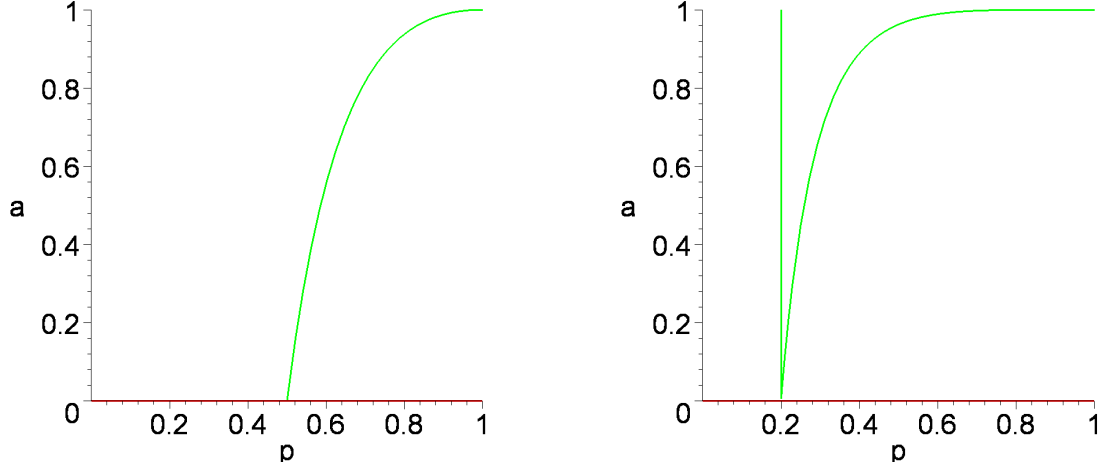
czyli

$$1 - a(p) = (1 - pa(p))^d.$$

Innymi słowy, $a(p)$ spełnia równanie

$$(2) \quad (1 - pa)^d + a - 1 = 0$$

zmiennej a .



Rysunek 3: Wykresy przedstawiające zależność zbioru pierwiastków $a \in [0; 1]$ równania (2) od $p \in [0; 1]$ dla $d = 2$ (po lewej) i dla $d = 5$ (po prawej). Dwa kolory przedstawiają dwa różne pierwiastki. Okazuje się, że większe z tych wartości są równe $a(p)$. Pionowa linia na prawym wykresie jest wynikiem najpewniej błędów numerycznych.

To równanie ma co najwyżej dwa pierwiastki w odcinku $[0; 1]$ (gdy parametr $p \in [0; 1]$), gdyż druga pochodna lewej strony względem zmiennej a

$$(3) \quad \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left((1 - pa)^d + a - 1 \right) = \frac{\partial}{\partial a} \left(-dp(1 - pa)^{d-1} + 1 \right) = d(d-1)p^2(1 - pa)^{d-2}$$

jest dodatnia dla $p \in (0; 1]$ i $a \in [0; 1)$, czyli lewa strona równania dla $d \geq 2$ jest ściśle wypukła na odcinku $[0; 1]$ (względem a przy ustalonym $p > 0$). (Dla $p = 0$ równanie to ma oczywiście jedyny pierwiastek $a = 0$.)

Zawsze (jak widać) pierwiastkiem równania (2) jest $a = 0$. Okazuje się jednak, że jest on jedyny w odcinku $[0; 1]$, gdy $p < \frac{1}{d}$: otóż z nierówności Bernoulliego przy $p < \frac{1}{d}$, czyli $pd < 1$ mamy

$$1 - a = (1 - pa)^d \geq 1 - dpa \geq 1 - a,$$

czyli $1 - dpa = 1 - a$, $dpa = a$, co jest niemożliwe dla $a > 0$, gdyż wówczas byłoby $pd = 1$ sprzecznie z założeniem. Zatem dla $p < \frac{1}{d}$ jedynym rozwiązaniem $a \in [0; 1]$ równania (2) jest $a = 0$, czyli wówczas $P(\text{Sk}^{(p)}) = 1$. Na wykresach widać, że dla $p > \frac{1}{d}$ równanie ma dwa pierwiastki na odcinku $[0; 1]$; okaże się, że wówczas $a(p)$ jest tym dodatnim pierwiastkiem. Aby obliczyć $P(\text{Sk}^{(p)})$ dla $p \geq \frac{1}{d}$, spróbuję wyznaczyć je innym, kombinatorycznym sposobem. Wprowadzę w tym celu kolejne oznaczenia: dla podgrafu H grafu G niech $\partial_G H$ oznacza zbiór wszystkich krawędzi G spoza H incydentnych z jakimś wierzchołkiem z H . Niech ogólnie $|G| = |E(G)|$ dla grafu G . Niech $K^{(p)}$ oznacza składową spójności korzenia drzewa T w $\omega^{(p)}$ (jest to zmienna losowa), zaś \mathcal{S} – rodzinę wszystkich skończonych poddrzew T zakorzenionych w korzeniu T . Otóż

$$\text{Sk}^{(p)} = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \{K^{(p)} = S\},$$

a zdarzenie

$$\{K^{(p)} = S\} = \bigcap_{e \in S} \{e \in \omega^{(p)}\} \cap \bigcap_{e \in \partial_T S} \{e \notin \omega^{(p)}\}.$$

Zatem

$$P(K^{(p)} = S) = \prod_{e \in S} p \prod_{e \in \partial_T S} (1-p) = p^{|S|} (1-p)^{|\partial_T S|}$$

i

$$P(\text{Sk}^{(p)}) = \sum_{S \in \mathcal{S}} P(K^{(p)} = S) = \sum_{S \in \mathcal{S}} p^{|S|} (1-p)^{|\partial_T S|}.$$

Okazuje się, że zachodzi następujący lemat:

Lemat 7. $|\partial_T S| = (d-1)|S| + d$ dla $S \in \mathcal{S}$.

Dowód. Można to uzasadnić poprzez indukcję względem rozmiaru drzewa S :

Baza indukcji: dla $|S| = 0$ zachodzi $V(S) = \{v\}$ i $\partial_T S = \{e_i : i = 1, \dots, d\}$, czyli

$$|\partial_T S| = d = (d-1)|S| + d.$$

Krok indukcyjny: Niech $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że dla $S \in \mathcal{S}$ takiego, że $|S| < n$ teza indukcyjna zachodzi. Wówczas dla $S \in \mathcal{S}$, jeśli $|S| = n$, to

$$\partial_T S = \bigcup_{i=1}^d (\partial_T S \cap E(T'_i)) = \bigcup_{i=1}^d \partial_{T'_i}(S \cap T'_i)$$

gdyż dla dowolnego grafu G i jego podgrafów G', H mamy równość $\partial_{G'}(H \cap G') = \partial_G H \cap E(G')$. $S \cap T_i$ jest albo grafem pustym (bez wierzchołków), albo poddrzewem T_i zawierającym korzeń T_i . W drugim przypadku stosując założenie indukcyjne dla $S \cap T_i$ jako podgrafu T_i (T_i jest izomorficzne z T a $|S \cap T_i| < |S|$ gdyż tu na pewno $e_i \in E(S)$) mamy

$$\left| \partial_{T'_i}(S \cap T'_i) \right| = |\partial_{T_i}(S \cap T_i)| = (d-1)|S \cap T_i| + d = (d-1)|S \cap T'_i| + 1.$$

Jeśli zaś $V(S \cap T_i)$ jest pusty, to $e_i \notin E(S)$ i $|S \cap T'_i| = 0$, a $\partial_{T'_i}(S \cap T'_i) = \{e_i\}$, więc

$$\left| \partial_{T'_i}(S \cap T'_i) \right| = 1 = (d-1)|S \cap T'_i| + 1.$$

Zatem ogólnie

$$\left| \partial_{T'_i}(S \cap T'_i) \right| = (d-1)|S \cap T'_i| + 1$$

dla $i = 1, \dots, d$ i

$$\begin{aligned} |\partial_T S| &= \sum_{i=1}^d \left| \partial_{T'_i}(S \cap T'_i) \right| = (d-1) \sum_{i=1}^d |S \cap T'_i| + d \\ &= (d-1) \left| \bigcup_{i=1}^d E(S \cap T'_i) \right| + d = (d-1)|S| + d \end{aligned}$$

dla $S \in \mathcal{S}$. ■

Zatem

$$P(\text{Sk}^{(p)}) = \sum_{S \in \mathcal{S}} p^{|S|} (1-p)^{(d-1)|S|+d} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^d p^n (1-p)^{(d-1)n+d},$$

gdzie dla $n \geq 0$, $d \geq 2$ symbol C_n^d oznacza ilość poddrzew drzewa T (d -arnego) o wspólnym korzeniu z T o rozmiarze n :

$$C_n^d = |\{S \in \mathcal{S} : |S| = n\}|.$$

Wobec tego dla $p < 1$

$$\frac{P(\text{Sk}^{(p)})}{(1-p)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^d (p(1-p)^{d-1})^n,$$

czyli lewa strona zależy rosnąco od $p(1-p)^{d-1}$. Oznaczając $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^d x^n$ (z powyższych równości uzasadnionych probabilistycznie wynika, że szereg jest zbieżny dla wartości funkcji $p(1-p)^{d-1}$ na przedziale $[0; 1]$) mamy

$$(4) \quad \frac{P(\text{Sk}^{(p)})}{(1-p)^d} = F(p(1-p)^{d-1}).$$

Niech $\varphi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $\varphi(p) = p(1-p)^{d-1}$. Obliczmy jej ekstrema: $\varphi \geq 0$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, czyli

$$\min_{p \in [0; 1]} \varphi(p) = 0,$$

zaś $\varphi(p) > 0$ dla $p \in (0; 1)$, czyli punkt, w którym φ przyjmuje maksimum musi leżeć w odcinku $(0; 1)$ i być zerem pochodnej φ :

$$\varphi'(p) = (1-p)^{d-1} - p(d-1)(1-p)^{d-2} = (1-p)^{d-2}(1-p-p(d-1)) = (1-p)^{d-2}(1-pd)$$

i $\varphi'(p) = 0$ dla $p = 1$ lub $p = \frac{1}{d}$, czyli

$$\max \varphi = \varphi\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{d} \left(\frac{d-1}{d}\right)^{d-1} = \frac{(d-1)^{d-1}}{d^d}.$$

Ponieważ $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, a $\varphi(p) > 0$ dla $p \in (0; 1)$, i $\varphi'(p)$ zeruje się tylko dla $p = \frac{1}{d}$ i ewentualnie $p = 1$, to φ rośnie ściśle na odcinku $[0; \frac{1}{d}]$ i ściśle maleje na odcinku $[\frac{1}{d}; 1]$, czyli

$$\varphi \upharpoonright_{[0; \frac{1}{d}]} : \left[0; \frac{1}{d}\right] \xrightarrow{1-1, \text{na}} \left[0; \varphi\left(\frac{1}{d}\right)\right]$$

i

$$\varphi \upharpoonright_{[\frac{1}{d}; 1]} : \left[\frac{1}{d}; 1\right] \xrightarrow{1-1, \text{na}} \left[0; \varphi\left(\frac{1}{d}\right)\right].$$

Niech więc

$$\varrho : [0; 1] \xrightarrow{1-1, \text{na}} [0; 1]$$

będzie funkcją ściśle malejącą utożsamiającą punkty odcinka $[0; 1]$, na których φ przyjmuje tę samą wartość, przeprowadzając odcinek $[0; \frac{1}{d}]$ na $[\frac{1}{d}; 1]$ i *vice-versa*:

$$\text{dla } p \leq \frac{1}{d} \quad \varrho(p) := (\varphi \upharpoonright_{[\frac{1}{d}; 1]})^{-1}(\varphi(p)) \in \left[\frac{1}{d}; 1\right],$$

$$\text{dla } p \geq \frac{1}{d} \quad \varrho(p) := (\varphi \upharpoonright_{[0; \frac{1}{d}]})^{-1}(\varphi(p)) \in \left[0; \frac{1}{d}\right].$$

Tak zdefiniowana ϱ jest ściśle malejąca na odcinku $[0; \frac{1}{d}]$ i ściśle malejąca na odcinku $[\frac{1}{d}; 1]$, więc i na całym odcinku $[0; 1]$ (definicja $\varrho(\frac{1}{d})$ jest poprawna, gdyż

$$\left(\varphi \upharpoonright_{[\frac{1}{d}; 1]}\right)^{-1} \left(\varphi\left(\frac{1}{d}\right)\right) = \frac{1}{d} = \left(\varphi \upharpoonright_{[0; \frac{1}{d}]}\right)^{-1} \left(\varphi\left(\frac{1}{d}\right)\right)$$

– φ przyjmuje wartość $\varphi(\frac{1}{d})$ tylko raz). Zatem dla $p > \frac{1}{d}$ z równości (4) i z faktu, że $\varphi(p) = \varphi(\varrho(p))$ mamy równość

$$\frac{P(\text{Sk}^{(p)})}{(1-p)^d} = F(\varphi(p)) = F(\varphi(\varrho(p))) = \frac{P(\text{Sk}^{(\varrho(p))})}{(1-\varrho(p))^d},$$

przy czym $\varrho(p) < \frac{1}{d}$, więc

$$(5) \quad P(\text{Sk}^{(p)}) = \frac{(1-p)^d}{(1-\varrho(p))^d} P(\text{Sk}^{(\varrho(p))}) = \left(\frac{1-p}{1-\varrho(p)}\right)^d < 1,$$

gdyż $p > \frac{1}{d} > \varrho(p)$ i $1-p < 1-\varrho(p)$, czyli $\frac{1-p}{1-\varrho(p)} < 1$. Zatem $P(\text{Sk}^{(p)})$ dla $p > \frac{1}{d}$ przyjmuje wartość mniejszą od 1.

