

Teorema de restricción de Stein-Tomas

Ezequiel Rela

Mar del Plata - Agosto 2010

1. Introducción

El objetivo de estas notas es estudiar la posibilidad de restringir la transformada de Fourier de una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ a una hipersuperficie compacta suave de \mathbb{R}^n . Es sabido que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ su transformada de Fourier \widehat{f} es continua y puede ser restringida a cualquier subconjunto del espacio. Por otro lado, si sólo sabemos que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la transformada \widehat{f} puede ser cualquier función de $L^2(\mathbb{R}^n)$, por lo que no tiene sentido restringirla a conjuntos de medida cero. De todos modos, el problema puede formularse correctamente en el siguiente sentido.

Dada una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, de modo que tiene sentido pensar en \widehat{f} restringida a \mathbb{S}^{n-1} . Consideramos el operador

$$\begin{aligned} R : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^q(\mathbb{S}^{n-1}) \\ f &\mapsto \widehat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}} \end{aligned}$$

Si este operador resulta acotado, entonces se puede extender por densidad a todo L^p y darle sentido a la restricción de \widehat{f} . El objetivo entonces es ver si existe una constante $C > 0$ tal que para toda función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ valga

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\widehat{f}(\omega)|^q d\sigma \leq C \|f\|_p^q.$$

En ese caso se tiene un teorema de restricción con exponentes (p, q) y vamos a decir que vale $R(p \rightarrow q)$. Para referirnos a una superficie S en particular, vamos a notar $R_S(p \rightarrow q)$.

En estas notas se estudia la posibilidad de obtener un teorema de restricción de la transformada de Fourier para una medida μ soportada en un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Un teorema clásico de Stein-Tomas afirma que esto es posible en el caso en que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es una hipersuperficie suave con curvatura no nula en cada punto y μ es la medida de superficie ([Ste93, Tom75]). En [Moc00], Mockenhaupt se reproduce la prueba de Stein-Tomas para el caso unidimensional reemplazando la hipótesis de curvatura (que no tiene sentido en \mathbb{R}) por una condición de decaimiento para $\widehat{\mu}$ (que es lo que realmente se

usa en el trabajo original de ST: cuanto más “plana” es la hipersuperficie, menos decae $\widehat{\mu}$ (ver también [Mit02]). Referencias clásicas en el tema son [Tao04], [Wol03]. [Gra04].

Adelantándonos al final de esta charla, podemos resumir las condiciones sobre el subconjunto E que van a ser relevantes para obtener un teorema de restricción. En primer lugar, notamos que lo que debe considerarse es el par (E, μ) donde E es el conjunto y μ es una medida soportada en E . Las dos hipótesis sobre μ que vamos a considerar son:

- (Dimensión de Fourier de E) Para un cierto $\beta > 0$,

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\beta/2}. \quad (1)$$

- (Dimensión de Hausdorff de E) Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\mu(B(x, r)) \sim r^\alpha. \quad (2)$$

Observación 1.0.1 *El lema de Frostman dice que la condición (2) dice precisamente que la dimensión de Hausdorff de E es al menos α . La condición (1) dice que la dimensión de Fourier, definida como*

$$\dim_F(E) = \sup\{\beta > 0 : \exists \mu \in \mathcal{P}(E); \widehat{\mu}(\xi) \leq C|\xi|^{-\beta/2}\}, \quad (3)$$

debe satisfacer $\dim_F(E) \geq \beta$.

Se puede probar que si μ es una medida de soporte compacto en \mathbb{R}^n que satisface (1), entonces $\dim_H(\text{spt}(\mu)) \geq \beta$. Por lo tanto, para una medida $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, hay un decaimiento máximo posible para su transformada de Fourier relacionada con el tamaño de su soporte. Volveremos sobre esto en la Sección 7.

