Combinatoria

Primer cuatrimestre - 2018

Práctica 2

---

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de números enteros definida por $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + n$ para $n \geqslant 0$. Calcular el término general a_n.

2. Sean $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$. Probar que $(1+X)^\lambda (1+X)^\gamma = (1+X)^{\lambda+\gamma} \in \mathbb{C}[[X]]$.

3. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Consideramos el conjunto A_n de palabras con n letras a y n letras b que tienen la siguiente propiedad: para cada $1 \leqslant m \leqslant 2n$, la subpalabra formada por las primeras m letras contiene una cantidad de letras a mayor o igual a la cantidad de letras b. Por ejemplo, para $n = 2$ hay dos de estas palabras: $abab$ y $aabb$. El número de *Catalan* C_n se define como el cardinal de A_n.

   Calcular C_n para cada $n \geqslant 0$.

   (En caso de no lograr resolver el ejercicio, se pueden seguir los siguientes pasos: 1. Encontrar una fórmula recursiva para los números C_n, 2. Probar que la función generatriz f de $(C_n)_{n\geqslant 0}$ satisface la ecuación $f = 1 + Xf^2$ y luego $g = Xf$ satisface $g = g^2 + X$, 3. Hallar g y calcular sus coeficientes, 4. Sólo al final de la resolución verificar que se obtuvo $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.)

4. Probar que la función generatriz exponencial de los números de Bell es $e^{e^X - 1}$.

5. Probar que los números de Bell satisfacen la igualdad $b(n+1) = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b(i)$.

6. Sea $(a_n)_{\mathbb{N}_0}$ la sucesión de racionales definida por $a_0 = 2, a_1 = 3, (n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0$. Calcular el término general.

7. Sea $(a_n)_{\mathbb{N}_0}$ la sucesión de reales definida por $a_0 = a_1 = e, a_{n+2} = \frac{2a_n + a_{n+1}}{n+2}$. Calcular la función generatriz de la sucesión.

8. Una *involución* de $[n]$ es una permutación que al cuadrado da la identidad. Calcular la función generatriz exponencial de la sucesión dada por la cantidad de involuciones de $[n]$.

9. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de enteros definida por $a_1 = 1$, $a_{2n} = a_n$, $a_{2n+1} = a_n + a_{n+1}$. Sea $f(X) = \sum\limits_{n\geqslant 1} a_n X^{n-1} \in \mathbb{C}[[X]]$. Probar que $f(X) = (1 + X + X^2) f(X^2)$. Dar una definición para el producto infinito $g(X) = \prod\limits_{i\geqslant 0} (1 + X^{2^i} + X^{2^{i+1}})$ y probar que $f(X) = g(X)$.

10. Una *partición* de n es una descomposición $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$ con $a_i \in \mathbb{N}$. Dos particiones se consideran iguales si difieren sólo en el orden de los sumandos. Por ejemplo, 3 tiene tres particiones: $3, 2+1, 1+1+1$. Notar que este concepto es distinto al de las particiones de $[n]$ y al de las composiciones de n. Sea $p(n)$ la cantidad de particiones de n.

    (a) Probar que la función generatriz de $p(n)$ es el producto infinito $\prod\limits_{i\geqslant 1} \frac{1}{1-x^i}$.

    (b) Probar que la cantidad de particiones de n con todas las partes (sumandos) impares es igual que la cantidad de particiones de n con todas las partes distintas.

11. Probar que el número de particiones de n en k partes es igual al número de particiones de n cuya parte más grande es k.

    Sugerencia: pensar este como un ejercicio de la práctica anterior.

12. Una *inversión* en una permutación $f : [n] \to [n]$ es un par $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tal que $f(i) > f(j)$. Denotamos $b(n, k)$ al número de permutaciones de $[n]$ con k inversiones. Calcular la función generatriz de $(b(n, k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ para cada n.

13. Ana y Beatriz eligen n enteros positivos distintos cada una. Los n números elegidos por Ana no son exactamente los n elegidos por Beatriz. Ana considera las sumas de cada par de números de los suyos (quizá ambos iguales) obteniendo así $\binom{n}{2} + n$ números. Beatriz hace lo mismo y ambas obtienen los mismos números, contados con multiplicidad. Probar que n es una potencia de 2.