Zauważmy, że ϱ jest homeomorfizmem odcinka $[0; 1]$, ponieważ ϱ i ϱ^{-1} są ściśle malejącymi bijekcjami odcinka $[0; 1]$, a więc przeprowadzają odcinki otwarte $[0; 1]$ w odcinki otwarte. Ponieważ $a(p)$ jest niemalejącą, a $P(\text{Sk}^{(p)})$ – nierosnącą funkcją p , to skoro

$$\lim_{p \rightarrow \frac{1}{d}^+} \varrho(p) = \varrho\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{d}$$

(z ciągłości ϱ), to

$$(6) \quad P\left(\text{Sk}^{(\frac{1}{d})}\right) \geq \lim_{p \rightarrow \frac{1}{d}^+} P\left(\text{Sk}^{(p)}\right) = \lim_{p \rightarrow \frac{1}{d}^+} \left(\frac{1-p}{1-\varrho(p)}\right)^d = \left(\frac{1-\frac{1}{d}}{1-\frac{1}{d}}\right)^d = 1,$$

czyli

$$P\left(\text{Sk}^{(\frac{1}{d})}\right) = 1.$$

Podsumowując

$$P(\text{Sk}^{(p)}) \begin{cases} = 1 & \text{dla } p \leq \frac{1}{d} \\ < 1 & \text{dla } p > \frac{1}{d} \end{cases}$$

Ze wzoru (5) wynika, że $P(\text{Sk}^{(p)})$ jest ciągłą funkcją p na odcinku $(\frac{1}{d}; 1]$. Z drugiej strony $P(\text{Sk}^{(p)})$ ma granicę prawostronną równą 1 (patrz nierówność (6)) i jest równe 1 dla $p \in [0; \frac{1}{d}]$. Zatem $P(\text{Sk}^{(p)})$, a wraz z nią $a(p)$, jest funkcją ciągłą zmiennej p , co kończy dowód twierdzenia. ■

4 Płaszczyzna hiperboliczna

W dalszej części pracy będziemy rozważać krawędziową perkolację Bernoulliego na pewnych grafach parkietaży płaszczyzny hiperbolicznej \mathbb{H}^2 wielokątami.

Fakt 8. *Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ oraz $\alpha \in (0; \frac{(n-2)\pi}{n})$ istnieje wielokąt foremny na płaszczyźnie hiperbolicznej (gdzie boki są odcinkami geodezyjnych hiperbolicznych) o wszystkich bokach równej długości i wszystkich kątach miary α .*

Uwaga 9. Wielokąt taki jest dokładnie jeden z dokładnością do izometrii \mathbb{H}^2 .

Dowody faktu i uwagi jako znanych faktów z geometrii hiperbolicznej pominię.

Definicja 10. Środkiem wielokąta foremnego nazywamy jedyny punkt stały wspólny dla wszystkich izometrii zachowujących ten wielokąt.

Definicja 11. Klasę n -kątnów hiperbolicznych o kącie postaci $\frac{2\pi}{k}$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$ oznaczę przez $\Pi\mathbb{H}^2$.

Niech A będzie n -kątem foremnym klasy $\Pi\mathbb{H}^2$, zaś a_1, \dots, a_n – geodezyjnymi wyznaczonymi przez jego kolejne boki. Niech grupa izometrii G_A będzie zdefiniowana następująco:

$$G_A = \langle S_{a_i} : i = 1, \dots, n \rangle,$$

gdzie S_l oznacza odbicie \mathbb{H}^2 względem geodezyjnej l .

Definicja 12. Przez parkietaż płaszczyzny hiperbolicznej wielokątami będę rozumiał taką rodzinę wielokątów pokrywających w sumie całą \mathbb{H}^2 , że każde dwa wielokąty z tej rodziny kroją się albo pusto, albo wierzchołkiem, albo bokiem, albo całkowicie się (wzajemnie) pokrywają.

Z uproszczonej wersji twierdzenia Poincarégo (np. sformułowanego jako propozycja 35. w rozdziale V.B książki [PH]) można wywnioskować następujący fakt:

Fakt 13. G_A jest taką grupą izometrii \mathbb{H}^2 , w której orbita wielokąta A stanowi parkietaż płaszczyzny hiperbolicznej.

Uwaga 14. W przypadku, gdy A ma kąt postaci $\frac{2\pi}{2k}$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, to G_A jest tzw. grupą Coxetera i powyższy fakt wynika bezpośrednio z twierdzenia Poincarégo.

Z kolei gdy A ma kąt postaci $\frac{2\pi}{2k+1}$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, to należy zastosować twierdzenie Poincarégo do innego wielokąta, a mianowicie do trójkąta prostokątnego o wierzchołkach w środku wielokąta A , w środku wybranego jego boku i w końcu tego boku. Wówczas korzystając z tego, że ów trójkąt jest dziedziną fundamentalną dla jego grupy Coxetera (bo ma kąty o miarach $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{2(2k+1)}$ i $\frac{2\pi}{2n}$, gdzie n jest ilością boków A) możemy dowieść, że orbita wielokąta A jest parkietażem \mathbb{H}^2 .

Definicja 15. Zdefiniuję wreszcie graf Γ_A , na jakim będziemy rozważać perkolację, jako graf parkietażu pochodzącego od A , który oznaczę przez Π_A :

$$\Pi_A = \{g(A) : g \in G_A\}.$$

Mianowicie niech

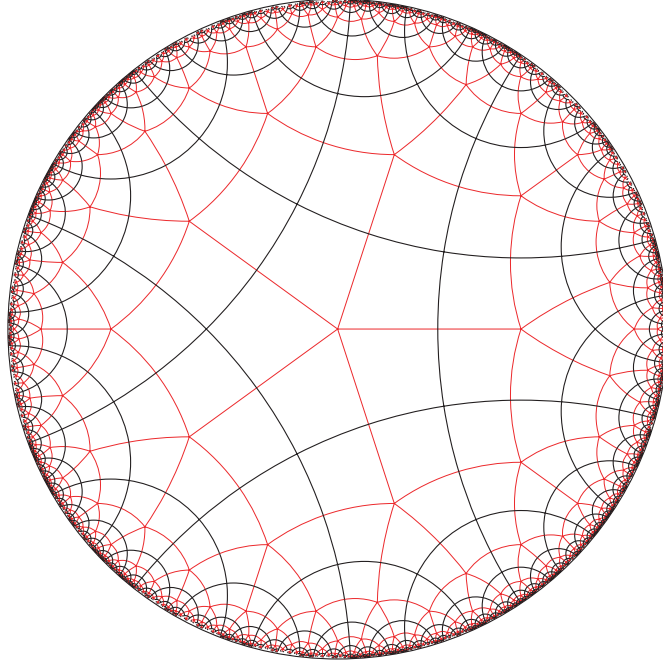
$$V(\Gamma_A) = \bigcup_{g \in G_A} g(V(A)),$$

gdzie $V(A)$ oznacza zbiór wierzchołków A , zaś rodziną odcinków geodezyjnych reprezentujących krawędzie Γ_A jest rodzina

$$\tilde{E}(\tilde{\Gamma}_A) = \{g(e) : e - \text{bok } A, g \in G_A\},$$

czyli formalnie

$$E(\Gamma_A) = \{\{g(v), g(w)\} : v, w - \text{sąsiednie wierzchołki } A, g \in G_A\}.$$



Rysunek 4: Graf parkietażu płaszczyzny hiperbolicznej pięciokątami foremnymi prostokątnymi wraz z grafem dualnym (zaznaczonym na niebiesko).

Pamiętając o fakcie 13 w kontekście uwagi 12 łatwo się przekonać, że dwa odcinki geodezyjne z rodziny $\tilde{E}(\tilde{\Gamma}_A)$ kroją się pusto, albo jednym końcem, albo się pokrywają; zatem tak zdefiniowany graf $\Gamma_A = (V(\Gamma_A), E(\Gamma_A))$ jest grafem planarnym, którego graf płaski

$$\tilde{\Gamma}_A = (V(\tilde{\Gamma}_A), \tilde{E}(\tilde{\Gamma}_A)),$$

gdzie $V(\tilde{\Gamma}_A) = V(\Gamma_A)$, jest planaryzacją (ściślej: tu przyporządkujemy krawędzi $\{v, w\}$ odcinek geodezyjny o końcach v i w , który należy do $\tilde{E}(\tilde{\Gamma}_A)$).

Ścianami grafu płaskiego $\tilde{\Gamma}_A = (V(\Gamma_A), \tilde{E}(\tilde{\Gamma}_A))$ (czyli składowymi spójności $\mathbb{H}^2 \setminus \bigcup \tilde{E}(\tilde{\Gamma}_A)$) są dokładnie wnętrza komórek parkietażu Π_A , czyli $\text{int}(g(A))$ dla $g \in G_A$. Graf dualny do grafu płaskiego jest to z definicji graf na zbiorze ścian danego grafu, które łączymy w grafie dualnym krawędzią wtedy, gdy sąsiadują poprzez krawędź w grafie oryginalnym. W przypadku grafu płaskiego $\tilde{\Gamma}_A$ można zrealizować płaski graf doń dualny, który oznaczmy przez $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$, w następujący sposób:

Jako wierzchołki $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ obierzemy środki ścian grafu $\tilde{\Gamma}_A$ (tzn. środki ich domknięć jako wielokątów foremnych), zaś jako krawędzie – odcinki geodezyjnych łączących środki ścian $\tilde{\Gamma}_A$ sąsiadujących przez krawędź. Zatem każda krawędź $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ przecina dokładnie raz pewną krawędź $\tilde{\Gamma}_A$ pod kątem prostym (gdyż środki dwóch wielokątnych komórek parkietażu Π_A sąsiadujących przez krawędź są położone symetrycznie względem geodezyjnej zawierającej tę krawędź). Tak zdefiniowany $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ jest istotnie grafem płaskim, gdyż dwie różne krawędzie $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ łączą albo wspólny środek pewnej ściany $\tilde{\Gamma}_A$ z dwoma innymi różnymi, i wówczas kroją się tym wspólnym końcem, albo łączą środki czterech różnych ścian $\tilde{\Gamma}_A$, a ponieważ każda z tych krawędzi zawiera się we wnętrzu domknięcia sumy dwóch ścian, których środki łączy, to są one wówczas rozłączne. Graf $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ ma również ściany będące wielokątami foremnymi: jeśli ściany $\tilde{\Gamma}_A$ są n -kątami foremnymi o kącie $\frac{2\pi}{k}$, to ściany $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ są k -kątami foremnymi o kącie $\frac{2\pi}{n}$. Ściany $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ odpowiadają w naturalny sposób

wierzchołkom $\tilde{\Gamma}_A$ tak jak ściany $\tilde{\Gamma}_A$ odpowiadają wierzchołkom $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$. Wierzchołki $\tilde{\Gamma}_A$ są również środkami ścian $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$. Formalny graf, którego planaryzacją jest $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ oznaczymy przez Γ_A^\dagger . Ściany $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ po domknięciu również stanowią parkietaż \mathbb{H}^2 , który oznaczą przez Π_A^\dagger . Jest on oczywiście niezmienniczy na działanie grupy G_A tak jak Π_A .

Zauważmy, że zawsze $(\tilde{\Gamma}_A^\dagger)^\dagger = \tilde{\Gamma}_A$ i $(\Pi_A^\dagger)^\dagger = \Pi_A$.

Okazuje się, że dla takiego grafu Γ_A istnieją obydwa przejścia fazowe w krawędziowej perkolacji Bernoulliego, o których była mowa we wstępie. Aby to uzasadnić, zdefiniuję pewne własności grafów:

Definicja 16. Niech G będzie dowolnym grafem. Mówimy, że graf G :

- jest tranzytywny, gdy jego grupa automorfizmów $\text{Aut}(G)$ działa tranzytywnie na jego zbiorze wierzchołków.
- ma jeden koniec, gdy dla dowolnego skończonego podzbioru $V_0 \subseteq V(G)$ podgraf indukowany $G \setminus V_0$ ma tylko jedną nieskończoną składową spójności. (Ta definicja ma sens przede wszystkim dla G spójnego nieskończonego.)
- jest nieśredniowalny, gdy

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall V_0 \subseteq V(G), V_0 \text{ – skończony})(|\partial V_0| \geq \varepsilon |V_0|)$$

(tu ∂V_0 jest zbiorem krawędzi G o dokładnie jednym końcu w zbiorze V_0 – podobnie, jak w części „Drzewa”). Graf G nazywamy średniowalnym w przeciwnym przypadku.

Twierdzenie 17. Dla dowolnego wielokąta foremego A klasy $\text{III}\mathbb{H}^2$ i grafu parkietażu Γ_A dla A zachodzą nierówności

$$0 < p_c(\Gamma_A) < p_u(\Gamma_A) < 1.$$

Dowód (szkicowy). Powołując się na twierdzenie 1.1 z pracy [hp] potrzebujemy jedynie sprawdzić założenia tego twierdzenia dla grafu Γ_A , czyli że graf Γ_A jest zawsze planarny, tranzytywny, nieśredniowalny, o jednym końcu. Wówczas uzyskamy tezę owego twierdzenia, tożsamą z tezą niniejszego twierdzenia.

Planarność grafu Γ_A stwierdziliśmy już powyżej.

Tranzytywność grafu Γ_A :

Weźmy dwa dowolne wierzchołki x i y grafu Γ_A . Wybierzmy wielokąty A_1, A_2 parkietażu Π_A zawierające odpowiednio x i y . Wówczas wielokąt A_1 jest przekształcany na A_2 przez pewną izometrię $g \in G_A$, zaś $g(x) \in A_2$ jest przekształcany na y przez odpowiedni obrót \mathbb{H}^2 zachowujący A_2 . Zatem x przechodzi na y przez pewną izometrię zachowującą parkietaż Π_A , a więc i przez odpowiadający jej automorfizm grafu Γ_A . Wobec dowolności $x, y \in V(\Gamma_A)$ mamy tranzytywność Γ_A .

