Combinatoria

Segundo cuatrimestre - 2025

Práctica 5

---

1. Sea G un grafo simple con $2n$ vértices, n^2 aristas y tal que no contiene ningún triángulo. Probar que $G \simeq K_{n,n}$.

2. Sea G un grafo simple con n vértices y e aristas. Probar que G tiene al menos $\frac{e}{3n}(4e - n^2)$ triángulos.

   Sugerencia: Dada una arista $\{v, w\}$, hay al menos $\deg(v) + \deg(w) - n$ triángulos que contienen a esa arista.

3. Probar que $M(n, p) \leqslant \frac{1}{2} n^2 \frac{p-2}{p-1}$.

   Sugerencia: $M(n, p) = \frac{1}{2}(n^2 - r(t + 1)^2 - (p - r - 1)t^2)$.

4. Sea G un grafo regular de grado r (es decir que todos los vértices tienen grado r). Probar que si $g(G) \geqslant 7$ entonces G tiene al menos $r^3 - r^2 + r + 1$ vértices.

5. Probar el Teorema de König a partir del Teorema de Dilworth.

6. Probar el Teorema de Dilworth a partir del Teorema de König. Sea P un poset finito y G el grafo bipartito con partes $W = P$ y $W' = P$ (disjuntadas) y aristas $\{w, w'\}$ si $w < w'$. Considerar un cubrimiento por vértices y un matching del mismo cardinal m. Usar el matching para cubrir P con $n - m$ cadenas y el cubrimiento por vértices para encontrar una anticadena de al menos $n - m$ elementos.

7. Sea $P = [2n]$ con el orden dado por la divisibilidad. Exhibir un cubrimiento de P por cadenas que tenga cardinal mínimo.

8. (a) Un grafo finito simple G se dice *perfecto* si cada subgrafo inducido H contiene un subgrafo completo con $\chi(H)$ vértices. El *grafo de comparabilidad* $G(P)$ de un poset P es el grafo que tiene como vértices a los puntos de P y como aristas a los pares de puntos comparables y distintos. Probar que $G(P)$ es un grafo perfecto.

   (b) El Teorema del grafo perfecto afirma que si G es perfecto, su complemento $\overline{G}$ también (las aristas de $\overline{G}$ son las no-aristas de G). Probar que este resultado junto con el Teorema de Mirsky implica el Teorema de Dilworth.

9. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_m$ subconjuntos distintos de $[n]$ tales que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para todo i, j. Probar que $m \leqslant 2^{n-1}$ y que la igualdad puede darse.

10. Sea m un entero libre de cuadrados. Cuál es la máxima cantidad de divisores de m que se pueden tomar si no hay uno que divida a otro?

11. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales mayores o iguales a 1 y sea $I = (r, r + 2) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Probar que de los 2^n números $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_i$ con $\epsilon_i \in \{1, -1\}$, hay a lo sumo $\binom{n}{[n/2]}$ que están en I.

12. Probar que el poset de partes de un conjunto finito tiene exactamente una o dos anticadenas de cardinal máximo.

13. Dar una demostración alternativa del Teorema de Sperner, viendo que en una anticadena con subconjuntos de cardinal menor a $[n/2]$ es posible agregar un elemento a cada subconjunto de cardinal mínimo y obtener una nueva anticadena.

14. Cuántos collares de 6 cuentas hay si disponemos de k tipos de cuentas?

15. Cuántos collares de 7 cuentas hay que tengan exactamente 3 rojas, 2 azules y 2 verdes? (la respuesta es 18).

16. Sean $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ tales que $l_1 + l_2$ es un primo impar. Probar que el número de collares con exactamente l_1 cuentas rojas y l_2 azules es

$$\frac{1}{2(l_1+l_2)}\binom{l_1+l_2}{l_1} + \frac{1}{2}\binom{\frac{l_1+l_2-1}{2}}{[l_1/2]}.$$

17. De cuántas formas se pueden pintar las caras de un tetraedro regular con k colores? y de un cubo o un octaedro? Calcular los números $o_j(g)$ en cada caso y el polinomio de Polya para $k=3$.

18. Cuántos (tipos de isomorfismo) de grafos con 5 vértices hay? (la respuesta es 34).

19. (*) Probar que para todo grupo finito H existe un poset cuyo grupo de automorfismos es isomorfo a H.