Notemos que en el caso de la esfera, se tiene que

$$\mu(B(x, r)) \sim r^{n-1}$$

para cada $x \in E$. Por otro lado, calcularemos explícitamente (Teorema 5.2.3) la transformada de la medida μ y obtendremos que $|\widehat{\mu}(\xi)| \lesssim |\xi|^{\frac{n-1}{2}}$

Para el caso $n = 1$, lo natural es trabajar con medidas soportadas en conjuntos de dimensión menor a uno y que satisfacen una relación del tipo

$$\mu(B(x, r)) \sim r^\alpha \quad (4)$$

para cada $x \in E$. Más aún, se pueden considerar conjuntos h -dimensionales y medidas que satisfagan la relación

$$\mu(B(x, r)) \sim h(r)$$

para alguna función de dimensión h (cóncava, no decreciente, que se anule en el origen)

1.1. Superficies compactas

Una observación útil que hacemos es la siguiente. Si $B \in \mathbb{R}^n$ es un compacto, entonces

$$L^r(B) \subset L^q(B) \subset L^1(B). \quad (5)$$

Esto se refleja en una desigualdad de normas:

$$\|f\|_{L^q(B)} \leq C \|f\|_{L^r(B)}, \quad \text{si } q \leq r.$$

Si aplicamos Hölder con exponentes $p = \frac{r}{q}, p' = (\frac{r}{q})' = \frac{1}{1-\frac{q}{r}} = \frac{r}{r-q}$ queda

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^q(B)}^q &= \int_B |f|^q dx \leq \left(\int_B |f|^r dx \right)^{\frac{q}{r}} \left(\int_B 1^{\frac{r}{r-q}} dx \right)^{\frac{r-q}{r}} \\ &= \|f\|_{L^r(B)}^q |B|^{\frac{r-q}{r}}. \end{aligned}$$

Entonces queda

$$\|f\|_{L^q(B)} \leq |B|^{\frac{r-q}{rq}} \|f\|_{L^r(B)}. \quad (6)$$

Con esto vemos que si S es compacto, $R_S(p \rightarrow r) \Rightarrow R_S(p \rightarrow q)$ cada vez que $q \leq r$. Si vale $R_S(p \rightarrow r)$, entonces

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(S)} \leq \sigma(S)^{\frac{r-q}{rq}} \|\widehat{f}\|_{L^r(S)} \leq \sigma(S)^{\frac{r-q}{rq}} C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (7)$$

1.2. Algunos casos triviales

1. Siempre vale $R(1 \rightarrow q)$, pues

$$\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1 \quad (8)$$

2. Nunca vale $R(2 \rightarrow q)$. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{f}(\xi) = 1$ para $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ y cero en otro caso. Entonces $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2 = 0$ pero $\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \sim 1$

2. Técnicas

2.1. Resultados elementales:

- $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$
- Plancherel: $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$
- Hausdorff-Young: $(1 \leq p \leq 2) \|\widehat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$
- Young: Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$ y r es tal que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ entonces

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (9)$$

Proposición 2.1.1 Sea $T : L^2 \rightarrow L^2$ definido como $Tf = f * K$. Entonces $\|T\| = \|\widehat{K}\|_\infty$.

Teorema 2.1.2 (Parseval para medidas) Sean μ, ν medidas finitas en \mathbb{R}^n . Vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\mu}(\omega) d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\nu}(\omega) d\mu \quad (10)$$

Proposición 2.1.3 Sea $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\widehat{\phi\check{\mu}} = \widehat{\phi} * \mu$. Notar que esto nos dice que $\widehat{\phi} * \mu$ es una función.

Demostración: Notemos primero que $\widehat{\mu}$ es C^∞ y está acotada. Entonces $\phi\check{\mu} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Basta probar que para toda $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\phi} * \mu)(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \widehat{\mu}(-x) \widehat{\psi}(x) dx$$

Pongamos $T(x) = -x$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \widehat{\mu}(-x) \widehat{\psi}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(-x) \widehat{\mu}(x) \widehat{\psi}(-x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\phi\widehat{\psi} \circ T)(x) \widehat{\mu}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(\phi\widehat{\psi} \circ T)}(\xi) d\mu(\xi) \quad \text{Parseval (10)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(\phi \circ T * \widehat{\psi} \circ T)}(\xi) d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(\check{\phi} * \psi)}(\xi) d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\omega) \widehat{\phi}(\omega - \xi) d\omega d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\omega) (\widehat{\phi} * \mu)(\omega) d\omega \end{aligned}$$