Nieśredniowalność grafu Γ_A :

Znajdziemy taką stałą $\varepsilon > 0$, że dla dowolnego skończonego zbioru wierzchołków $V_0 \subseteq V(\Gamma_A)$ zachodzi $|\partial V_0| \geq \varepsilon |V_0|$. Niech $V_0 \neq \emptyset$ (bez zmniejszenia ogólności) będzie skończonym podzbiorem $V(\Gamma_A)$, a n, k oznaczają odpowiednio ilość boków wielokąta A i stopień grafu Γ_A (tak, że miara kąta wielokąta A wynosi $\frac{2\pi}{k}$). Niech zawsze V_0^\dagger oznacza zbiór ścian (domkniętych) grafu $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ odpowiadających wierzchołkom ze zbioru V_0 , a ∂V_0^\dagger – zbiór krawędzi $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ dualnych do krawędzi ze zbioru ∂V_0 . Krawędzie z ∂V_0^\dagger są to dokładnie krawędzie rozgraniczające ściany $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ z V_0^\dagger i spoza V_0^\dagger .

Założmy na początek, że podgraf indukowany Γ_A o zbiorze wierzchołków V_0 jest spójny. Wówczas suma rodziny ścian $\bigcup V_0^\dagger$ ma spójne wnętrze w \mathbb{H}^2 . Suma ta jest wielokątem, którego

∂V_0^\dagger jest obwodem, być może niespójnym. Jeśli jednak „zalepimy” te składowe dopełnienia $\bigcup V_0^\dagger$, które są ograniczone hiperbolicznie, brakującymi wielokątami parkietażu Π_A^\dagger , czyli weźmiemy zbiór V_1 wielokątów Π_A^\dagger leżących poza nieskończoną składową spójności $\mathbb{H}^2 \setminus \bigcup V_0^\dagger$, to otrzymamy jednospójny wielokąt $\bigcup V_1^\dagger$ o jednospójnym wnętrzu i o spójnym obwodzie ∂V_1^\dagger będącym cyklem w grafie $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$. Zauważmy, że $|V_0| = |V_0^\dagger| \leq |V_1^\dagger|$, zaś $\partial V_0^\dagger \supseteq \partial V_1^\dagger$, czyli

$$\frac{|\partial V_0|}{|V_0|} \geq \frac{|\partial V_1^\dagger|}{|V_1^\dagger|},$$

zatem oszacowanie od dołu prawej strony da nam żądane oszacowanie lewej strony dla zbioru V_0 .

Wierzchołki i krawędzie wielokątów z V_1^\dagger tworzą podgraf spójny γ grafu $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$, którego ścianami ograniczonymi są wnętrza tych wielokątów. Zatem oznaczając ich ilości:

$$W = |V(\gamma)| \quad K = |E(\gamma)| \quad S = |V_1^\dagger|$$

zapisujemy następująco wzór Eulera dla γ :

$$(7) \quad W - K + S = 1.$$

Oznaczmy długość obwodu wielokąta $\bigcup V_1^\dagger$ (czyli $|\partial V_1^\dagger|$) przez O . Chcemy oszacować z dołu stosunek

$$\frac{|\partial V_1^\dagger|}{|V_1^\dagger|} = \frac{O}{S}.$$

Wówczas ponieważ V_1^\dagger składa się wyłącznie z k -kątów (wielokątów parkietażu Π_A^\dagger), to licząc krawędzie każdego z nich z osobna policzymy każdą krawędź obwodu raz, a pozostałe krawędzie – po dwa razy, więc mamy równość

$$(8) \quad kS = 2(K - O) + O = 2K - O.$$

Ponieważ O jest też ilością wierzchołków γ na obwodzie wielokąta $\bigcup V_1^\dagger$, czyli dokładnie tych, które nie są wewnątrz tego wielokąta, a stopień grafu $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ wynosi n , to licząc wierzchołki każdej ze ścian z osobna w podobny sposób otrzymujemy nierówność

$$kS \geq n(W - O) + O = nW - (n - 1)O.$$

Biorąc powyższą nierówność i równość (8) z odpowiednimi współczynnikami i odejmując stronami mamy

$$2kS - nkS \geq 2(nW - (n - 1)O) - n(2K - O),$$

czyli korzystając z (7)

$$(2k - nk + 2n)S \geq 2n(W - K + S) - (n - 2)O = 2n - (n - 2)O,$$

czyli

$$(nk - 2k - 2n)S = ((n - 2)(k - 2) - 4)S \leq (n - 2)O - 2n \leq (n - 2)O,$$

więc

$$(9) \quad \frac{O}{S} \geq \frac{(n - 2)(k - 2) - 4}{n - 2}.$$

Zauważmy, że kąty wielokąta A są mniejsze, niż euklidesowego n -kąta foremnego:

$$\frac{2\pi}{k} < \frac{n\pi - 2\pi}{n},$$

więc

$$2n < k(n - 2),$$

czyli

$$4 < (k - 2)(n - 2),$$

czyli $(k - 2)(n - 2) \geq 5$ jako liczba naturalna, więc z nierówności (9) mamy

$$\frac{O}{S} \geq \frac{1}{n - 2}.$$

Biorąc $\varepsilon = \frac{1}{n-2}$ otrzymujemy tezę lematu dla V_1 jak i również V_0 .

W przypadku ogólnym, gdy wewnątrz $\bigcup V_0^\dagger$ ma niekoniecznie jedną składową spójności, rozważmy rodzinę $\{U_i : i \in I\}$ składowych wnętrza $\bigcup V_0^\dagger$ (jest ona skończona). Dla $i \in I$ domknięcie U_i jest sumą odpowiedniej podrodziny rodziny V_0^\dagger . Ta podrodzina jest dobrze określona; oznaczmy ją przez V_{0i}^\dagger . Otóż $\{V_{0i}^\dagger : i \in I\}$ stanowi podział rodziny V_0^\dagger (sumuje się bowiem do V_0^\dagger , gdyż każdy wielokąt z V_0^\dagger ma wewnątrz w pewnym U_i i wówczas należy do V_{0i}^\dagger , a rodziny V_{0i}^\dagger są parami rozłączne, gdyż inaczej nie pochodziłyby od różnych składowych wnętrza $\bigcup V_0^\dagger$). Zatem ponieważ dla każdego $i \in I$ suma $\bigcup V_{0i}^\dagger$ ma wewnątrz spójne U_i , a żadne dwa wielokąty z różnych rodzin $V_{0i}^\dagger, V_{0j}^\dagger$ nie mają wspólnej krawędzi, to

$$|\partial V_{0i}^\dagger| \geq |V_{0i}^\dagger|,$$

więc

$$|\partial V_0| = |\partial V_0^\dagger| = \sum_{i \in I} |\partial V_{0i}^\dagger| \geq \sum_{i \in I} \varepsilon |V_{0i}^\dagger| = \varepsilon |V_0^\dagger| = \varepsilon |V_0|,$$

co było do udowodnienia.

Jeden koniec grafu Γ_A :

Jeżeli wyrzucimy z grafu $\tilde{\Gamma}_A$ skończony zbiór wierzchołków V_0 , to dowolne dwa wierzchołki spośród prawie wszystkich wierzchołków spoza tego zbioru można nadal połączyć ścieżką omijającą V_0 . Istotnie, niech kula domknięta B w \mathbb{H}^2 zawiera zbiór V_0 wraz z wielokątami parkietażu Π_A krojącymi niepusto V_0 . Wówczas biorąc dowolne dwa wierzchołki $\tilde{\Gamma}_A$ spoza niej i dowolną łamaną w \mathbb{H}^2 łączącą je i omijającą tę kulę, możemy skonstruować marszrutę w $\tilde{\Gamma}_A$ również łączącą te wierzchołki, która biegnie przez kolejne wielokąty Π_A odwiedzane przez tę łamaną i zredukować tę marszrutę do ścieżki w $\tilde{\Gamma}_A$, która będzie rozłączna z B . Pewna nieskończona składowa podgrafu indukowanego $\Gamma_A \setminus V_0$ zawiera zbiór wierzchołków $V(\Gamma_A) \setminus B$, który jest koskończony, a więc ta składowa jest jedyną nieskończoną składową $\Gamma_A \setminus V_0$, co było do udowodnienia. ■

Tak jak zapowiedziałem we wstępie, wprowadzę poniżej pojęcie brzegu końca podzbioru płaszczyzny hiperbolicznej \mathbb{H}^n , które może pomóc w wyodrębnieniu dodatkowego przejścia fazowego między prawdopodobieństwem krytycznym a prawdopodobieństwem unifikacji dla grafów parkietaży przestrzeni hiperbolicznej \mathbb{H}^3 . To pojęcie zdefiniuję jednak ogólnie:

Definicja 18. Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczną całkowicie regularną (tzn. spełniającą aksjomat oddzielania $T_{3\frac{1}{2}}$), lokalnie zwartą. Wówczas:

- Końcem zbioru $a \subseteq X$ nazywamy dowolne odwzorowanie e z rodziny wszystkich zwartych podzbiorów X w rodzinę wszystkich podzbiorów a spełniające warunki:

- dla K zwanego $e(K)$ jest składową spójności $a \setminus K$,
- dla $K \subseteq K'$ – zwartych

$$e(K) \supseteq e(K').$$

Niech \hat{X} będzie dowolnym uzwarceniem X .

- Brzegiem zbioru $a \subseteq X$ nazywamy następujący podzbiór narostu uzwarcenia \hat{X} :

$$\partial a = \bar{a}^{\hat{X}} \setminus X.$$

- Wreszcie brzegiem końca e zbioru $a \subseteq X$ (tu koniec bierzemy zawsze w przestrzeni uzwanej X) nazywamy zbiór

$$\partial e = \bigcap_{\substack{K \subseteq X \\ K - \text{zwarty}}} \partial e(K).$$

Uwaga 19. W topologii brzegiem standardowo nazywa się różnicę domknięcia i wnętrza zbioru w przestrzeni topologicznej. Brzeg w tym sensie będziemy określać dla odróżnienia jako brzeg topologiczny.

Uwaga 20. Zawsze $\partial X = \hat{X} \setminus X$ jest domknięty w \hat{X} , co udowodnimy poniżej:

Niech $x \in X$. Znajdziemy otoczenie x rozłączne z ∂X . Niech U będzie otoczeniem x w X warunkowo zwartym w X . Jest ono śladem w X pewnego otoczenia U' w \hat{X} . Ponieważ \bar{U}^X jest zwarte, to jest domknięte w \hat{X} i jest równe $\bar{U}^{\hat{X}}$. Otóż $U' \subseteq \bar{U}^X$. Gdyby tak nie było, to $U' \setminus \bar{U}^X$ byłby niepusty otwarty w \hat{X} i kroiłby się niepusto z X (gdyż X jest gęsty w \hat{X}). Jednak $U' \cap X = U$, więc $U' \cap X \setminus \bar{U}^X = U \setminus \bar{U}^X$ byłby niepusty, co jest sprzecznością. Zatem $U' \subseteq \bar{U}^X \subseteq X$, więc $U' = U$, czyli U jest otwarty w \hat{X} . Zatem X jest otwarty w \hat{X} , a ∂X – domknięty (i zwarty).

Rozważmy teraz dowolny zbiór $A \subseteq X$ i jego koniec e . Wówczas z powyższego dowodu mamy, że dla zwanego $K \subseteq X$ zbiór $\partial e(K)$ jest domknięty w \hat{X} (i zwarty).

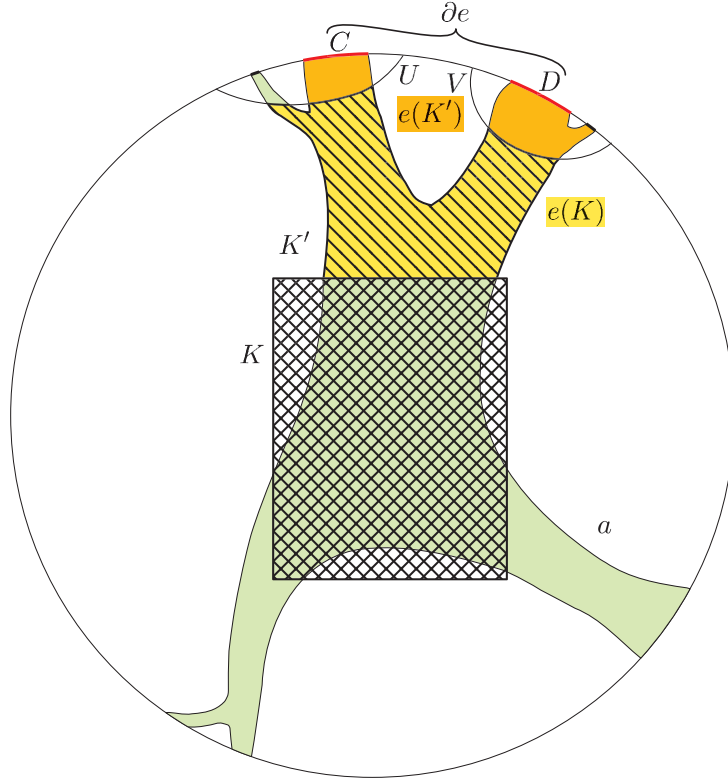
Należy zaznaczyć, że zawsze $\partial e(K) \neq \emptyset$, gdyż $e(K)$ nie jest warunkowo zwarty w X ; w przeciwnym razie bowiem $K \cup \overline{e(K)}^X$ byłby zwarty i $e(K \cup \overline{e(K)}^X) \cap \overline{e(K)}^X = \emptyset$, ale $e(K \cup \overline{e(K)}^X) \subseteq e(K)$, czyli $e(K \cup \overline{e(K)}^X)$ jest pusty, co jest niemożliwe, gdyż jest składową spójności.

