Combinatoria

Primer cuatrimestre - 2018

Práctica 1

---

1. En cuántos anagramas de la palabra AAABBBCCDE
   (a) las letras D y E aparecen juntas?
   (b) la letra D está a la izquierda de (quizá no junto a) la letra E?
   (c) las dos C no están juntas?
   (d) las vocales aparecen todas juntas?
2. De cuántas maneras se pueden distribuir 12 bolitas indistinguibles en 5 cajas de modo tal que
   (a) ninguna caja quede vacía?
   (b) exactamente dos cajas queden vacías?
   (c) a lo sumo dos cajas queden vacías?
3. Sea $n \in \mathbb{N}$. Cuántas cuaternas (a, b, c, d) de enteros no negativos hay tales que
   (a) $a + b + c + d = n$.
   (b) $a + b + c + d = n$ y $a, b, c, d \geqslant 1$.
   (c) $a + b + c + d \leqslant n$.
4. Dar demostraciones combinatorias de las siguientes igualdades en donde $n, m, k \in \mathbb{N}_0$
   - $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$.
   - $2\binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$.
   - $\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{n+m+1}{n}$.
5. Cuántas matrices de $n \times m$ cuyos coeficientes son todos 0 y 1 hay tales que cada fila y cada columna tiene una cantidad impar de unos.
6. Dar una demostración combinatoria de lo siguiente: si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\binom{3n}{n,n,n}$ es múltiplo de 6.
7. Dar una demostración combinatoria del Pequeño Teorema de Fermat: si $p \in \mathbb{N}$ es primo y $a \in \mathbb{N}$, entonces $a^p \equiv a(p)$. Es decir, hallar un conjunto de cardinal $a^p - a$ y probar que es unión disjunta de subconjuntos de cardinal p.
8. Dar una demostración combinatoria del Teorema de Wilson: si $p \in \mathbb{N}$ es primo entonces $p | (p-1)! - (p-1)$ (alternativamente puede buscarse demostraciones combinatorias de resultados equivalentes, como por ejemplo $p^2 | p! - p(p-1)$).
9. Probar que $\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ es inversible si y sólo si $a_0 \neq 0$. Y si cambiamos $\mathbb{C}$ por otro anillo?

10. Probar que la composición de series de potencias formales es una operación asociativa cuando está bien definida.

11. Probar que si $f \in \mathbb{C}[[X]]$ tiene coeficiente independiente nulo y coeficiente lineal no nulo, entonces existe $g \in \mathbb{C}[[X]]$ con las mismas características tal que $g \circ f = f \circ g = X$.

12. Se definen las series de potencias $cos(X) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} X^{2n}$ y $sin(X) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} X^{2n+1}$. Probar que $cos(X)^2 + sin(X)^2 = 1$ en $\mathbb{C}[[X]]$.

13. Dar una fórmula cerrada para el término general de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de números enteros definida por la recurrencia $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 12a_{n+1} + 8a_n$, donde $a_0 = -1, a_1 = -4, a_2 = -4$.

14. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ una sucesión cuya función generatriz es una función racional $\frac{P(X)}{Q(X)}$ con $Q(0) \neq 0$. Probar que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ satisface una recursión lineal.

15. Cuál es la probabilidad de que al arrojar cinco dados, la suma de los cinco números sea veinte?

16. Sea a_n la cantidad de cuaternas (a, b, c, d) de enteros no negativos tales que $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ y $a + b + c + d = n$. Sea f la función generatriz de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Probar que $(1 - X)(1 - X^2)(1 - X^3)(1 - X^4)f = 1$.