■

2.2. Interpolación

Teorema 2.2.1 (M. Riesz-Thorin) Sean p_0, p_1, q_0, q_1 tales que

$$1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty \quad (11)$$

y para $0 < \theta < 1$, definamos p y q como

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Si T es un operador lineal de $L^{p_0} + L^{p_1}$ en $L^{q_0} + L^{q_1}$ tal que

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0} \quad \text{para } f \in L^{p_0}$$

$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1} \quad \text{para } f \in L^{p_1}$$

entonces

$$\|Tf\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p \quad \text{para } f \in L^p$$

Este teorema dice que dado un par de acotaciones $(p_0, q_0), (p_1, q_1)$, se tiene la acotación para cualquier par (p, q) que caiga en el segmento que une $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0})$ con $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1})$.

Como consecuencia de (7), (8) y este último teorema, tenemos que cada par de exponentes (r, s) nos da gratis toda una región como la que muestra el dibujo.

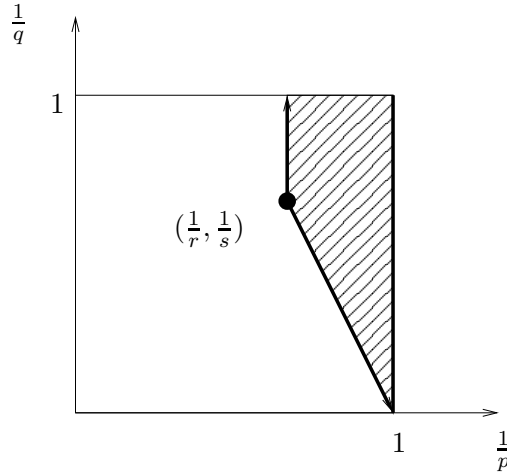


Figura 1: Interpolación

2.3. Problemas relacionados

1. Restricción a curvas en \mathbb{R}^n : [BLL07], [BOS08]. [BOS09]. En \mathbb{R}^3 : [BO03].
2. Superficies con cierta estructura en \mathbb{R}^n : [BL04]. Resultados “locales”: [FGU04, FU08, FU09].

3. Formulación dual: problema de extensión

Supongamos que vale $R(p \rightarrow q)$. Entonces para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C \|f\|_p \quad \text{de modo que} \quad \sup_{\|f\|_p=1} \|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C$$

Por lo tanto

$$\sup_{\|f\|_p=1} \left(\sup_{\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{S}^{n-1})}=1} \left| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \widehat{f}(\omega)g(\omega)d\sigma(\omega) \right| \right) \leq C$$

$$\sup_{\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{S}^{n-1})}=1} \left(\sup_{\|f\|_p=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{gd\sigma}(x)f(x)dx \right| \right) \leq C$$

Entonces

$$\sup_{\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{S}^{n-1})}=1} \|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C$$

de modo que

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{S}^{n-1})} \quad \forall g \in L^{q'}(\mathbb{S}^{n-1}) \quad (12)$$

3.1. Conexión con PDE

Consideremos la ecuación de Helmholtz:

$$\Delta u + 4\pi^2 u = 0$$

Dada una función $g \in L^p(\mathbb{S}^{n-1})$, tenemos que $\widehat{gd\sigma}$ es una solución en sentido distribucional de la ecuación anterior. Para verificar esto, tomemos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y evaluemos

$$\begin{aligned} (\Delta \widehat{gd\sigma} + 4\pi^2 \widehat{gd\sigma})(f) &= \widehat{gd\sigma}(\Delta f) + 4\pi^2 \widehat{gd\sigma}(f) \\ &= g d\sigma(\widehat{\Delta f} + 4\pi^2 \widehat{f}) \\ &= 4\pi^2 g d\sigma((1 - |\xi|^2)\widehat{f}) = 0 \end{aligned}$$

pues $gd\sigma$ está soportada en la esfera. Conseguir acotaciones como en (12) da información sobre el decaimiento de las soluciones de la ecuación de Helmholtz.