Podobnie ∂e jako przekrój scentrowanej rodziny zbiorów zwartych niepustych:

$$\partial e = \bigcap_{\substack{K \subseteq X \\ K - \text{zwarty}}} \partial e(K)$$

jest zwarty niepusty. (Rodzina $\{\partial e(K) : K \subseteq X, K - \text{zwarty}\}$ jest scentrowana gdyż dla zwartych K_1, \dots, K_n zachodzi $\emptyset \neq \partial e(K_1 \cup \dots \cup K_n) \subseteq \bigcap_{i=1}^n \partial e(K_i)$).

Lemat 21. *Dla dowolnej przestrzeni X całkowicie regularnej i lokalnie zwartej oraz jej dowolnego uzwarcenia \hat{X} i dla dowolnego podzbioru $a \subseteq X$ dowolny jego koniec e ma brzeg spójny niepusty.*



Rysunek 5: Dowód lematu 21.

Dowód (lematu). Niepustość zbioru ∂e pokazaliśmy już w powyższej uwadze.

Założmy zatem nie wprost, że ∂e jest niespójny, czyli że istnieją zbiory C i D otwarte w ∂e , niepuste, rozłączne i takie, że

$$\partial e = C \cup D.$$

Są one otwarto-domknięte w ∂e , więc są zwarte. Ponieważ \hat{X} jako przestrzeń zwarta jest normalna, to istnieją rozłączne otoczenia U, V zbiorów odpowiednio C i D w \hat{X} . Zatem $\partial e \subseteq U \cup V$, gdzie $U \cup V$ jest otwarty w \hat{X} . Udowodnię, że istnieje zbiór zwarty $K \subseteq X$ taki, że

$$\partial e(K) \subseteq U \cup V.$$

Otóż rodzina $\{U \cup V, (\partial e(K))^c : K \subseteq X, K \text{ - zwarty}\}$ jest pokryciem otwartym \hat{X} , gdyż

$$\hat{X} = (\partial e)^c \cup (U \cup V) = \bigcup_{\substack{K \subseteq X \\ K \text{ - zwarty}}} (\partial e(K))^c \cup (U \cup V),$$

więc istnieje podpokrycie skończone $\{U \cup V, (\partial e(K_1))^c, \dots, (\partial e(K_n))^c\}$ dla pewnych zwartych $K_1, \dots, K_n \subseteq X$. Weźmy $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$; wówczas dla $i = 1, \dots, n$ mamy $e(K) \subseteq e(K_i)$, czyli $\partial e(K) \subseteq \partial e(K_i)$, a $(\partial e(K_i))^c \subseteq (\partial e(K))^c$, więc $\bigcup_{i=1}^n (\partial e(K_i))^c \subseteq (\partial e(K))^c$, zatem również $\{U \cup V, (\partial e(K))^c\}$ jest pokryciem otwartym \hat{X} , czyli $\partial e(K) \subseteq U \cup V$ tak jak chcieliśmy.

Znajdziemy w końcu zwarty nadzbiór K' zbioru K , dla którego $e(K')$ będzie niespójne (co będzie sprzecznością) dzięki temu, że $e(K') \subseteq U \cup V$, ale $e(K')$ będzie się kroilo niepusto zarówno z U jak i z V .

Udowodnimy jeszcze przedtem, że $e(K) \setminus (U \cup V)$ jest warunkowo zwarty w X , czyli że $\overline{e(K) \setminus (U \cup V)}^{\hat{X}} \subseteq X$. Gdyby istniał $p \in \partial X \cap \overline{e(K) \setminus (U \cup V)}^{\hat{X}}$, to

$$p \in \partial X \cap \overline{e(K)}^{\hat{X}} = \partial e(K) \subseteq U \cup V,$$

ale wówczas p leżałby poza zbiorem domkniętym $\hat{X} \setminus (U \cup V)$ zawierającym $e(K) \setminus (U \cup V)$, czyli $p \notin \overline{e(K) \setminus (U \cup V)}^{\hat{X}}$ – sprzeczność. Niech zatem

$$K' = K \cup \overline{e(K) \setminus (U \cup V)}^{\hat{X}}$$

będzie zwartym podzbiorem X . Wówczas

$$e(K') \subseteq e(K) \setminus K' \subseteq e(K) \cap (U \cup V) \subseteq U \cup V,$$

zaś

$$\partial e(K') \subseteq \partial e(K) \subseteq U \cup V,$$

a ponieważ

$$C \cup D = \partial e \subseteq \partial e(K'),$$

to $\partial e(K')$ kroi się niepusto z U oraz V , więc $e(K')$ również (bo inaczej $\overline{e(K')}^{\hat{X}}$ i jego podzbiór $\partial e(K')$ zawierałyby się w jednym ze zbiorów domkniętych U^c, V^c wraz z $e(K')$). Zatem $e(K')$ nie jest spójny, co jest sprzeczne z definicją końca. To kończy dowód lematu. ■

Uwaga 22. W przypadku przestrzeni hiperbolicznych \mathbb{H}^n dla $n = 1, 2, \dots$ mówiąc o brzegach i brzegach końców będą miał na myśli uzwarcenie \mathbb{H}^n w modelu dyskowym Poincarégo będące domknięciem do dysku domkniętego (które oznaczymy przez $\hat{\mathbb{H}}^n$) tak, że narostem uzwarcenia będzie standardowo rozumiany brzeg przestrzeni hiperbolicznej \mathbb{H}^n . W ten sposób można na $\hat{\mathbb{H}}^n$ również rozważać metrykę euklidesową, jednak domyślną metryką na \mathbb{H}^n będzie metryka hiperboliczna, chyba że zostanie zaznaczone inaczej.

Zanim sformułuję główne twierdzenie, wykluczające przejście fazowe definiowane przy pomocy brzegów końców nieskończonych klastrów perkolacji dla grafów parkietazy \mathbb{H}^2 , udowodnię kilka lematów.

Płaszczyznę hiperboliczną \mathbb{H}^2 rozważam zawsze w modelu dyskowym Poincarégo jako koło jednostkowe na \mathbb{R}^2 , którego środek oznaczę przez O .

Oznaczenie 23. Niech odtąd aż do końca pracy A będzie pięciokątem foremnym prostokątnym w \mathbb{H}^2 .

Następującą obserwację przyjmuję za intuicyjnie oczywistą, więc pozostawię ją bez dowodu.

Obserwacja 24. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla dowolnego punktu $x \in \mathbb{H}^2$ leżącego euklidesowo (tzn. w modelu Poincarégo) w odległości od brzegu \mathbb{H}^2 mniejszej od δ średnica euklidesowa mniejszej półpłaszczyzny hiperbolicznej ograniczonej przez geodezyjną przechodzącą przez x prostopadłą do odcinka geodezyjnego $[O; x]$ wynosi mniej niż ε .

Lemat 25. Dla dowolnego otwartego łuku Φ okręgu będącego brzegiem \mathbb{H}^2 istnieje wierzchołek x grafu $\tilde{\Gamma}_A$ i dwie krawędzie $\tilde{\Gamma}_A$ incydentne z x , które wyznaczają ramiona kąta prostego (hiperbolicznego) o brzegu zawartym w Φ .

Dowód. Niech H będzie półpłaszczyzną \mathbb{H}^2 , której brzeg zawiera się w Φ (jej istnienie wynika z obserwacji 24). (Ów brzeg jest zawsze łukiem okręgu $\partial\mathbb{H}^2$ o końcach będących brzegowymi końcami geodezyjnej ograniczającej H). Niech x będzie wierzchołkiem $\tilde{\Gamma}_A$ leżącym we wnętrzu H . Taki wierzchołek istnieje, gdyż dla pewnego $r > 0$ dowolna kula hiperboliczna o promieniu r zawiera we wnętrzu pewien wierzchołek $\tilde{\Gamma}_A$ (np. dla $r > \text{diam}(A)$) i pewna taka kula zawiera się w H , gdyż np. kulę hiperboliczną o środku O i promieniu r można przekształcić w H za pomocą odpowiedniego przesunięcia hiperbolicznego. Krawędzie incydentne z wierzchołkiem x wyznaczają dwie prostopadłe geodezyjne. Ponieważ każda z nich przecina geodezyjną $\text{bd}_{\mathbb{H}^2}H$ (brzeg topologiczny) ograniczającą H co najwyżej raz, a x leży we wnętrzu H , to pewna składowa każdej z tych dwóch geodezyjnych rozspojonych przez punkt x leży w całości w H . Rozważmy te dwie prostopadłe półproste hiperboliczne. W sumie z $\{x\}$ są one ramionami hiperbolicznego kąta prostego. Ponieważ ramiona te zawierają się w H i ich suma rozspaja \mathbb{H}^2 na wnętrze i dopełnienie owego kąta, podobnie $\text{bd}_{\mathbb{H}^2}H$ rozspaja \mathbb{H}^2 na dwie składowe spójności, to albo ów kąt leży we wnętrzu H albo jego kąt dopełniczy. W drugim przypadku mamy do czynienia z kątem miary $\frac{3}{2}\pi$, więc można wybrać jeden z trzech kątów prostych zawartych w nim, również wytyczonych przez dwie geodezyjne zawierające ramiona całego kąta (a więc wybrać kąt prosty przyległy albo wierzchołkowy do kąta prostego, który okazał się nie być zawarty w H). Tak więc możemy wybrać kąt prosty zgodny w powyższym sensie z grafem $\tilde{\Gamma}_A$, zawarty w H . Jego brzeg jest zawarty w brzegu H , a więc i w łuku Φ (gdyż operacja ∂ brania brzegu zbioru jest zawsze monotoniczna ze względu na zawieranie zbiorów). Zatem obrany kąt prosty spełnia warunki tezy lematu. ■

Lemat 26. *Dla dowolnego łuku otwartego Φ okręgu $\partial\mathbb{H}^2$ zarówno w graf $\tilde{\Gamma}_A$ jak i w graf $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ można zanurzyć nieskończone pełne drzewo binarne, którego brzeg zawiera się w łuku Φ , a każda jego ścieżka nieskończona (o początku w korzeniu) ma granicę euklidesową na $\partial\mathbb{H}^2$ (dokładnie: na Φ).*

Dowód. Niech α będzie kątem z poprzedniego lematu o brzegu zawartym w Φ i wierzchołku $v \in V(\tilde{\Gamma}_A)$, zaś l_0 i l_1 – geodezyjnymi wyznaczonymi odpowiednio przez obydwaj jego ramiona. Niech S_0 będzie przesunięciem wzdłuż l_0 takim, że $S_0(v)$ jest sąsiadem v w $\tilde{\Gamma}_A$ leżącym na ramieniu kąta α zawartym w l_0 , zaś S_1 niech będzie analogicznym przesunięciem wzdłuż l_1 . S_0 i S_1 indukują automorfizmy grafu $\tilde{\Gamma}_A$ i zachowują parkietaż Π_A (gdyż każde z nich przeprowadza pewien wielokąt parkietażu na inny), więc indukują również automorfizmy grafu $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$. Zauważmy, że geodezyjna $S_0(l_1)$ jest równoległa, nieasymptotyczna do l_1 , podobnie $S_1(l_0)$ do l_0 oraz $S_0(l_1)$ do $S_1(l_0)$ (bo inaczej utworzyłby się trójkąt hiperboliczny o sumie kątów przynajmniej π – patrz rys. – co jest niemożliwe). Ponadto kąty $S_0(\alpha)$, $S_1(\alpha)$ zawierają się w α . Są one jednak rozłączne, gdyż $S_0(l_1)$ i $S_1(l_0)$ są rozłączne.

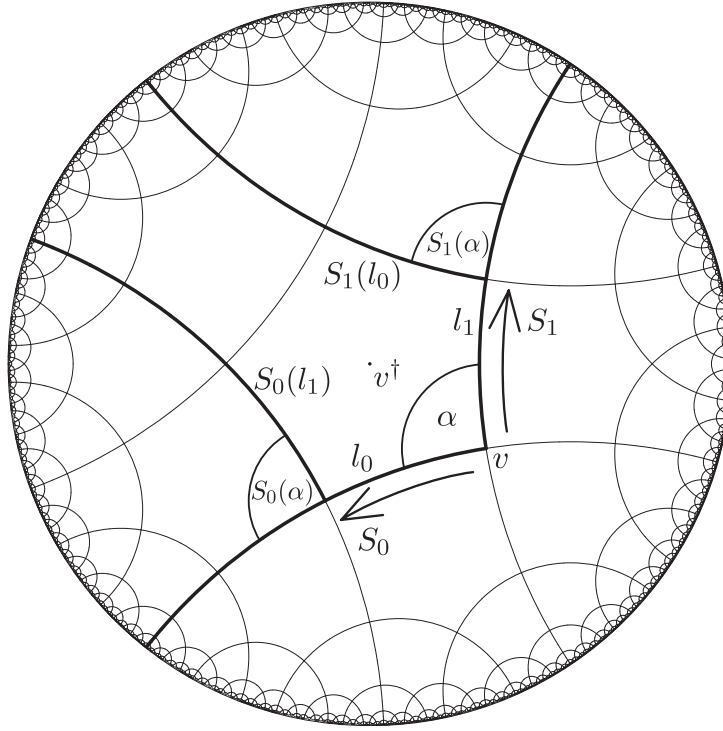
Niech wierzchołki nieskończonego pełnego drzewa binarnego T będą reprezentowane przez słowa nad alfabetem zerojedynkowym (zbiór wszystkich takich słów oznaczę przez L) w następujący (standardowy) sposób:

- korzeń drzewa jest reprezentowany przez słowo ε (słowo puste);
- lewe dziecko wierzchołka reprezentowanego przez dowolne słowo w jest reprezentowane przez $w0$, a prawe – przez $w1$.

