Combinatoria

Segundo cuatrimestre - 2025

Práctica 3

---

1. Sea P una cadena de n elementos. Calcular la función de Möbius $\mu \in \mathcal{A}(P)$.

2. Sea $f : P \to Q$ un isomorfismo de posets finitos. Probar que para cualesquiera $a, b \in P$ vale $\mu_P(a, b) = \mu_Q(f(a), f(b))$.

3. Sean P, Q posets finitos. Se define el poset producto $P \times Q$ cuyo conjunto subyacente es el producto cartesiano y donde $(a, a') \leqslant (b, b')$ si $a \leqslant b$ y $a' \leqslant b'$. Probar que $\mu_{P\times Q}((a, a'), (b, b')) = \mu_P(a, b)\mu_Q(a', b')$. Usar este resultado para calcular de manera alternativa la función de Möbius en el poset $P = [n]$ con el orden dado por la divisibilidad y en el poset $P = \mathcal{P}(S)$ de partes de un conjunto finito S.

4. Para quienes tengan algún conocimiento sobre extensiones de cuerpos: Sea F_q el cuerpo de q elementos. Sea $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Probar que $X^{q^n} - X \in F_q[X]$ es el producto de todos los polinomios mónicos irreducibles de $F_q[X]$ de grado un divisor de n. Deducir que $q^n = \sum\limits_{d|n} d f_q(d)$, donde $f_q(d)$ es la cantidad de polinomios mónicos irreducibles en $F_q[X]$ de grado d.

   (b) Deducir que $f_q(d) = \frac{1}{n} \sum\limits_{d|n} \widetilde{\mu}(d) q^{n/d}$.

   (c) Cuántos polinomios irreducibles mónicos de grado 6 hay sobre $\mathbb{Z}_2$?

5. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple finito. Sea $q \in \mathbb{N}$. Un *coloreo* de G con q colores es una función $c : V \to [q]$ que a vértices adyacentes asigna valores distintos. Probar que la cantidad de colores de G con q colores es un polinomio P_G, que no depende de q, evaluado en q.

   Sugerencia: Dada $e = (a, b) \in E$, considerar el conjunto A_e de funciones $c : V \to [q]$ tales que $c(a) = c(b)$. Calcular el cardinal de la unión de los A_e.

6. Basado en el juego Screaming toes: n personas están paradas en círculo. Cada una mira a los pies de una de las demás $n-1$ personas. Elige entre esas personas con igual probabilidad. A la cuenta de tres todas las personas suben la mirada hasta los ojos que corresponden a los pies elegidos. Si dos personas se miran simultáneamente, deben gritar. Probar que la probabilidad de que haya al menos un grito es
$$\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^{k+1} n!}{(n-1)^{2k}(n-2k)!2^k k!}$$

7. Sea G un grafo finito simple con más de un vértice. Probar que G tiene dos vértices con el mismo grado.

8. Sea G un grafo que no es un bosque. Probar que $g(G) \leqslant 2\mathrm{diam}(G) + 1$.

9. Probar que los vértices de todo grafo finito simple conexo G pueden ser numerados $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de modo tal que $G[v_1, v_2, \ldots, v_i]$ sea conexo para todo $1 \leqslant i \leqslant n$.

10. Sea T un grafo finito simple. Probar que las siguientes son equivalentes:
    (a) T es un árbol.
    (b) Cualesquiera dos vértices de T pueden unirse por un único camino.
    (c) T es conexo, pero al quitar cualquier arista se desconecta.
    (d) T no tiene ciclos, pero al agregar una arista cualquiera aparecen ciclos.
11. Sea G un grafo finito simple conexo. Probar que la cantidad de vértices de G es por lo menos $\frac{\operatorname{diam}(G)\delta(G)}{3}$.
12. Sea T un árbol finito. Probar que todo automorfismo de T (isomorfismo $T \to T$) deja fijo un vértice o una arista.
13. Sea G un grafo finito simple con vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$. La *matriz de adyacencia* $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ de G se define por $A_{ij} = 1$ si $v_iv_j \in E$, $A_{ij} = 0$ si no. Probar que $(A^k)_{ij}$ es el número de caminatas de v_i a v_j de longitud k.
14. Sea G un grafo finito simple de $n > 3$ vértices tal que para cualesquiera dos vértices no adyacentes v, w vale $\deg(v) + \deg(w) > n$. Probar que G tiene un ciclo Hamiltoniano.
15. Sea $M \in \{0,1\}^{n\times m}$ una matriz de n por m de ceros y unos. Usaremos el término línea para referirnos a una fila o a una columna de M. Probar que el mínimo número de líneas que contienen a todos los unos de M es igual al máximo número de unos que puden elegirse de modo que no haya dos en la misma línea.
16. Se mezclan las cartas de un mazo de cartas de truco y se arman diez pilas de cuatro cartas cada una. Probar que es posible tomar una carta de cada pila de modo que las diez cartas elegidas tengan todas números distintos. (Recordar que las cartas de truco son 40, con números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12$ y hay cuatro cartas con cada número).
17. (*) Hallar un grafo cuyo grupo de automorfismos sea isomorfo a $\mathbb{Z}_3$. Probar que para todo grupo finito H existe un grafo cuyo grupo de automorfismos es isomorfo a H.