La misma clase de razonamiento permite verificar que $\widehat{gd\mu}$, con $d\mu$ la medida del paraboloides $\{(\tau, \xi) : \tau = 2\pi|\xi|^2\}$ es solución general de la ecuación de Schrödinger:

$$i\partial_t u = \Delta_x u$$

4. Ejemplos y condiciones necesarias

4.1. Superficies planas?

Ejemplo 4.1.1 Sea $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n = 0, \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$. Si vale $R_S(p \rightarrow q)$ entonces $p = 1$.

Consideremos $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\widehat{\psi}(\xi) = 1$ en $[-1, 1]^n$. Escribamos a los puntos de \mathbb{R}^n como $\mathbf{x} = (\bar{x}, x_n)$. Definamos f como

$$f(\mathbf{x}) = \psi\left(\bar{x}, \frac{x_n}{\lambda}\right)$$

Entonces

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\psi\left(\bar{x}, \frac{x_n}{\lambda}\right)\right|^p d\mathbf{x} = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)|^p d\mathbf{x} = \lambda \|\psi\|_p^p$$

Por otro lado, $\widehat{f}(\xi) = \lambda \widehat{\psi}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \lambda \xi_n)$

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{L^q(S)}^q &= \lambda^q \int_S |\widehat{\psi}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \lambda \xi_n)|^q d\sigma \\ &= \lambda^q \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{B(0,1)}(\xi) |\widehat{\psi}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0)|^q d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} \\ &\sim \lambda^q \end{aligned}$$

Entonces

$$\|f\|_p \sim \lambda^{\frac{1}{p}} \quad \text{y} \quad \|f\|_q \sim \lambda \quad (13)$$

Juntamos las dos estimaciones y tenemos que debe valer la desigualdad

$$\lambda \leq C \lambda^{\frac{1}{p}} \quad \forall \lambda \quad (p \geq 1)$$

Si hacemos tender λ a $+\infty$ entonces debe valer $p = 1$.

4.2. Curvamos un poco...(primera condición necesaria)

Supongamos que tenemos una superficie $S \subset \mathbb{R}^n$ dada como el gráfico de una función $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, tal que $\varphi(0) = \nabla \varphi(0) = 0$ y tal que $\varphi(x) = O(|x|^k)$ con $k \geq 2$. Tenemos entonces la siguiente proposición:

Proposición 4.2.1 *Si vale $R_S(p \rightarrow q)$ con una superficie $(S, d\sigma)$ como la descrita arriba, entonces $p' > \frac{n+k-1}{n-1}q$*

Demostración: La idea es jugar con las dilataciones como en el ejemplo anterior. Consideremos $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como antes: $\widehat{\psi}(\xi) = 1$ en $[-1, 1]^n$. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \psi\left(\frac{x_1}{\lambda^{\frac{1}{k}}}, \frac{x_2}{\lambda^{\frac{1}{k}}}, \dots, \frac{x_{n-1}}{\lambda^{\frac{1}{k}}}, \frac{x_n}{\lambda}\right) \quad \lambda \gg 1$$

Entonces

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\lambda^{\frac{n-1+k}{k}} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \sim \lambda^{\frac{n-1+k}{kp}}$$

Por otro lado,

$$\widehat{f}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) = \lambda^{\frac{n-1+k}{k}} \widehat{\psi}(\xi_1 \lambda^{\frac{1}{k}}, \dots, \xi_{n-1} \lambda^{\frac{1}{k}}, \xi_n \lambda)$$

Calculamos ahora $\|\widehat{f}\|_{L^q(S)}$. Sea $B(0, \lambda^{-\frac{1}{k}}) \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Definamos

$$\Omega_\lambda = B(0, \lambda^{-\frac{1}{k}}) \times (-\lambda^{-1}, \lambda^{-1})$$

Entonces $\widehat{f} \sim \lambda^{\frac{n-1+k}{k}}$ sobre $S \cap \Omega_\lambda$. Además podemos estimar la medida de $S \cap \Omega_\lambda$:

$$d\sigma(S \cap \Omega_\lambda) \sim \lambda^{-\frac{1}{k}(n-1)}$$

Juntando estas dos estimaciones, tenemos que

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(S)} \sim \lambda^{\frac{n+k-1}{k}} \lambda^{\frac{1-n}{qk}}$$

