Topología Algebraica

Segundo cuatrimestre - 2013

Práctica 1

Complejos simpliciales/poliedros

Resolver y entregar el lunes 22 de abril cuatro de los ejercicios de esta práctica del siguiente modo: resolver un ejercicio del conjunto $\{1, 5, 6, 7\}$*, uno de* $\{8, 9, 10\}$ *y dos ejercicios del conjunto* $\{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$.

1. Sea K el complejo simplicial con conjunto de vértices $V_K = \mathbb{N}_0$ y conjunto de símplices $S_K = \{n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \cup \{0, n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Probar que $|K|$ no es un espacio métrico.
2. Probar que el plano proyectivo, la botella de Klein y el toro son poliedros.
3. Sea $\mathcal{U} = \{\overset{\circ}{\mathrm{st}}(v) \mid v \in K\}$. Probar que el nervio $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ es isomorfo a K.
4. Sea K un complejo simplicial y X un espacio topológico. Probar que una función $f : |K| \to X$ es continua si y sólo si la restricción $f| : |K^n| \to X$ a cada esqueleto es continua.
5. Sea K un complejo simplicial. Probar que $|K|$ es conexo si y sólo si para cada par de vértices $v, w \in K$ existe una sucesión $v = v_0, v_1, \dots, v_r = w$ de vértices tal que $v_i v_{i+1} \in K$ para todo i.
6. Probar que todo poliedro conexo tiene un revestimiento universal.
7. Probar que los revestimientos de poliedros son poliedros.
8. Sean K y L complejos simpliciales y sea $\varphi : K \to L$ un aproximación simplicial de una función continua $f : |K| \to |L|$. Probar que $f(\overset{\circ}{\mathrm{st}}(v)) \subseteq \overset{\circ}{\mathrm{st}}(\varphi(v))$ para todo $v \in K$.
9. Sean K y L complejos simpliciales finitos y $f : |K| \to |L|$ una función continua. Probar que para todo $\epsilon > 0$ existen subdivisiones $\widetilde{K}$ de K y $\widetilde{L}$ de L y un morfismo simplicial $\varphi : \widetilde{K} \to \widetilde{L}$ tal que $d(f(x), |\varphi|(x)) < \epsilon$ para todo $x \in |K|$, donde d denota a la métrica usual de $|L|$.
10. Hallar dos morfismos simpliciales con realizaciones homotópicas que no sean contiguos. ¿Existen morfismos simpliciales en diferentes clases de contigüidad que tengan realizaciones homotópicas?
11. Probar que dos aproximaciones simpliciales $K \to L$ de una misma función continua $|K| \to |L|$ son contiguas.
12. Sea X un conjunto. Decimos que un cubrimiento $\mathcal{V}$ de X *refina* a otro cubrimiento $\mathcal{U}$ si todo elemento de $\mathcal{V}$ está contenido en uno de $\mathcal{U}$. Una *proyección canónica* $\mathcal{N}(\mathcal{V}) \to \mathcal{N}(\mathcal{U})$ es una aplicación que elige para cada $V \in \mathcal{V}$ un elemento $\varphi(V) = U \in \mathcal{U}$ que contiene a V. Probar que toda proyección canónica es un morfismo simplicial y que dos proyecciones canónicas son contiguas.
13. Sea K un complejo simplicial finito. Probar que $H_0(K)$ es un grupo abeliano libre cuyo rango es el número de componentes conexas de $|K|$.
14. Calcular a mano los grupos de homología del borde del 3-simplex.
15. Si K_0 es un sucomplejo de un complejo K y L_0 es subcomplejo de L, un *morfismo (simplicial) de pares* $\varphi : (K, K_0) \to (L, L_0)$ es un morfismo simplicial $\varphi : K \to L$ que manda simplices de K_0 en simplices de L_0. Dos morfismos de pares $\varphi, \psi : (K, K_0) \to (L, L_0)$ se dicen *contiguos* si $\varphi, \psi : K \to L$ son contiguos y $\varphi|_{K_0}, \psi|_{K_0} : K_0 \to L_0$ son contiguos.

- Probar que si dos morfismos de pares $\varphi, \psi : (K, K_0) \to (L, L_0)$ cumplen que $\varphi, \psi : K \to L$ son contiguos y L_0 es subcomplejo pleno de L, entonces los morfismos de pares son contiguos.
- Probar que si dos morfismos de pares $\varphi, \psi : (K, K_0) \to (L, L_0)$ son contiguos entonces inducen morfismos de complejos $C_*(K, K_0) \to C_*(L, L_0)$ homotópicos.

16. Sea K un complejo simplicial finito y no vacío. Probar que $\widetilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}$ es isomorfo a $H_0(K)$.

17. Probar que si un complejo simplicial K es unión de dos subcomplejos L y M, se tiene una sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \to C_*(L \cap M) \to C_*(L) \oplus C_*(M) \to C_*(K) \to 0$$

y por lo tanto se tiene una sucesión de Mayer-Vietoris para la homología simplicial. También se tiene una sucesión análoga para homología reducida.

18. Sea σ un 1-simplex, $\dot{\sigma}$ su borde, K un complejo simplicial y $\dot{\sigma}K$ el join de ambos (la *suspensión* de K). Probar, usando la sucesión de Mayer-Vietoris, que $\widetilde{H}_n(\dot{\sigma}K) = \widetilde{H}_{n-1}(K)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

19. Sea K un complejo simplicial y sea K' su subdivisión baricéntrica. Sea $\lambda : \widetilde{C}_*(K) \to \widetilde{C}_*(K')$ el operador subdivisión. Probar que si $\varphi : K' \to K$ es una aproximación de la identidad entonces $\varphi_*\lambda : \widetilde{C}_*(K) \to \widetilde{C}_*(K)$ es la identidad.

20. Sea X un poliedro compacto. Probar que toda función continua $f : X \to X$ null homotópica tiene un punto fijo.

21. Probar que el Teorema de Lefschetz sigue siendo válido para retractos de poliedros compactos.