Análisis Armónico - Parte I
Práctica 2

1. Sea f definida sobre (X,μ) con valores en $\mathbb{C}$. La función "reordenada decreciente" se define por
$$f^*(t) = \text{ínf}\{s > 0 : d_f(s) \leq t\}$$
Probar que si f es μ-medible entonces
   a) f^* es continua a derecha en $[0, +\infty)$
   b) $\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty (f^*(t))^p dt \quad , \quad 0 < p < +\infty$
   c) $\|f\|_{L^\infty} = f^*(0)$
   d) $\sup_{t>0} t^s f^*(t) = \sup_{\alpha>0} d_f(\alpha)^s \alpha \quad , \quad 0 < s < +\infty$
   e) 1) Si $g \geq 0$ medible simple en (X,μ) y $A \subset X$ es un conjunto medible, probar que
   $$\int_A g \, d\mu \leq \int_0^{\mu(A)} g^*(t)dt$$
   2) Si f, g son medibles en (X,μ) entonces
   $$\int_X |fg| d\mu \leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt$$

2. Extender el teorema de Marcinkiewicz al caso en que T es cuasilineal.

3. Sea $\{T_t\}$ una familia de operadores lineales en $L^p(X,\mu)$ y
$$T^*(f)(x) = \sup_t \{|T_t(f)(x)|\}.$$
Probar que si T^* es de tipo débil (p,q) entonces
$$\{f \in L^p(X,\mu) : \lim_{t\to t_0} T_t(f)(x) \text{ existe a. e.}\}$$
es cerrado en $L^p(X,\mu)$.

4. Sean $\tilde{M}_c$ y $\tilde{M}$ las maximales centrada y no centrada respectivamente usando cubos en vez de bolas. Probar que
$$\frac{2^n}{v_n \sqrt{n}^n} \leq \frac{Mf}{\tilde{M}f} \leq \frac{2^n}{v_n}$$
Lo mismo vale para $\frac{M_c f}{\tilde{M}_c f}$. Concluir que $\tilde{M}_c$ y $\tilde{M}$ son débiles $(1,1)$ y fuertes (p,p) para $1 < p \leq \infty$

5. *a*) Calcular $\tilde{M}_c f$ para $f(x) = \chi_{\mathcal{Q}}(x)$ donde $\mathcal{Q}$ es un cuadrado en el plano.

   b) Comparar $\{\tilde{M}_c \chi_{\mathcal{Q}} > \varepsilon\}$ con $\mathcal{Q}^\varepsilon = \{x : \operatorname{dist}(x, \mathcal{Q}) < \varepsilon\}$.

   c) Lo mismo que a) y b) para χ_E donde $E = \{x : \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\}$.

6. Sea $\mathcal{R}_x$ la familia de rectángulos de lados paralelos a los ejes coordenados que contienen a x. Se define la función maximal

$$M_S f(x) := \sup_{R \in \mathcal{R}_x} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy$$

   Probar que

   a) $M_S(L^p) \subseteq L^p$ para $1 < p < +\infty$

   b) M_S no es débil $(1, 1)$

7. El lema de Riemann-Lebesgue no es válido en general para medidas en $\mathbb{T}$.

   a) Mostrar que δ_0 no satisface R-L.

   b) Si μ es la medida de Cantor, probar que

$$\hat{\mu}(n) = \prod_{k=1}^{+\infty} \cos(\frac{2\pi n}{3^k})$$

   en particular $\hat{\mu}(3^m) = \hat{\mu}(1)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ Concluir que no satisface R-L.

8. Probar que la desigualdad de Hausdorff-Young no es reversible. Es decir, si $1 \leq p < 2$, no existe ninguna constante $C > 0$ tal que

$$\|\hat{f}\|_p \leq C\|f\|_{p'}$$

   Sugerencia: Considerar primero $n = 1$ y $f_\lambda(x) = \phi(x)e^{-\pi i \lambda x^2}$ con $\phi \in C_0^\infty$.

9. Sea Ω una función integrable sobre la esfera unidad tal que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(x') d\sigma(x') = 0$$

   Se define la aplicación T

$$T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} \varphi(x) dx$$

   para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donde $x' = \frac{x}{|x|}$. Probar que T define un distribución temperada en $\mathbb{R}^n$. ¿Qué es T en $n = 1$?