Como esto debe valer para cualquier elección de $\lambda \gg 1$, obtenemos que

$$\lambda^{\frac{n+k-1}{k}} \lambda^{\frac{1-n}{qk}} \lesssim \lambda^{\frac{n+k-1}{kp}}$$

De esta desigualdad se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{n+k-1}{kp} p + \frac{1-n}{qk} - \frac{n+k-1}{kp} &\leq 0 \\ \frac{n+k-1}{kp} (p-1) &\leq \frac{n-1}{qk} \\ \frac{n+k-1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right) &\leq \frac{1}{q} \end{aligned}$$

De modo que obtenemos

$$\frac{1}{q} \geq \frac{n+k-1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad (14)$$

■

Si la superficie es suave, tenemos asegurado que $k \geq 2$. En el caso de la esfera, sabemos que $k = 2$. Con esto tenemos la primera condición necesaria para que exista un teorema de restricción para la esfera.

$$\boxed{\frac{1}{q} \geq \frac{n+1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}$$

Está claro que cuanto más plana sea la superficie, más restrictiva es la condición (14) (la pendiente de la recta en el plano $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ es cada vez más vertical). En el caso extremo en que S sea un plano, vimos con un ejemplo que no es posible encontrar teoremas de restricción con exponentes no triviales.

4.3. Segunda condición necesaria

Consideremos la formulación dual del problema de restricción. Si ponemos $g \equiv 1$ en (12) entonces debe valer

$$\|\widehat{d\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C$$

Ahora usamos que $|\widehat{d\sigma}| = O(|x|^{-\frac{n-1}{2}})$ para $x \gg 1$. Entonces la condición necesaria que aparece es que la integral

$$\int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}p'}} dx = \omega_n \int_{r>1} \frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}p'}} r^{n-1} dr = \int_{r>1} \frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}(p'-2)}} dr$$

sea finita. Esto ocurre si y sólo si

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{2}(p'-2) > 1 &\iff p' > \frac{n-1}{2} + 2 = \frac{2n}{n-1} \\ &\iff \frac{1}{p'} < \frac{n-1}{2n} \\ &\iff \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{p'} > \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

Tenemos entonces la segunda condición necesaria:

$$\boxed{\frac{1}{p} > \frac{n+1}{2n}}$$

Cada teorema de restricción del tipo $R_S(p_0 \rightarrow q_0)$ nos da automáticamente la validez de $R_S(p \rightarrow q)$ para $\frac{1}{p} > \frac{1}{p_0}$, $\frac{1}{q} > \frac{n+1}{n-1} \frac{1}{p}$, pues tenemos que vale (para S compacto) $R_S(1 \rightarrow q)$ para todo q (cosa que se desprende del resultado trivial $R(1 \rightarrow \infty)$).

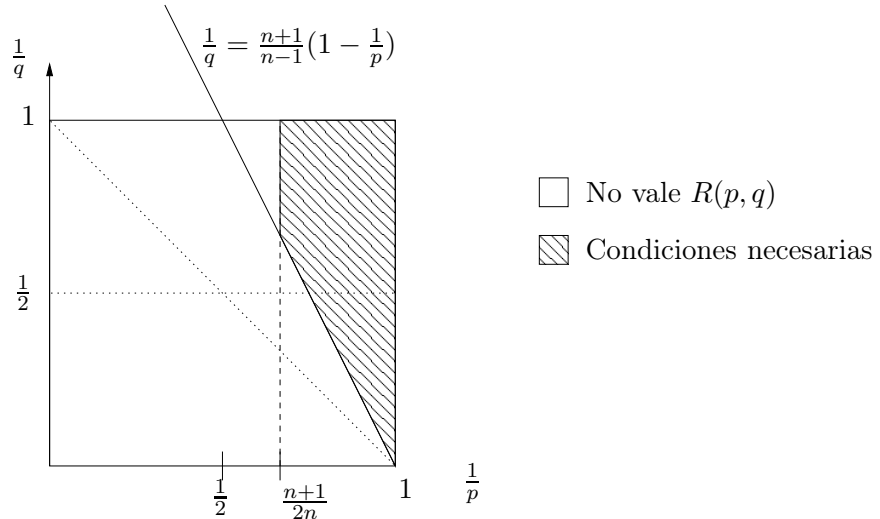


Figura 2: Condiciones necesarias, $n = 3$.

