Topología Algebraica

Primer cuatrimestre - 2017

Práctica 3

CW-complejos, homología celular y grupos de homotopía

---

1. Probar que los revestimientos de CW-complejos son CW-complejos.
2. Sea X un CW-complejo y $A \subseteq X$ un subcomplejo. Probar que X/A es un CW-complejo.
3. Sean X, Y CW-complejos y $f : X \to Y$ celular. Probar que el cilindro Z_f es un CW-complejo.
4. Si X, Y con CW-complejos y X es compacto, entonces $X \times Y$ es un CW-complejo.
5. Sea $\mathbb{R}P^n = S^n/\sim$ donde $\sim$ identifica puntos antipodales. Probar que $\mathbb{R}P^n$ es un CW-complejo.
6. Probar que dos estructuras de CW-complejo de un mismo espacio tienen igual dimensión.
7. Sea $X = S^2/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia que identifica puntos del ecuador $S^1 \subseteq S^2$ antipodales. Calcular los grupos de homología de X.
8. Calcular los grupos de homología de la botella de Klein.
9. Sea X un CW-complejo de dimensión n. Probar que $H_n(X)$ es abeliano libre para todo.
10. Probar que para todo grupo abeliano G y $n \geqslant 1$, existe un espacio de Moore $M(G, n)$.
11. Probar que para todo CW-complejo X, $H_k(X \times S^n) = H_k(X) \oplus H_{k-n}(X)$ donde $H_i(X) = 0$ si $i < 0$.
12. Probar que los revestimientos inducen isomorfismos en todos los grupos de homotopía de orden mayor a uno.
13. El espacio proyectivo de dimensión infinita $\mathbb{R}P^\infty$ se obtiene de S^∞ identificando puntos antipodales. Probar que $\mathbb{R}P^\infty$ es un $K(\mathbb{Z}_2, 1)$.
14. Calcular $\pi_n(S^n \vee S^1)$.
15. Probar que los grupos de homotopía relativos $\pi_n(X, A, x_0)$ son abelianos si $n \geqslant 3$.
16. Sean X, Y espacios topológicos. Probar que $\pi_n(X \times Y) \simeq \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$.
17. Sean x_0, x_1 puntos en la misma componente arcoconexa de un subespacio A de un espacio X. Probar que $\pi_n(X, A, x_0) \simeq \pi_n(X, A, x_1)$.
18. Sea (X, A) un CW-par y sea Y un espacio topológico arcoconexo tal que $\pi_{k-1}(Y) = 0$ para todo k tal que X tiene una k-celda que no está en A. Probar que toda $f : A \to Y$ continua se puede extender a X. Deducir que todo subcomplejo contráctil de un CW-complejo X es un retracto de X.
19. Probar que la suspensión de un CW-complejo acíclico es contráctil.
20. Sea $\mathbb{R}P^\infty$ el espacio que se obtiene de S^∞ identificando antípodas. Probar que $\mathbb{R}P^2$ y $S^2 \times \mathbb{R}P^\infty$ tienen los mismos grupos de homotopía pero no son homotópicamente equivalentes.

21. Sea X un CW-complejo $K(\mathbb{Z},1)$ (i.e. $\pi_1(X)=\mathbb{Z}$ y $\pi_n(X)=0$ para todo $n\neq 1$). Probar que X es homotópicamente equivalente a S^1.

22. (Difícil) Probar que todo CW-complejo es homotópicamente equivalente a un poliedro.

23. Probar que existe un CW-complejo que no es un poliedro.

24. Sea X un CW-complejo y $A,B\subseteq X$ dos subcomplejos contráctiles, tales que $A\cap B$ es contráctil y $A\cup B=X$. Probar que X es contráctil.

25. Sea (X,A) un CW-par tal que todas las celdas de X que no están en A tienen dimensión mayor a cierto n. Probar que (X,A) es n-conexo y en particular $X^n\hookrightarrow X$ induce isomorfismos en los π_k para todo $k<n$. En particular, agregar celdas de dimensión mayor o igual a $k+2$ no cambia el π_k.

26. Sea (X,A) un CW-par y sea Y un espacio contráctil. Probar que toda función continua $A\to Y$ se extiende a una función continua $X\to Y$.

27. Sean X,Y CW-complejos de dimensión n y sea $f:X\to Y$ una función continua tal que $f_*:\pi_k(X)\to\pi_k(Y)$ es un isomorfismo para todo $k\leqslant n$. Probar que f es una equivalencia homotópica.