Topología Algebraica

Segundo cuatrimestre - 2013

Práctica 2

Espacios de adjunción y (co)fibraciones

Resolver 3 ejercicios de esta práctica y entregarlos el lunes 27 de mayo.

1. Sean X, Z espacios, $A \subseteq X$, $Y \subseteq Z$ subespacios cerrados. Sea $f : X \to Z$ continua tal que $f(A) \subseteq Y$, $f(X \smallsetminus A) \subseteq Z \smallsetminus Y$ y $f : X \smallsetminus A \to Z \smallsetminus Y$ es una biyección. Probar que si X es compacto y Z es Hausdorff entonces

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f|_A"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

es un pushout.

2. Sean X, Y espacios T_2 y A un subespacio cerrado de X tales que para todo $x \in X \smallsetminus A$ existe un entorno cerrado de x en X que no interseca a A. Además supongamos que A es retracto de un entorno de A en X. Probar que para toda $f : A \to Y$ continua, $Y \bigcup_f X$ es T_2.

3. Probar que una función continua $i : A \to X$ es una cofibración si y sólo si para todo espacio Y y funciones continuas $g : A \to Y^I$, $f : X \to Y$ tales que $ev_0 g = fi$ existe $\widetilde{g} : X \to Y^I$ continua tal que $ev_0\widetilde{g} = f$ y $\widetilde{g}i = g$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & Y^I \arrow[d, "ev_0"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\exists \widetilde{g}"] & Y \end{tikzcd}$$

4. Probar que los homeomorfismos son cofibraciones, que composición de cofibraciones es cofibración y que las cofibraciones son estables por cambio de cobase.

5. Sea X un espacio normal (en particular T_1) y sea $A \subseteq X$ un subespacio cerrado. Probar que $i : A \hookrightarrow X$ es una cofibración si y sólo si existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $A \subseteq U$ y $j : A \hookrightarrow U$ es cofibración.

6. Sea $i : A \hookrightarrow X$ una cofibración. Probar que $i \times 1_I : A \times I \to X \times I$ es una cofibración (aunque i no sea cerrada).

7. Probar que si $i : A \hookrightarrow X$ es cofibración y A es contráctil entonces el cociente $q : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica.

8. Probar que si $i : A \hookrightarrow X$ es cofibración y una equivalencia homotópica entonces A es un retracto por deformación fuerte de X.

9. Sea X un espacio simplemente conexo. Al adjuntar una 2-celda con función de adjunción f se obtiene un espacio Y. Probar que el tipo homotópico de Y no depende de f.
10. Probar que composición de fibraciones es una fibración y que producto arbitrario de fibraciones $p_j, j \in J$ es fibración.
11. Probar que para todo espacio X, $ev_0 : X^I \to X$ es una fibración.
12. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sea X un espacio contráctil y $f : X \to B$ una función con imagen contenida en la imagen de p. Probar que f se puede levantar a E.