5. Integrales oscilatorias

Para $\lambda \in \mathbb{R}$, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)} a(x) dx$$

El objetivo es estudiar el decaimiento de $I(\lambda)$ para $|\lambda| \rightarrow \infty$. La primera observación es que si ϕ es constante en el soporte de a entonces

$$I(\lambda) = C \int_{\mathbb{R}^n} a(x) dx \quad (15)$$

y no hay decaimiento posible.

5.1. Primer caso: una variable

Lema 5.1.1 (Fase no estacionaria) Sean a y ϕ como antes. Si además $\phi'(x) \neq 0$ en el soporte de a entonces

$$I(\lambda) = O(\lambda^{-N}) \quad (16)$$

para todo $N \in \mathbb{N}$

Demostración: Consideramos el operador diferencial D .

$$D(f) = \frac{1}{i\lambda\phi'} \frac{df}{dx} \quad (17)$$

El traspuesto de D es ${}^t Df = -\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{i\lambda\phi'} \right)$. Notemos que $D^N(e^{i\lambda\phi}) = e^{i\lambda\phi}$ para todo N , de modo que integrando por partes queda

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)} a(x) dx \quad (18)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} D^N(e^{i\lambda\phi(x)}) a(x) dx \quad (19)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)} {}^t D^N a(x) dx \quad (20)$$

y entonces

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^N} \int_{\mathbb{R}} |{}^t D^N a(x)| dx = \frac{1}{\lambda^N} C(N, a, \phi) \quad (21)$$

■

Proposición 5.1.2 (Fase estacionaria) Sea $k \geq 2$, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = \phi''(x_0) = \dots = \phi^{(k-1)}(x_0) = 0$ y $\phi^{(k)} \neq 0$. Si el soporte de a está en un entorno suficientemente reducido de x_0 , entonces

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)} a(x) dx \sim \lambda^{-\frac{1}{k}} \quad (22)$$

Demostración: (Caso $k = 2$, $\phi(x) = x^2$)

Tenemos

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} a(x) dx \quad (23)$$

Sabemos que si $g(x) = e^{-zx^2}$ con $z > 0$ entonces $\widehat{g} = e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-zx^2} dx$ de modo que

$$\widehat{g}(\xi) = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{z}} \quad (24)$$

Si usamos Parseval,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-zx^2} a(x) dx = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{z}} \widehat{a}(\xi) d\xi \quad (25)$$

Afirmación: vale (25) para $S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0, z \neq 0\}$

Si ponemos $z = -i\pi\lambda$, $\lambda > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\pi\lambda x^2} a(x) dx = \left(\frac{\pi}{i\pi\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{\pi^2 \xi^2}{i\pi\lambda}} \widehat{a}(\xi) d\xi \quad (26)$$

$$= \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}(1-i) \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i\pi\xi^2}{\lambda}} \widehat{a}(\xi) d\xi \quad (27)$$

$$(28)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} a(x) dx \right| &\leq \frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}} |e^{-\frac{i\pi\xi^2}{\lambda}} - 1| |\widehat{a}(\xi)| d\xi + \int_{\mathbb{R}} |\widehat{a}(\xi)| d\xi \right) \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\pi}{|\lambda|} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\widehat{a}(\xi)| d\xi + |a(0)| \right) \\ &\leq \frac{|a(0)|}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} + \frac{\int_{|\xi|>1} |\xi|^2 |\widehat{a}(\xi)| d\xi + \int_{|\xi|<1} |\xi|^2 |\widehat{a}(\xi)| d\xi}{|\lambda|^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq \frac{|a(0)|}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{|\lambda|^{\frac{3}{2}}} \left(C \|a^{(4)}\|_1 + \|a\|_1 \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