Myślmy, że $V(T) = L$. Dla słowa $w = a_1a_2 \cdots a_n \in L$, gdzie $a_1, \dots, a_n \in \{0; 1\}$ niech

$$S_w = S_{a_1} \circ \dots \circ S_{a_n}$$

(w szczególności $S_\varepsilon = \text{Id}_{\mathbb{H}^2}$).



Rysunek 6: Dowód lematu 26 – początek.

Wówczas oczywiście $S_w(\alpha) \subseteq \alpha$.

Niech $\varphi : L \rightarrow V(\tilde{\Gamma}_A)$ będzie dane wzorem

$$\varphi(w) = S_w(v).$$

Zauważmy, że $\varphi(L) \subseteq \alpha$, gdyż $v \in \alpha$. Udowodnię, że φ jest izomorficznym zanurzeniem drzewa T w Γ_A . Wystarczy udowodnić, że φ jest różnowartościowe i zachowuje sąsiedztwo wierzchołków: Różnowartościowość φ :

Niech $w' \neq w''$, $w', w'' \in L$. Niech w będzie ich najdłuższym wspólnym prefiksem. Wówczas albo istnieją w_1, w_2 takie, że

$$w' = w0w_1 \text{ i } w'' = w1w_2,$$

albo w' jest właściwym prefiksem w'' , czyli istnieje $w_1 \neq \varepsilon$ takie, że

$$w' = w \text{ i } w'' = ww_1$$

– bez straty ogólności (ewentualnie można zamienić rolami w' i w'').

W pierwszym przypadku

$$\varphi(w') = S_w(S_0(S_{w_1}(v))),$$

a

$$\varphi(w'') = S_w(S_1(S_{w_2}(v))).$$

Ponieważ $S_0(\alpha)$ i $S_1(\alpha)$ są rozłączne, to

$$S_0(S_{w_1}(v)) \neq S_1(S_{w_2}(v)),$$

a ponieważ S_w jest bijekcją, to

$$\varphi(w') = S_w(S_0(S_{w_1}(v))) \neq S_w(S_1(S_{w_2}(v))) = \varphi(w'').$$

Zaś w drugim przypadku

$$\varphi(w') = S_w(v) \neq S_w(S_{w_1}(v)),$$

gdyż podobnie $v \neq S_{w_1}(v)$, bo $v \notin S_0(\alpha)$ i $v \notin S_1(\alpha)$, a $w_1 \neq \varepsilon$.

Zachowywanie sąsiedztwa przez φ :

Rozważmy wierzchołki T połączone krawędzią; jeden z nich jest wówczas dzieckiem drugiego, czyli są to w i wa dla pewnych $w \in L$ i $a \in \{0; 1\}$. Wówczas $\varphi(wa) = S_w(S_a(v))$ i $\varphi(w) = S_w(v)$, a skoro v jest sąsiadem $S_a(v)$ w Γ_A i $S_w \upharpoonright_{V(\Gamma_A)}$ jest automorfizmem grafu Γ_A , to $\varphi(wa)$ jest sąsiadem $\varphi(w)$ w Γ_A .

Zatem φ jest istotnie izomorficznym zanurzeniem drzewa T w graf Γ_A .

Ponieważ $\varphi(L) \subseteq \alpha$, a każda krawędź łącząca wierzchołki $\tilde{\Gamma}_A$ leżące w α również leży w α (gdyż półpłaszczyzna w \mathbb{H}^2 , a więc i kąt wypukły zawsze zawiera odcinek geodezyjny wraz z jego końcami), to $\varphi(T)$ jako zanurzony podgraf $\tilde{\Gamma}_A$ zawiera się w α , a więc jego brzeg zawiera się w $\partial\alpha$.

Rozważmy teraz dowolną ścieżkę P w drzewie T o początku w korzeniu (i jej obraz przez φ). Jest ona reprezentowana przez nieskończony ciąg zerojedynkowy w tak, że jej wierzchołki są skończonymi prefiksami w . Niech \tilde{P} oznacza krzywą w \mathbb{H}^2 utworzoną przez kolejne obrazy wierzchołków P przez φ i krawędzie grafu $\tilde{\Gamma}_A$ będące obrazami kolejnych krawędzi P . Dokładniej mówiąc

$$\tilde{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [S_{w \upharpoonright_{n-1}}(v); S_{w \upharpoonright_n}(v)],$$

gdzie $w \upharpoonright_n$ oznacza prefiks w długości n , a $[x; y]$ – odcinek geodezyjnej o końcach $x, y \in \mathbb{H}^2$. (\tilde{P} może być sparametryzowana np. półprostą $[0; \infty)$ tak, że wierzchołki \tilde{P} odpowiadają parametrom naturalnym.) Mamy udowodnić, że ścieżka $\varphi(P)$ w grafie $\tilde{\Gamma}_A$ ma granicę na brzegu \mathbb{H}^2 , a ściślej, że krzywa \tilde{P} zbiega do pewnego punktu $\partial\mathbb{H}^2$.

Oznaczmy przez $w \upharpoonright_{n_1}^{n_2}$ podslowo w zaczynające się od pozycji n_1 , a kończące na pozycji n_2 dla naturalnych n_1, n_2 takich, że $n_1 - 1 \leq n_2$ (gdy $n_2 = n_1 - 1$, to $w \upharpoonright_{n_1}^{n_2} = \varepsilon$). Otóż dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ krzywa \tilde{P} od pewnego miejsca leży już cały czas w $S_{w \upharpoonright_k}(\alpha)$. Jest tak, ponieważ dla $k \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\tilde{P} = \bigcup_{n=1}^k [S_{w \upharpoonright_{n-1}}(v); S_{w \upharpoonright_n}(v)] \cup \bigcup_{n=k+1}^{\infty} S_{w \upharpoonright_k}([S_{w \upharpoonright_{k+1}}^{n-1}(v); S_{w \upharpoonright_{k+1}}^n(v)]),$$

gdyż $S_{w \upharpoonright_k}$ jest izometrią i przekształca odcinki geodezyjne na odcinki geodezyjne, zatem

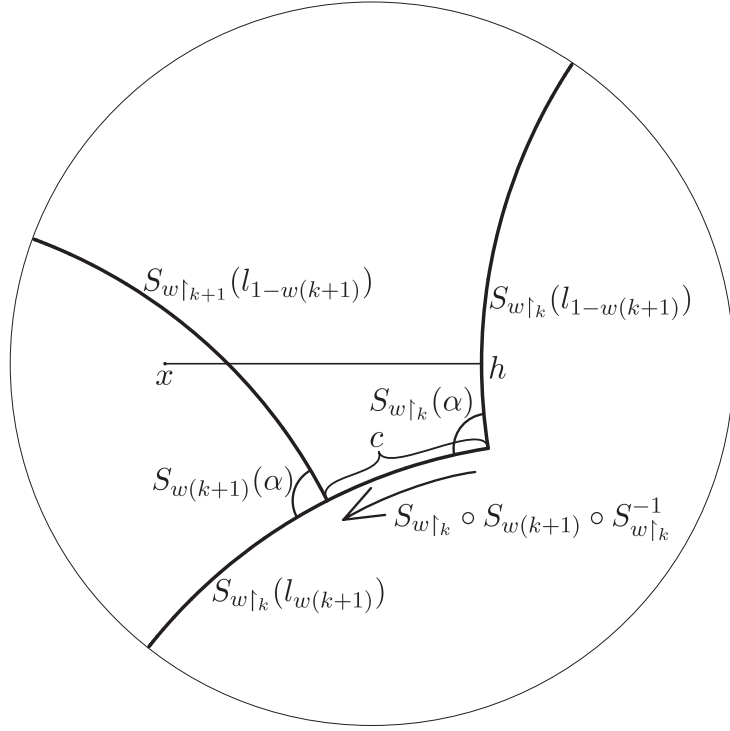
$$\tilde{P} \subseteq \bigcup_{n=1}^k [S_{w \upharpoonright_{n-1}}(v); S_{w \upharpoonright_n}(v)] \cup S_{w \upharpoonright_k}(\alpha).$$

Zauważmy, że jeśli dowolny zbiór $B \subseteq \mathbb{H}^2$ zsumujemy ze zbiorem zwartym $K \subseteq \mathbb{H}^2$, to brzeg $\partial B = \partial(B \cup K)$ (ten fakt zachodzi również w dowolnej przestrzeni uzwarconej z definicji 18). Wobec tego $\partial\tilde{P} \subseteq \partial(S_{w \upharpoonright_k}(\alpha))$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ (biorąc $B = S_{w \upharpoonright_k}(\alpha)$ i $K = \bigcup_{n=1}^k [S_{w \upharpoonright_{n-1}}(v); S_{w \upharpoonright_n}(v)]$), czyli

$$\partial\tilde{P} \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty} \partial(S_{w \upharpoonright_k}(\alpha)).$$

Udowodnię, że zbiór $\bigcap_{k=0}^{\infty} \partial(S_{w \upharpoonright_k}(\alpha))$ jest jednopunktowy. Otóż dla każdego k naturalnego $\partial(S_{w \upharpoonright_k}(\alpha))$ jest domkniętym łukiem okręgu $\partial\mathbb{H}^2$ (gdyż $S_{w \upharpoonright_k}(\alpha)$ jest kątem). Ponieważ dla $k_1 < k_2$

$$S_{w \upharpoonright_{k_2}}(\alpha) = S_{w \upharpoonright_{k_1}} \circ S_{w \upharpoonright_{k_1+1}^{k_2}}(\alpha) \subseteq S_{w \upharpoonright_{k_1}}(\alpha),$$



Rysunek 7: Dowód lematu 26 – porównanie wartości d_k i d_{k+1} .

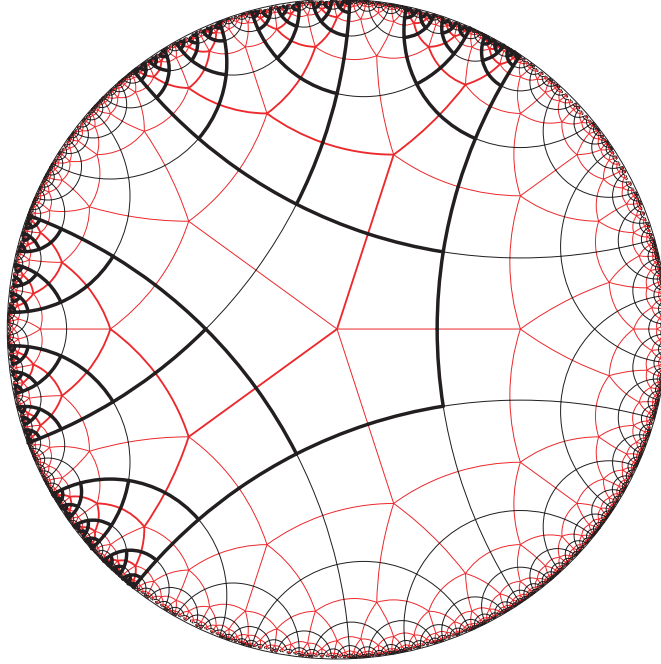
to rodzina $\{\partial(S_{w \upharpoonright_k}(\alpha))\}_{k \in \mathbb{N}}$ jest zstępującą rodziną zwartych łuków okręgu $\partial\mathbb{H}^2$, więc jej przekrój też jest łukiem domkniętym okręgu $\partial\mathbb{H}^2$. Założmy nie wprost, że nie jest on zdegenerowany do punktu. Dla dowolnej półpłaszczyzny \mathbb{H}^2 i kąta hiperbolicznego wypukłego o brzegu zawierającym brzeg tej półpłaszczyzny ów kąt zawiera tę półpłaszczyznę, gdyż jest on przekrojem dwóch półpłaszczyzn \mathbb{H}^2 , a jeśli brzeg jednej półpłaszczyzny \mathbb{H}^2 zawiera brzeg drugiej półpłaszczyzny \mathbb{H}^2 , to ta pierwsza zawiera tę drugą. Wobec tego półpłaszczyzna \mathbb{H}^2 o brzegu zawartym w łuku $\bigcap_{k=0}^{\infty} \partial(S_{w \upharpoonright_k}(\alpha))$ (taka istnieje) zawiera się w $\bigcap_{k=0}^{\infty} S_{w \upharpoonright_k}(\alpha)$. W szczególności $\bigcap_{k=0}^{\infty} S_{w \upharpoonright_k}(\alpha) \neq \emptyset$. Niech więc $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} S_{w \upharpoonright_k}(\alpha)$. Niech dla k naturalnych d_k będzie sumą odległości hiperbolicznych punktu x od obydwu geodezyjnych zawierających ramiona kąta $S_{w \upharpoonright_k}(\alpha)$, tzn. od $S_{w \upharpoonright_k}(l_0)$ i $S_{w \upharpoonright_k}(l_1)$. Porównajmy wartości d_k i d_{k+1} . Otóż

$$S_{w \upharpoonright_{k+1}}(\alpha) = S_{w \upharpoonright_k} \circ S_{w \upharpoonright_{k+1}}(\alpha) = S_{w \upharpoonright_k} \circ S_{w \upharpoonright_{k+1}} \circ S_{w \upharpoonright_k}^{-1}(S_{w \upharpoonright_k}(\alpha)),$$

przy czym $S_{w \upharpoonright_k} \circ S_{w \upharpoonright_{k+1}} \circ S_{w \upharpoonright_k}^{-1}$ jest przesunięciem sprzężonym do $S_{w \upharpoonright_{k+1}}$, czyli przesunięciem wzdłuż prostej $S_{w \upharpoonright_k}(l_{w(k+1)})$ w kierunku ramienia kąta $S_{w \upharpoonright_k}(\alpha)$ wyznaczającego $S_{w \upharpoonright_k}(l_{w(k+1)})$. Przekształcenie to zachowuje geodezyjną $S_{w \upharpoonright_k}(l_{w(k+1)})$, a wzdłuż niej przesuwa prostopadłą geodezyjną $S_{w \upharpoonright_k}(l_{1-w(k+1)})$ o odległość $c > 0$ równą długości krawędzi w $\tilde{\Gamma}_A$. Zatem

$$S_{w \upharpoonright_k}(l_{w(k+1)}) = S_{w \upharpoonright_{k+1}}(l_{w(k+1)}) \quad \text{i} \quad \text{dist}(S_{w \upharpoonright_k}(l_{1-w(k+1)}), S_{w \upharpoonright_{k+1}}(l_{1-w(k+1)})) = c.$$

Niech h będzie punktem realizującym na geodezyjnej $S_{w \upharpoonright_k}(l_{1-w(k+1)})$ minimalną odległość do x . Wówczas $S_{w \upharpoonright_{k+1}}(l_{1-w(k+1)})$ na pewno przecina odcinek geodezyjnej $[x; h]$ w punkcie odległym od h o co najmniej c , więc odległość x do $S_{w \upharpoonright_{k+1}}(l_{1-w(k+1)})$ jest o co najmniej c mniejsza niż do $S_{w \upharpoonright_k}(l_{1-w(k+1)})$, a odległości x do $S_{w \upharpoonright_{k+1}}(l_{w(k+1)})$ i do $S_{w \upharpoonright_k}(l_{w(k+1)})$ są takie same. Zatem $d_{k+1} \leq d_k - c$, co przy warunku $0 \leq d_k < \infty$ dla $k \in \mathbb{N}$ daje sprzeczność, bo $c = \text{const}$. Zatem $\bigcap_{k=0}^{\infty} \partial(S_{w \upharpoonright_k}(\alpha))$ jest co najwyżej jednopunktowy.



