

Teoría Geométrica de la Medida

Ejercicios

Ejercicio 18: (Clase 9, 15/05)

Sea

$$D(A, B) = \sup \{d(x, B) : x \in A\}$$

y

$$\tilde{d}_H = \max \{D(A, B), D(B, A)\},$$

probar que

$$\tilde{d}_H = d_H,$$

donde d_H es la métrica Hausdorff, definida por

$$d_H(A, B) = \inf \{\varepsilon > 0 : A \subseteq B^\varepsilon \text{ y } B \subseteq A^\varepsilon\}.$$

Ejercicio 19: (Clase 9, 15/05)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\psi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz, es decir, existe $C > 0$ tal que $\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq C\|x - y\| \forall x, y \in A$.

Probar que para cada $s > 0$ se tiene que

$$h^s(\psi(A)) \leq C^s h^s(A),$$

y en particular

$$\dim_H(\psi(A)) \leq \dim_H(A).$$

Ejercicio 20: (Clase 9, 15/05)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\psi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función que satisface lo siguiente: existe $\alpha \in (0, 1]$ tal que $\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq C\|x - y\|^\alpha \forall x, y \in A$.

Probar que bajo estas condiciones,

$$\dim_H(\psi(A)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(A).$$

Ejercicio 21: (Clase 10, 17/05)

Sea $\phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, con $\varphi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ contractivas. Probar:

- (a) Si existe $B \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $\phi(B) \subseteq B$, entonces $A_\phi \subseteq B$.
- (b) Si existe $B \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $\phi(B) \supseteq B$, entonces $A_\phi \supseteq B$.

Ejercicio 22: (Clase 10, 17/05)

(Teorema de Selección de Blaschcke)

Sea \mathcal{C} una clase infinita de compactos no vacíos de \mathbb{R}^d , uniformemente cotada. Es decir, existe un conjunto acotado $B \subseteq \mathbb{R}^d$, tal que $C \subseteq B$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Demostrar que existe una sucesión $\{C_n\}_n \in \mathcal{C}$, con $C_n \neq C_m$ si $n \neq m$, y un compacto no vacío C (que no necesariamente pertenece a \mathcal{C}), tal que la sucesión converge a C en la distancia Hausdorff.