1^{er} cuatrimestre 2010

Análisis Armónico - Parte I
Práctica 1

1. *a)* Mostrar que la función

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   está en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

   b) Construir una función en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ soportada en la bola unitaria.

   c) Igual que (b) pero en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. *a)* Probar que $\mathrm{sop}(f * g) \subset \mathrm{sop}(f) + \mathrm{sop}(g)$ cuando alguna de las dos funciones es de soporte compacto. ¿Qué se puede decir si ninguna de las dos funciones es de soporte compacto?

   b) Sean G_1, G_2 abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que G_1 es acotado y $\overline{G_1} \subset G_2$. Construir $h \in \mathcal{C}_0^\infty$ tal que $h \equiv 1$ en G_1 y $h \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus G_2$.

3. Sea $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} k(x)dx = 1$. Se define, para $\varepsilon > 0$, $k_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}k(\frac{x}{\varepsilon})$. Probar que

   a) $\int_{\mathbb{R}^n} k_\varepsilon(x)dx = 1$ para todo $\varepsilon > 0$

   b) $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\delta} k_\varepsilon(x)dx = 0$ para todo $\delta > 0$.

4. Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y k una función acotada y uniformemente continua. Probar que $f * k_\varepsilon$ es acotada y uniformemente continua.

5. *a)* Sea $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} k(x)dx = 1$ y $k(x) = o(|x|^{-n})$ cuando $|x| \to \infty$. Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\lim_{\varepsilon\to 0}(f * k_\varepsilon)(x) = f(x)$ en cada punto de continuidad de f.

   b) Probar que si

$$F(x, w) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 wx}{wx^2}$$

   con $w > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{w\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int f(x - t)F(t, w)dt = f(x)$$

   en cada punto de continuidad de $f \in L^1(\mathbb{R})$. Sugerencia: Ver a) anterior.

c) Ídem b) para

$$P(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2+x^2}$$

6. *a*) Sea $0 < p < 1$, $f, g \in L^p$. Probar que

$$\|f+g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)$$

Sugerencias: Usar que $1+t^p \geq (1+t)^p$ si $t \geq 0$ para probar que $\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$. Considerar luego la función $\phi(t) = (1+t^{\frac{1}{p}})(1+t)^{-\frac{1}{p}}$, que tiene un mínimo en $t=1$.

b) Para $1 \leq p \leq +\infty$ probar la desigualdad triangular generalizada - o desigualdad integral de Minkowski: Sean (X,μ) e (Y,ν) espacios de medida, y sea $F : X \times Y \to \mathcal{C}$ medible. Probar que

$$\left[\int_Y \left(\int_X |F(x,y)| d\mu(x)\right)^p d\nu(y)\right]^{1/p} \leq \int_X \left(\int_Y |F(x,y)|^p d\nu(y)\right)^{1/p} d\mu(x),$$

con las obvias modificaciones para $p = +\infty$.

7. *a*) Probar la siguiente desigualdad generalizada de Hölder: Sean $0 < p, p_1, .., p_k \leq +\infty$ con $k \geq 2$ tales que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + .. + \frac{1}{p_k}$. Dadas funciones $f_1, ...f_k$ tales que $f_j \in L^{p_j}(X,\mu)$ vale que

$$\|f_1 ... f_k\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} ... \|f\|_{L^{p_k}}$$

b) Si $p_j < \infty$ para todo j y vale la igualdad en (a) entonces existen constantes $c_1, ..., c_k$, $c_j \geq 0$ tales que

$$c_1|f_1|^{p_1} = ... = c_k|f_k|^{p_k}$$

c) Sea $r < 0$ y $g > 0$ a.e. Si $\|g^{-1}\|_{L^{|r|}} < \infty$, se define

$$\|g\|_{L^r} := \|g^{-1}\|_{L^{|r|}}^{-1}$$

Sea $0 < q < 1$ y p tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Probar que si $f > 0$ y $g > 0$ en casi todo punto entonces

$$\|fg\|_1 \geq \|f\|_p \|g\|_q$$

8. Sea $f \in L^p(X,\mu)$ con $\mu(X) = 1$ para algún $p > 0$. Entonces

$$\lim_{p \to 0^+} \|f\|_p = \exp\left(\int_X \log(|f(x)|) d\mu(x)\right)$$

con la interpretación: $e^{-\infty} = 0$.

Sugerencias:

a) Usar la desigualdad de Jensen para probar que $\log \|f\|_q \geq \int_X \log(|f|) d\mu$.

b) Probar que $\log \|f\|_q \leq \int_X (\frac{|f|^q - 1}{q}) d\mu$

c) Probar que $\lim_{q \to 0} \int_X (\frac{|f|^q - 1}{q}) d\mu = \int_X \log(|f|) d\mu$