Rysunek 8: Drzewa zanurzone w graf $\tilde{\Gamma}_A$ i $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ w dowodzie lematu 26.

Należy jeszcze zaznaczyć, że krzywa \tilde{P} (sparametryzowana półprostą dodatnią) nie ma punktów skupienia w \mathbb{H}^2 (poza trywialnym zawieraniem punktów), bo dowolna kula hiperboliczna kroi skończenie wiele krawędzi i wierzchołków $\tilde{\Gamma}_A$ i krzywa \tilde{P} od pewnego momentu do tej kuli nie wraca, zatem jedynym punktem skupienia i granicą krzywej \tilde{P} jest jedyny element $\bigcap_{k=0}^{\infty} \partial(S_{w \upharpoonright_k}(\alpha))$. Należy on do Φ jako element brzegu podzbioru α , bo $\partial\alpha \subseteq \Phi$.

W podobny sposób zanurzamy drzewo T w graf płaski $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$: niech $\varphi^\dagger : L \rightarrow V(\tilde{\Gamma}_A^\dagger)$ będzie dane wzorem

$$\varphi^\dagger(w) = S_w(v^\dagger),$$

gdzie v^\dagger jest środkiem pięciokąta parkietażu Π_A , którego kątem jest α . Podobnie, jak w przypadku φ , dowodzimy, że φ^\dagger jest różnowartościowe (korzystając z tego, że $v^\dagger \notin S_0(\alpha) \cup S_1(\alpha)$, ale $v^\dagger \in \alpha$) i zachowuje sąsiedztwo wierzchołków (gdyż v^\dagger jest sąsiadem $S_0(v^\dagger)$ i $S_1(v^\dagger)$ w grafie $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$), więc φ^\dagger jest izomorficznym zanurzeniem drzewa T w graf $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$. Również podobnie, jak dla φ , podgraf płaski $\varphi^\dagger(T)$ grafu $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ zawiera się w α i jego brzeg zawiera się w $\partial\alpha$. W końcu analogiczny rachunek pokazuje, że dla dowolnej ścieżki P w drzewie T reprezentowanej przez nieskończony ciąg zerojedynkowy w jej zanurzenie przez φ^\dagger jako krzywa nieograniczona \tilde{P}^\dagger ma brzeg zawarty w $\bigcap_{k=0}^{\infty} \partial(S_{w \upharpoonright_k}(\alpha))$, który, jak już wiemy, jest jednopunktowy, i jego jedyny element jest w analogiczny sposób granicą \tilde{P}^\dagger . To kończy dowód lematu. ■

Uwaga 27. Następujące twierdzenie sformułuję dla grafu $\tilde{\Gamma}_A$ oraz $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$. Oznaczę więc dla wygody przez A^\dagger wielokąt będący domknięciem ściany grafu $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$ tak, że $\tilde{\Gamma}_A^\dagger = \tilde{\Gamma}_{A^\dagger}$. Twierdzenie jest głównym twierdzeniem pracy i dotyczy środkowej fazy perkolacji (tzn. gdy mamy p. n. nieskończenie wiele nieskończonych klastrów, czyli $p_c(\Gamma_B) < p < p_u(\Gamma_B)$, gdzie $p_c(\Gamma_B)$, $p_u(\Gamma_B)$ są odpowiednio prawdopodobieństwem krytycznym i unifikacji dla grafu $\Gamma_B = \Gamma_A$ lub $\Gamma_B = \Gamma_A^\dagger$).

Twierdzenie 28. *W środkowej fazy dla krawędziowej perkolacji Bernoulliego z prawdopodobieństwem p wylosowania pojedynczej krawędzi na grafie Γ_B , gdzie $B = A$ lub $B = A^\dagger$ p. n. każdy*

koniec każdej składowej nieskończonej ma jednopunktowy brzeg.

Dowód. Niech $\omega^{(p)}$ oznacza losowy podgraf procesu perkolacyjnego z twierdzenia, gdzie p jest prawdopodobieństwem wylosowania pojedynczej krawędzi.

Z lematu 21 wynika, że każdy koniec dowolnego podzbioru \mathbb{H}^2 ma brzeg będący łukiem domkniętym $\partial\mathbb{H}^2$ (być może punktem albo całym okręgiem). Teza twierdzenia mówi, że w przypadku nieskończonych klastrów $\omega^{(p)}$ p. n. są to zawsze łuki zdegenerowane do punktów.

Definicja 29. Dla wielokąta foremnego B klasy $\text{III}\mathbb{H}^2$ i dla krawędzi $e \in \tilde{\Gamma}_B$ niech e^\dagger oznacza krawędź w $\tilde{\Gamma}_B^\dagger$ dualną do e , tzn. jedyną krawędź $\tilde{\Gamma}_B^\dagger$ krojącą się niepusto z e . Operacja brania krawędzi dualnej jest bijekcją między $\tilde{E}(\tilde{\Gamma}_B)$ i $\tilde{E}(\tilde{\Gamma}_B^\dagger)$. Niech dla podgrafu γ grafu $\tilde{\Gamma}_B$

$$\gamma^\dagger = (V(\tilde{\Gamma}_B^\dagger), \{e^\dagger : e \notin \gamma\}).$$

Uwaga 30. Zauważmy, że w istocie $\omega^{(p)\dagger}$ z powyższej definicji jest losowym podgrafem w krawędziowej perkolacji Bernoulliego na grafie $\tilde{\Gamma}_B^\dagger$ z prawdopodobieństwem $1 - p$ wylosowania pojedynczej krawędzi, gdyż rodzina zdarzeń

$$\{\{e^\dagger \in \omega^{(p)\dagger}\} : e^\dagger \in \tilde{E}(\tilde{\Gamma}_B^\dagger)\} = \{\{e \notin \omega^{(p)}\} : e \in \tilde{E}(\tilde{\Gamma}_B)\}$$

jest rodziną zdarzeń stochastycznie niezależnych o prawdopodobieństwie $1 - p$ każde.

Lemat 31. Dla $p > \frac{1}{2}$ p. n. zbiór punktów $\partial\mathbb{H}^2$ będących granicami ścieżek nieskończonych w $\omega^{(p)}$ jest gęsty w $\partial\mathbb{H}^2$. Podobnie dla $p < \frac{1}{2}$ zbiór ów jest gęsty dla $\omega^{(p)\dagger}$.

Dowód (lematu). Niech Φ będzie dowolnym łukiem otwartym w $\partial\mathbb{H}^2$ i niech $p > \frac{1}{2}$. Wówczas z lematu 26 istnieje podgraf płaski \tilde{T} grafu $\tilde{\Gamma}_B$ będący pełnym nieskończonym drzewem binarnym, którego każda ścieżka nieskończona wychodząca z korzenia ma granicę w Φ . Wobec tego każda ścieżka nieskończona w owym drzewie ma granicę w Φ , gdyż od pewnego miejsca pokrywa się z pewną ścieżką o początku w korzeniu \tilde{T} .

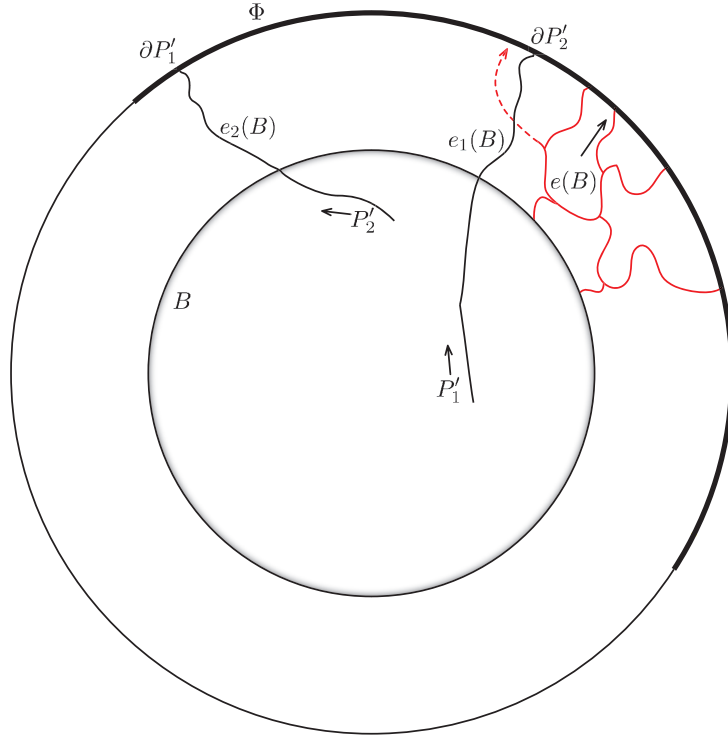
Niech T będzie odpowiadającym \tilde{T} podgrafem Γ_B . Ponieważ obcięcie $\omega^{(p)}$ do grafu T jest odpowiednim procesem perkolacyjnym na T , to skoro $p > \frac{1}{2}$ w drzewie T zachodzi perkolacja (z twierdzenia 4) i p. n. istnieje nieskończona ścieżka w $T \cap \omega^{(p)}$. Jest ona wówczas w wersji płaskiej zbieżna do pewnego punktu Φ . Zatem dla dowolnego łuku otwartego w $\partial\mathbb{H}^2$ p. n. istnieje nieskończona ścieżka w $\omega^{(p)}$ mająca granicę w tym łuku.

Weźmy bazę \mathcal{B} topologii okręgu $\partial\mathbb{H}^2$ złożoną z przeliczalnej ilości łuków otwartych. Wówczas dla każdego łuku $\Phi \in \mathcal{B}$ p. n. istnieje ścieżka zbieżna do pewnego jego punktu, a więc p. n. dla każdego $\Phi \in \mathcal{B}$ istnieje taka ścieżka, gdyż jest to przeliczalny przekrój zdarzeń prawie pewnych. Zdarzenie to pociąga gęstość zbioru takich granic w $\partial\mathbb{H}^2$.

Dowód ten został przeprowadzony ogólnie dla $\tilde{\Gamma}_B$ będącego $\tilde{\Gamma}_A$ lub $\tilde{\Gamma}_A^\dagger$, więc dla przypadku $p < \frac{1}{2}$ i procesu $\omega^{(p)\dagger}$ wystarczy powołać się na uwagę 30 i stwierdzić, że $\omega^{(p)\dagger}$ jest procesem perkolacyjnym na jednym z tych grafów z prawdopodobieństwem wylosowania krawędzi większym od $\frac{1}{2}$ i spełnia tezę lematu na mocy jego pierwszej części. ■

Następny lemat ma charakter geometryczno-topologiczny.

Lemat 32. Niech γ będzie podgrafem $\tilde{\Gamma}_B$, przy czym $V(\gamma) = V(\tilde{\Gamma}_B)$. Jeśli γ lub γ^\dagger ma gęsty w $\partial\mathbb{H}^2$ zbiór granic swoich ścieżek (w sensie takim jak w powyższym lemacie), zaś γ ma nieskończenie wiele nieskończonych składowych spójności i każda półpłaszczyzna \mathbb{H}^2 przecina niepusto nieskończenie wiele spośród nich, to wówczas każdy koniec każdej nieskończonej składowej γ ma brzeg jednopunktowy.



Rysunek 9: Pierwsza część punktu 1 (albo podobny punkt 2) dowodu lematu 32.

