Combinatoria

Segundo cuatrimestre - 2025

Práctica 4

---

1. Sea S un conjunto de 100 elementos y sean $A_1, A_2, \dots, A_{50}$ subconjuntos de S con 40 elementos cada uno. Probar que existe $x \in S$ tal que x está en por lo menos 20 de los A_i.

2. En una cuadrícula de 2×6 se pinta cada vértice de rojo o azul. Probar que existen cuatro vértices del mismo color que son los vértices de un rectángulo con sus lados paralelos a los de la cuadrícula.

3. Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ números enteros. Probar que existen $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$ tales que $a_k + a_{k+1} + \dots + a_l$ es múltiplo de n.

4. Probar que al considerar 101 números enteros entre 1 y 200, hay siempre dos de ellos tales que uno divide al otro.

5. Se tienen dos discos, cada uno dividido en 200 sectores congruentes. En un disco se pintan 100 sectores de rojo y 100 de azul. En el otro se pintan algunos de rojo y otros de azul. Probar que es posible poner un disco sobre el otro de modo que los sectores de uno coincidan con los del otro y que haya al menos 100 sectores de uno con el mismo color que los correspondientes del otro.

6. Probar que $R(3,4) = R(3,4;2) = 9$.

7. Sea $m \in \mathbb{N}$. Probar que existe $n \in \mathbb{N}$ con la siguiente propiedad: toda matriz $M \in \{0,1\}^{n \times n}$ de $n \times n$ de ceros y unos contiene una submatriz principal de $m \times m$ (es decir, una submatriz que se obtiene eliminando $n - m$ filas de M y las mismas columnas) que tiene todos los números bajo la diagonal iguales y todos los números sobre la diagonal iguales.

8. (i) Probar que $R(3,3,3;2) \leqslant 17$.

   (ii) Si notamos $R_n = R(3,3,\dots,3;2)$ (donde hay n números 3), probar que $R_n \leqslant 3n!$.

9. Probar que el n-ésimo número de Schur cumple $S(n) \geqslant \frac{3^n+1}{2}$. Para esto pruebe primero que si los elementos de $[k]$ pueden pintarse con n colores de modo que no haya soluciones monocromáticas de $x+y=z$, entonces $[3k+1]$ puede pintarse con $n+1$ colores, pintando $[k]$ y $[2k+2,\dots,3k+1]$ como antes y los demás elementos con el nuevo color.

10. Sea $m \in \mathbb{N}$. Probar que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que toda coloración de los elementos de $[k]$ con m colores tiene una solución monocromática a la ecuación $x + y + z = w$.

11. Sean $k, l \in \mathbb{N}$. Queremos calcular el máximo $n = n(k,l)$ que cumple la siguiente propiedad: existen conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$ tales que

    (i) Cada A_i tiene cardinal k y cada B_i tiene cardinal l.

    (ii) $A_i \cap B_i = \emptyset$ para cada i.

    (iii) $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ si $i \neq j$.

    Usaremos el método probabilístico para calcular n.

    (a) Probar que $n \geqslant \binom{k+l}{k}$ exhibiendo un ejemplo.

    (b) Probar que si existen A_i, B_i como arriba entonces $n \leqslant \binom{k+l}{k}$. Para esto, definir $X = \bigcup A_i \cup \bigcup B_i$. Elegir un orden total en los elementos de X equiprobablemente. Sea E_i el evento "en el orden total elegido todos los elementos de A_i están antes que todos los elementos de B_i". Calcular la probabilidad del evento $\bigcup E_i$.