Topología Algebraica

Segundo cuatrimestre - 2013

Práctica 4

Posets y espacios finitos

Resolver tres ejercicios de los siguientes. Hacer a lo sumo uno del conjunto {4,5,6,10,12}. El 2 y el 3 valen como medio ejercicio cada uno.

1. Sean $f, g : X \to Y$ dos morfismos de orden entre posets no necesariamente finitos tales que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in X$. Probar que $|\mathcal{K}(f)|, |\mathcal{K}(g)| : |\mathcal{K}(X)| \to |\mathcal{K}(Y)|$ son homotópicas.
2. Probar que para todo complejo simplicial finito K existe un lattice finito X tal que $|\mathcal{K}(\hat{X})| \simeq |K|$.
3. Sea K un complejo simplicial finito. Sea L el complejo simplicial que tiene como vértices a los símplices maximales de K y como símplices a los conjuntos de símplices maximales de K con intersección no vacía. Probar que K y L son homotópicamente equivalentes.
4. Probar que todo espacio finito T_0 contráctil X contiene un punto que es retracto por deformación fuerte de X y mostrar con un ejemplo que puede haber un punto que no sea retracto por deformación fuerte de X.
5. Probar que si un espacio finito T_0 X es contráctil, entonces X' también lo es.
6. Sea X un espacio finito T_0 tal que $|\mathcal{K}(X)|$ es homotópicamente equivalente a X. Probar que X es una unión disjunta de espacios contráctiles.
7. Sea X un espacio finito T_0 y sea $x \in X$ un weak point. Probar que $X \smallsetminus \{x\} \hookrightarrow X$ es una equivalencia debil.
8. Sea X un espacio finito T_0 conexo y sea $x \in X$ un punto que no es maximal ni minimal. Probar que la inclusión $X \smallsetminus \{x\} \hookrightarrow X$ induce un epimorfismo en los grupos fundamentales.
9. Probar que existe un espacio finito T_0 homotópicamente trivial, distinto del singleton, sin weak points.
10. Sea X un espacio finito T_0 que contiene una cadena que interseca a toda cadena maximal de X. Probar que X es contráctil.
11. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios finitos T_0 tal que $f^{-1}(U_y)$ es acíclico para todo $y \in Y$. Probar que f induce isomorfismos en todos los grupos de homología.
12. Sea G un grupo y sea X un G-espacio finito T_0. Probar que si X es contráctil, el conjunto de puntos fijos por la acción X^G también es contráctil.
13. Sea G un grupo finito y sea p un primo que divide al orden de p. El rango $r_p(G)$ es la máxima dimensión (como $\mathbb{Z}_p$ espacio vectorial) de un p-subgrupo abeliano elemental de G. Probar que vale la siguiente observación de Quillen: la conjetura de Quillen es cierta si $r_p(G) \leqslant 2$, i.e. $|\mathcal{K}(S_p(G))|$ contráctil implica que G tiene un p-subgrupo normal no trivial.
14. Hallar dos espacios finitos X, Y débilmente equivalentes tales que no existan equivalencias débiles $X \to Y$ ni $Y \to X$.
15. Sean X, Y espacios finitos débilmente equivalentes. Probar que existe un espacio finito Z y equivalencias débiles $Z \to X$, $Z \to Y$.

    Sugerencia: Recordar que dos CW-aproximaciones de un mismo espacio son homotópicamente equivalentes.