Dowód (lematu). Załóżmy nie wprost, że pewien koniec e pewnej nieskończonej składowej a grafu γ ma brzeg będący niezdegenerowanym łukiem okręgu $\partial\mathbb{H}^2$. Niech Φ będzie wnętrzem tego łuku. Rozważę dwa przypadki:

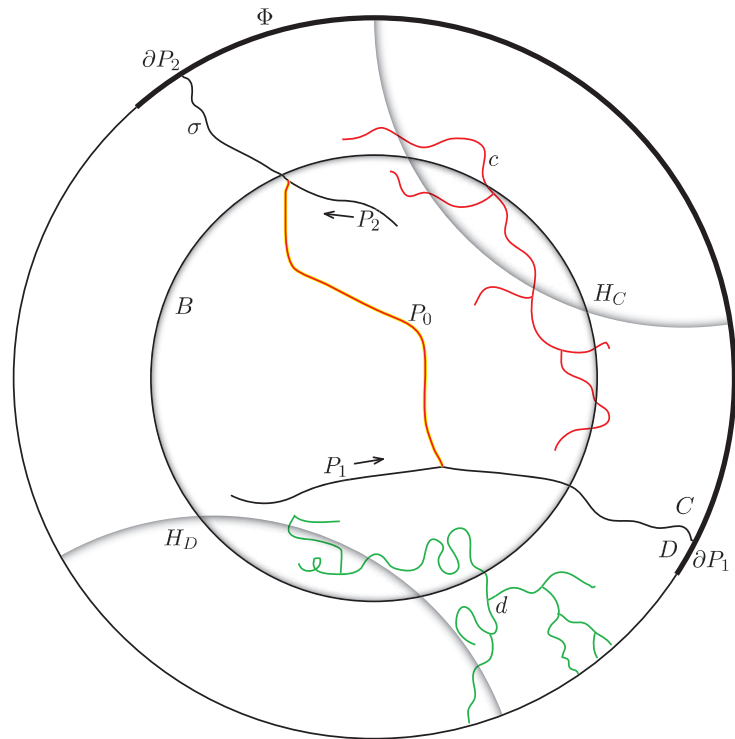
Przyp. 1. Zbiór granic ścieżek grafu γ leży gęsto w $\partial\mathbb{H}^2$.

Wówczas istnieją w Φ trzy różne granice odpowiednio trzech różnych ścieżek γ . Możemy żądać, aby te trzy ścieżki były parami rozłączne (możemy je urozłączyć odpowiednio je skracając, gdyż mają różne granice). Oznaczmy ich zbiór przez \mathcal{P} . Udowodnię najpierw, że przynajmniej dwie z tych ścieżek, powiedzmy $P_1 \neq P_2$, „leżą w końcu” e , tzn. dla dowolnego $K \subseteq \mathbb{H}^2$ zwartego ich nieskończone ogony po wyrzuceniu K (czyli jedyne nieograniczone składowe $P_1 \setminus K$, $P_2 \setminus K$), albo innymi słowy $e_1(K)$, $e_2(K)$, gdzie e_1, e_2 są jedynymi końcami odpowiednio P_1 i P_2 , leżą w $e(K)$.

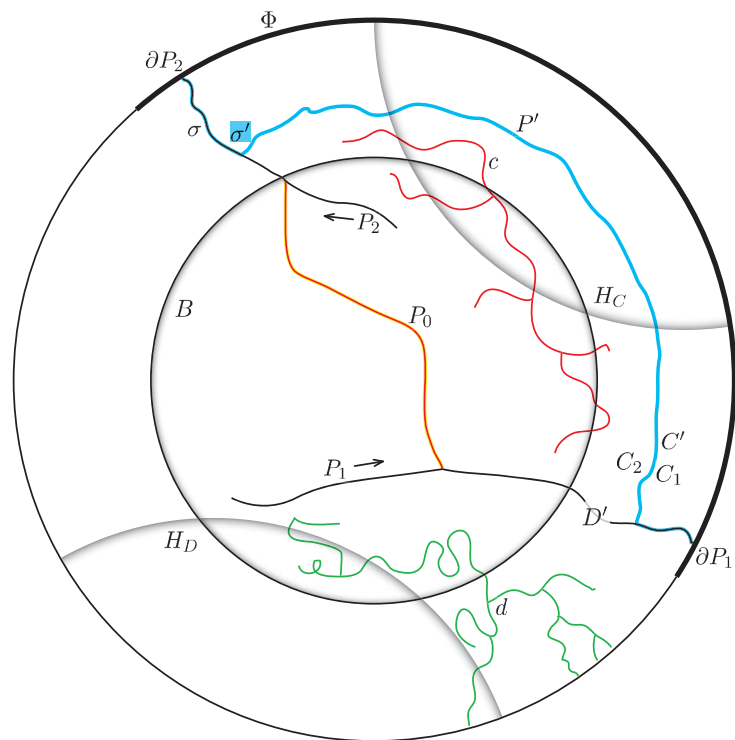
Gdyby tak nie było, to pewne pozostałe dwie różne ścieżki $P'_1, P'_2 \in \mathcal{P}$ nie miałyby tej własności, czyli istniałyby zwarte $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{H}^2$ odpowiednio dla P'_1, P'_2 takie, że $e_i(K_i) \cap e(K_i) = \emptyset$ dla $i = 1, 2$. Niech wówczas B będzie kulą domkniętą w \mathbb{H}^2 zawierającą $K_1 \cup K_2$ i zahaczającą o P'_1, P'_2 . Wówczas także $e_i(B) \cap e(B) = \emptyset$ dla $i = 1, 2$ (gdyż $e_i(B) \subseteq e_i(K_i)$ oraz $e(B) \subseteq e(K_i)$). $\mathbb{H}^2 \setminus B$ tworzy pierścień (bez wewnętrznego brzegu) rozspajany przez łuki bez jednych końców: $e_1(B) \cup \partial P'_1$ oraz $e_2(B) \cup \partial P'_2$ na dwie składowe, które zawierają odpowiednio składowe zbioru $\partial\mathbb{H}^2 \setminus (\partial P'_1 \cup \partial P'_2)$. Zatem $e(B)$ zawiera się w jednej ze składowych zbioru

$$\widehat{\mathbb{H}^2} \setminus (B \cup (e_1(B) \cup \partial P'_1) \cup (e_2(B) \cup \partial P'_2))$$

i również $\overline{e(B)}^{\widehat{\mathbb{H}^2}}$ jest rozłączny z drugą składową tego zbioru, ale Φ (a więc również ∂e oraz $\partial e(B)$) kroi się niepusto z obydwoma składowymi, gdyż np. punkt zbioru $\partial P'_1$ leży w Φ , co daje sprzeczność.



Rysunek 10: Druga część punktu 1 dowodu lematu 32.



Rysunek 11: Rys. 10 z dodaną krzywą P' .

Wobec tego niech $P_1 \neq P_2$ z \mathcal{P} mają „wspólny koniec” z e . Niech P_0 będzie najkrótszą ścieżką w γ łączącą P_1 z P_2 . Wówczas jeden jej koniec leży w P_1 , a drugi w P_2 i żaden z jej wierzchołków wewnętrznych nie leży w $P_1 \cup P_2$. Oznaczmy nieograniczone krzywe zawarte odpowiednio w P_1 i P_2 o początkach będących końcami P_0 odpowiednio przez $P_1 \upharpoonright_{P_0}$, $P_2 \upharpoonright_{P_0}$. Krzywe $P_1 \upharpoonright_{P_0}$, $P_2 \upharpoonright_{P_0}$ w sumie z P_0 i granicami P_1 i P_2 tworzą łuk σ :

$$\sigma = (P_1 \upharpoonright_{P_0} \cup \partial P_1) \cup (P_2 \upharpoonright_{P_0} \cup \partial P_2) \cup P_0 \subseteq a$$

rozspajający $\widehat{\mathbb{H}^2}$ na dwie składowe C i D , których brzegami są łuki $\partial \mathbb{H}^2$ pokrywające w sumie $\partial \mathbb{H}^2$ o końcach będących odpowiednio punktami zbiorów ∂P_1 i ∂P_2 (patrz: rys. 10). Zatem z domkniętości σ w $\widehat{\mathbb{H}^2}$ istnieją punkty na każdym z tych łuków o otoczeniach w \mathbb{H}^2 rozłącznych z σ . Można zatem obrać dwie półpłaszczyzny H_C , H_D w \mathbb{H}^2 zawarte odpowiednio w C i D (np. zawarte w owych otoczeniach). Ponieważ każda z nich kroi się niepusto z nieskończenie wieloma nieskończonymi składowymi grafu γ , to w szczególności istnieją dwie różne składowe γ inne niż a , zawarte odpowiednio w C i D . Nazwijmy je odpowiednio c i d . Niech domknięta kula B w \mathbb{H}^2 zahacza o obydwie te klastry oraz o $P_1 \upharpoonright_{P_0}$ i $P_2 \upharpoonright_{P_0}$. Niech e_1 , e_2 będą jedynymi końcami odpowiednio P_1 i P_2 . Wówczas $B \cup e_1(B) \cup e_2(B)$ rozspaja \mathbb{H}^2 na dwie składowe (podobnie jak w pierwszej części dowodu, tylko że tam rozważaliśmy $\widehat{\mathbb{H}^2}$). Niech

$$K = B \cup (\sigma \setminus ((e_1(B) \cup \partial P_1) \cup (e_2(B) \cup \partial P_2)))$$

(jest to zwarty podzbiór \mathbb{H}^2 , gdyż $e_1(B) \cup \partial P_1$, $e_2(B) \cup \partial P_2$ są otwarte w σ). Między $e_1(K)$ i $e_2(K)$ istnieje łącząca je ścieżka w γ omijająca zbiór K , gdyż e_1 i e_2 leżą „w końcu” e . Niech P' będzie najkrótszą taką ścieżką. Ma ona końce odpowiednio w $e_1(K)$ i $e_2(K)$ i żadnych innych wierzchołków w $e_1(K) \cup e_2(K)$. Jest zatem łukiem w $\overline{C}^{\widehat{\mathbb{H}^2}}$ lub $\overline{D}^{\widehat{\mathbb{H}^2}}$, gdyż jest rozłączna z σ poza końcami. Załóżmy bez zmniejszenia ogólności, że $P' \subseteq \overline{C}^{\widehat{\mathbb{H}^2}}$. Wówczas P' rozspaja $\overline{C}^{\widehat{\mathbb{H}^2}}$ na dwie składowe spójności C_1 i C_2 (patrz: rys. 11). Niech łuk w σ ograniczony przez końce P' będzie oznaczony jako $\sigma \upharpoonright_{P'}$. Jedna ze składowych C_1 , C_2 , powiedzmy, C_2 jest warunkowo zwarta w \mathbb{H}^2 , gdyż jej brzegiem topologicznym w \mathbb{H}^2 jest $P' \cup \sigma \upharpoonright_{P'}$. Łuk

$$\sigma' = P' \cup (\sigma \setminus \sigma \upharpoonright_{P'}) \cup \partial P_1 \cup \partial P_2$$

rozspaja $\widehat{\mathbb{H}^2}$ na dwie składowe spójności: $D' = \text{int}_{\widehat{\mathbb{H}^2}} \overline{D \cup C_2}^{\widehat{\mathbb{H}^2}}$ oraz $C' = \text{int}_{\widehat{\mathbb{H}^2}} C_1$. Ponieważ σ' jest rozłączna z kulą B , a także zawiera się w klastrze a , to skoro B kroi się niepusto z D , to $B \subseteq D'$, a więc obydwie klastry c i d leżą w D' (bo są rozłączne z σ' , a z B kroją się niepusto), przy czym $\tilde{c} \subseteq C \cap D' = C_2$, ale C_2 jest warunkowo zwarty w \mathbb{H}^2 , więc c jest skończonym podgrafem $\tilde{\Gamma}_B$, co daje sprzeczność.

Przyp. 2. Zbiór granic ścieżek γ^\dagger leży gęsto w $\partial \mathbb{H}^2$.

Wówczas istnieją dwie ścieżki P_1 i P_2 grafu γ^\dagger o różnych granicach w Φ . Są one rozłączne z γ , więc w sensie z dowodu poprzedniego punktu ich końce „nie leżą” w e . Zatem podobnie, jak w pierwszej części dowodu punktu 1, mamy sprzeczność z definicją brzegu końca e , który zawiera Φ , a jego wnętrzu – granice P_1 i P_2 .

To kończy dowód całego lematu. ■

Teza powyższego lematu dla $\gamma = \omega^{(p)}$ jest tezą twierdzenia. Z lematu 31 wiemy już, że p. n. zachodzi pierwsze założenie lematu (o gęstości granic ścieżek) dla $\gamma = \omega^{(p)}$ dla $p \neq \frac{1}{2}$. Podobnie o drugim założeniu tego lematu (o półpłaszczyznach zahaczających o nieskończenie wiele nieskończonych klastrów) dla $p \in (p_c(\Gamma_B), p_u(\Gamma_B))$ pozwoli nam powiedzieć kolejny lemat. Sformułuję go ogólnie dla dowolnego wielokąta foremnego klasy $\text{III} \mathbb{H}^2$. Przedtem poczynię jednak pewne obserwacje.

Definicja 33. Mówimy, że półpłaszczyzna \mathbb{H}^2 jest zgodna z grafem $\tilde{\Gamma}_D$ (albo z parkietażem Π_D), gdy jej brzeg topologiczny w \mathbb{H}^2 zawiera pewną krawędź $\tilde{\Gamma}_D$.

Udowodnimy najpierw pomocniczy fakt mówiący, że w dowolnej półpłaszczyźnie \mathbb{H}^2 zawiera się półpłaszczyzna zgodna z grafem parkietażu. Skorzystamy w tym celu z następującej obserwacji:

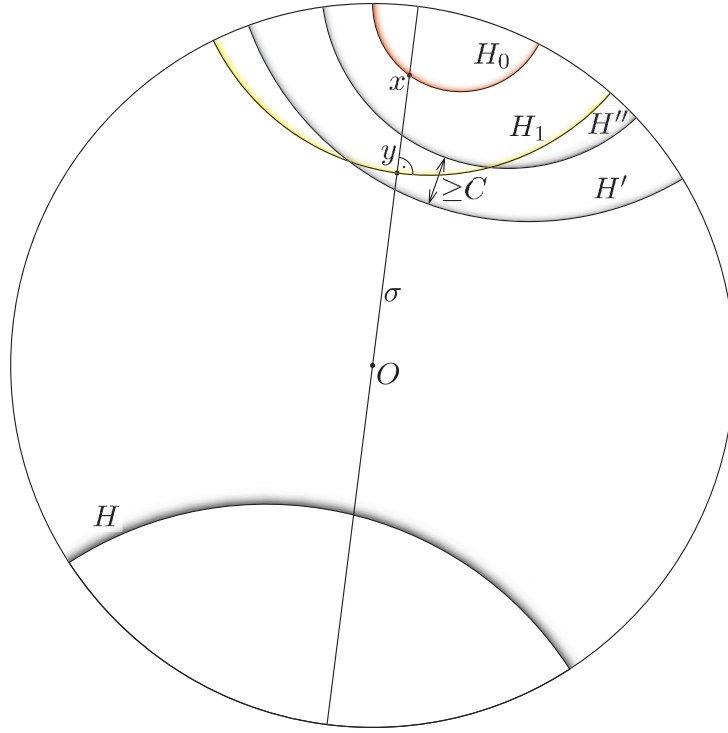
Obserwacja 34. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $C > 0$ takie, że dla dowolnej geodezyjnej σ i półpłaszczyzny H_0 ograniczonej geodezyjną przecinającą σ w punkcie x pod kątem ostrym nie mniejszym od ε istnieje półpłaszczyzna H symetryczna względem σ zawierająca H_0 o brzegu topologicznym odległym hiperbolicznie od punktu x o co najwyżej C .

Dowód (obserwacji). Niech $\varepsilon > 0$, zaś σ niech będzie geodezyjną \mathbb{H}^2 przechodzącą przez punkt x . Ograniczmy się początkowo do przypadku $x = O$ (środek dysku Poincarégo). Wówczas σ jest średnicą (bez końców) dysku Poincarégo, a każda H_0 z założenia obserwacji jest euklidesowym półkolem. Rozważmy sumę takich półpłaszczyzn o brzegu topologicznym tworzącym z σ kąt ostry nie mniejszy od ε , zawierających ustaloną półprostą geodezyjnej σ . Ta suma jest kątem o mierze $2\pi - 2\varepsilon$ i symetralnej σ . Jeden z końców σ w $\partial\mathbb{H}^2$ nie należy do brzegu hiperbolicznego tego kąta, więc pewna półpłaszczyzna o symetralnej σ jest rozłączna z tym kątem. Półpłaszczyzna do niej dopełnicza, którą oznaczę przez H , zawiera ten kąt, a więc i dowolną półpłaszczyznę spełniającą założenia obserwacji (oczywiście zawierającą odpowiednią półprostą σ , ale nie zmniejsza to ogólności). Stała C obrana jako odległość punktu x od brzegu topologicznego H spełnia ogólnie tezę obserwacji, gdyż dla dowolnej geodezyjnej σ i półpłaszczyzny H_0 jak w założeniu stosując izometrię przenoszącą punkt x do O otrzymamy przypadek $x = O$ i obraną w tym przypadku półpłaszczyznę H należy cofnąć przez tę izometrię, aby spełniała tezę obserwacji dla oryginalnych danych σ , x i H_0 , a jej brzeg topologiczny był odległy o C od punktu x . ■

Fakt 35. W każdej półpłaszczyźnie \mathbb{H}^2 zawiera się półpłaszczyzna zgodna z $\tilde{\Gamma}_D$, gdzie D jest dowolnym wielokątem foremnym klasy $\text{III}\mathbb{H}^2$.

Dowód (faktu). Niech H będzie dowolną półpłaszczyzną \mathbb{H}^2 . Niech C będzie stałą z obserwacji dla $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$, zaś H' – taką półpłaszczyznę zawartą w H , że jej odległość euklidesowa od $\mathbb{H}^2 \setminus H$ jest nie mniejsza od średnicy euklidesowej H' . Wówczas H' nie zawiera punktu O . Niech H'' będzie półpłaszczyzną \mathbb{H}^2 zawartą w H' odległą od $\mathbb{H}^2 \setminus H'$ przynajmniej o C . Z dowodu lematu 25 wiemy, że H'' zawiera pewien wierzchołek x grafu $\tilde{\Gamma}_D$ (wtedy $x \neq O$). Niech σ będzie geodezyjną przechodzącą przez x i O . Rozważmy geodezyjne zawierające krawędzie incydentne z x . Kąt pomiędzy sąsiednimi spośród nich wynosi co najwyżej $\frac{\pi}{2}$, więc jedna z tych geodezyjnych przecina σ pod kątem (ostrym) co najmniej $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} = \varepsilon$. Weźmy zatem półpłaszczyznę H_0 ograniczoną przez tę geodezyjną tak, by $O \notin H_0$ (tzn. H_0 zawiera półprostą geodezyjnej σ o początku x zawartą w H''). Jest ona zgodna z $\tilde{\Gamma}_D$. Z obserwacji wiemy, że istnieje półpłaszczyzna H_1 zawierająca H_0 o brzegu topologicznym przecinającym σ pod kątem prostym w punkcie y odległym od x o nie więcej niż C . Zatem y jest odległy od H'' o co najwyżej C , więc $y \in H'$. Wobec tego odległość H_1 od O (czyli y od O) jest nie mniejsza, niż odległość H' od O , więc średnica euklidesowa H_1 nie przekracza średnicy euklidesowej H' , ale $H_1 \cap H' \neq \emptyset$, więc $H_1 \subseteq H$, czyli $H_0 \subseteq H$, co było do udowodnienia. ■

Lemat 36. Dla dowolnego wielokąta foremnego D klasy $\text{III}\mathbb{H}^2$ rozważmy proces krawędziowej perkolacji Bernoulliego $\omega^{(p)}$ na Γ_D z prawdopodobieństwem p wylosowania pojedynczej krawędzi, przy czym $p \in (p_c(\Gamma_D), p_u(\Gamma_D))$. Wówczas $p. n.$ dowolna półpłaszczyzna \mathbb{H}^2 zahacza o nieskończenie wiele nieskończonych składowych $\omega^{(p)}$.



Rysunek 12: Dowód faktu pomocniczego 35.

Dowód. Najpierw udowodnię, że dowolna półpłaszczyzna H_0 zgodna z $\tilde{\Gamma}_D$ p. n. zahacza o nieskończenie wiele nieskończonych składowych $\omega^{(p)}$. Załóżmy nie wprost zaprzeczenie tej sytuacji, czyli że zahacza ona z dodatnim prawdopodobieństwem jedynie o skończenie wiele nieskończonych składowych, zaś jej dopełnienie $\mathbb{H}^2 \setminus H_0$ (czyli wnętrze półpłaszczyzny dopełniczej do H_0) zawiera pozostałe nieskończenie wiele nieskończonych składowych.

Dla dowolnej półpłaszczyzny H i podgrafu γ grafu $\tilde{\Gamma}_D$ niech $\gamma \upharpoonright_H$ oznacza obcięcie γ do zbioru krawędzi zahaczających o wnętrze H .

Otóż zdarzenie: „we wnętrzu H zawiera się nieskończenie wiele nieskończonych składowych grafu γ ” zależy jedynie od $\gamma \upharpoonright_H$. Innymi słowy, dla podgrafów γ, γ' grafu $\tilde{\Gamma}_D$ takich, że $\gamma \upharpoonright_H = \gamma' \upharpoonright_H$, jeśli γ ma nieskończenie wiele nieskończonych składowych leżących we wnętrzu H , to γ' też. Oznaczę to zdarzenie dla $\gamma = \omega^{(p)}$ przez A_H .

Ponieważ dowolną półpłaszczyznę zgodną z $\tilde{\Gamma}_D$ na dowolną półpłaszczyznę również zgodną z $\tilde{\Gamma}_D$ przeprowadza pewna izometria \mathbb{H}^2 zachowująca $\tilde{\Gamma}_D$, to prawdopodobieństwo wszelkich zdarzeń takiego typu jak A_H nie zależy od wyboru półpłaszczyzny H zgodnej z $\tilde{\Gamma}_D$ (będącej jednym z parametrów tego zdarzenia). Wobec tego $P(A_H)$ jest stałe względem półpłaszczyzny H zgodnej z grafem $\tilde{\Gamma}_D$ i dodatnie zgodnie z założeniem nie wprost.

Niech H_1, H_2, \dots będą półpłaszczyznami zgodnymi z $\tilde{\Gamma}_D$ zawartymi w H_0 takimi, że zbiory krawędzi grafów $\tilde{\Gamma}_D \upharpoonright_{H_n}$ dla $n = 1, 2, \dots$ są parami rozłączne. Konstrukcja takich półpłaszczyzn opiera się na wybraniu nieskończenie wielu półpłaszczyzn H'_1, H'_2, \dots parami rozłącznych leżących w H_0 , następnie półpłaszczyzn odpowiednio w nich zawartych wraz z otoczeniem hiperbolicznym o promieniu równym długości krawędzi grafu $\tilde{\Gamma}_D$, a z kolei w nich zawartych półpłaszczyzn H_1, H_2, \dots zgodnych z grafem $\tilde{\Gamma}_D$. Wówczas istotnie $\tilde{\Gamma}_D \upharpoonright_{H_n} \subseteq H'_n$ dla $n = 1, 2, \dots$ i $\tilde{E}(\tilde{\Gamma}_D \upharpoonright_{H_n})$ są parami rozłączne. Wobec tego zdarzenia A_{H_n} przy $n = 1, 2, \dots$ są niezależne o stałym prawdopodobieństwie dodatnim, więc p. n. zachodzi nieskończenie wiele spośród A_{H_n} . W szczególności p. n. H_0 zahacza o nieskończenie wiele nieskończonych składowych $\omega^{(p)}$, co jest

sprzeczne z założeniem nie wprost. Zatem w istocie jest tak, że półpłaszczyzna zgodna z $\tilde{\Gamma}_D$ p. n. zahacza o nieskończenie wiele nieskończonych składowych i również p. n. jest tak dla wszystkich półpłaszczyzn zgodnych z $\tilde{\Gamma}_D$ jednocześnie, gdyż jest ich przeliczalnie wiele, i wówczas p. n. dowolna półpłaszczyzna H kroi niepusto nieskończenie wiele nieskończonych składowych, ponieważ zawiera pewną półpłaszczyznę zgodną z $\tilde{\Gamma}_D$. ■

Z lematów 31 i 36 wynika, że założenia lematu 32 dla $\gamma = \omega^{(p)}$ są spełnione p. n., gdy

$$p \in (p_c(\Gamma_B), p_u(\Gamma_B)) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Zatem twierdzenie zostało udowodnione dla tych wartości p . Aby zakończyć dowód musimy mieć tezę dla $p = \frac{1}{2}$, o ile $\frac{1}{2} \in (p_c(\Gamma_B), p_u(\Gamma_B))$. Potrzebujemy w tym celu ostatniego lematu:

Lemat 37. *Dla dowolnego wielokąta foremego D klasy III^2 i grafu parkietazu Γ_D zdarzenie jednopunktowości wszystkich końców każdej nieskończonej składowej spójności $\omega^{(p)}$ na tym grafie jest nierosnące.*

Dowód. Weźmy podgraf γ grafu Γ_D , w którym każdy koniec każdej nieskończonej składowej ma brzeg jednopunktowy oraz podgraf γ' grafu γ . Udowodnimy, że γ' również ma tę własność.

Założmy nie wprost, że istnieje koniec e' składowej nieskończonej a' grafu γ' , który ma niejednopunktowy brzeg. Wówczas zdefiniujemy odpowiednią składową a grafu γ i jej koniec e w następujący sposób: niech a będzie składową γ zawierającą a' , zaś e – końcem a takim, że dla zwartego $K \subseteq \mathbb{H}^2$ zbiór $e(K)$ jest składową $a \setminus K$ zawierającą $e'(K)$. Odwzorowanie e jest dobrze zdefiniowane, bo zawsze

$$e'(K) \subseteq a' \setminus K \subseteq a \setminus K.$$

Odwzorowanie e jest końcem a , bo dla $K_1 \subseteq K_2$ – zwartych zachodzi

$$\emptyset \neq e'(K_1) \cap e'(K_2) \subseteq e(K_1) \cap e(K_2),$$

a $e(K_2)$ zawiera się w pewnej składowej spójności $a \setminus K_1$, więc musi być $e(K_2) \subseteq e(K_1)$.

Wówczas przy tak zdefiniowanych a i e

$$\partial e = \bigcap_{\substack{K \subseteq X \\ K \text{ - zwarty}}} \partial e(K) \supseteq \bigcap_{\substack{K \subseteq X \\ K \text{ - zwarty}}} \partial e'(K) = \partial e',$$

więc ∂e również nie jest jednopunktowy, co daje sprzeczność. Zatem γ' musi mieć jednopunktowe brzegi końców składowych spójności. ■

Z powyższego lematu i dowodu uwagi 1 wynika, że prawdopodobieństwo zdarzenia z tezy twierdzenia jest nierosnące względem p , czyli zachodzi ono p. n. dla

$$p < \sup((p_c(\Gamma_B), p_u(\Gamma_B)) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}) = p_u(\Gamma_B),$$

co kończy dowód twierdzenia. ■

Literatura

- [hp] I. Benjamini, O. Schramm, *Percolation in the Hyperbolic Plane*, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), nr 2, str. 487–507 (wyd. elektroniczne).
- [PL] R. Lyons we współpracy z Y. Peres, *Probability on Trees and Networks*, Cambridge University Press, 2001 (w przygotowaniu).
- [Grim] G. Grimmett *Percolation*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [PH] P. de la Harpe *Topics in Geometric Group Theory*, The University of Chicago Press, Chicago, 2000.