Ahora, el caso general para $k = 2$, ϕ suave. Tenemos que $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$, $\phi''(x_0) \neq 0$. Podemos escribir entonces

$$\phi(x) = c(x - x_0)^2 + O(|x - x_0|)^3 \quad (29)$$

$$= c(x - x_0)^2(1 + \varepsilon(x)) \quad \text{con} \quad \varepsilon(x) = O(|x - x_0|) \quad (30)$$

Si desarrollamos en polinomio de Taylor, vemos podemos tomar

$$\varepsilon(x) = (x - x_0)\phi'''(\eta_x) \quad (31)$$

Observemos que como $\phi''(x_0) \neq 0$,

$$\phi'(x) = \phi'(x) - \phi'(x_0) = \phi''(\theta_x)(x - x_0) \neq 0 \quad (32)$$

si x está cerca de x_0 . Podemos definir $y : V \rightarrow y(V)$ un difeo si V es un entorno de x_0 suficientemente chico mediante la fórmula

$$y(x) = (x - x_0)(1 + \varepsilon(x))^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

Como $0 \neq \phi'(x) = c2y(x)y'(x)$ y además $y'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \varepsilon(x))^{\frac{1}{2}} = 1$, resulta que $y'(x) \neq 0$ en V .

Finalmente, para $x \in V$, vale que $\phi(x(y)) = cy^2(x)$. Si a tiene soporte en V

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)} a(x) dx = \int_V e^{i\lambda\phi(x)} a(x) dx = \int_{y(V)} e^{i\lambda cy^2} a(x(y)) x'(y) dy \quad (34)$$

y se aplica el resultado para x^2 . ■

Proposición 5.1.3 (Funciones de Bessel) *La función de Bessel $J_m(r)$ de orden m se define como*

$$J_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir \sin \theta} e^{-im\theta} d\theta \quad (35)$$

Vale que

$$J_m(r) = O(r^{-\frac{1}{2}}) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (36)$$

Demostración: Basta notar que $\phi(\theta) = \sin(\theta)$ tiene derivada nula en $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$. En esos puntos $|\phi''| = 1$. Con una partición de la unidad escribimos a J_m como suma de tres integrales y aplicamos el caso $k = 2$ de la proposición de fase estacionaria. ■

Proposición 5.1.4 *Vale la siguiente expresión para las funciones de Bessel*

$$J_m(r) = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^m}{\Gamma(m + \frac{1}{2})\pi^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^1 e^{irt} (1 - t^2)^{m-\frac{1}{2}} dt \quad (37)$$

Teorema 5.1.5 *Sea $d\sigma$ la medida uniforme en \mathbb{S}^{n-1} . Entonces*

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| = O(|\xi|^{-\frac{n-1}{2}})$$

Demostración: Podemos asumir que $\xi = (0, \dots, 0, \xi_n)$. Entonces

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i |\xi| \cos \theta} d\sigma(x) \quad (38)$$

donde θ es el ángulo con el polo norte. En coordenadas esféricas,

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = |\sigma_{n-2}| \int_0^\pi e^{-2\pi i|\xi| \cos \theta} (\operatorname{sen} \theta)^{n-1} d\theta \quad (39)$$

si ponemos $r = 2\pi|\xi|$ y $t = -\cos \theta$ obtenemos que

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| = \int_{-1}^1 e^{irt} (1-t^2)^{\frac{n-2}{2}} \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} = J_{\frac{n-2}{2}} r^{-\frac{n-2}{2}} \quad (40)$$

de modo que

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| = O(|\xi|^{-\frac{1}{2}}) |\xi|^{-\frac{n-2}{2}} = O(|\xi|^{-\frac{n-2}{2}-\frac{1}{2}}) = O(|\xi|^{-\frac{n-1}{2}}) \quad (41)$$

■

5.2. Varias variables

Lema 5.2.1 (Fase no estacionaria, ver Lema 5.1.1) *Considerar a y ϕ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a de soporte compacto. Si además $\nabla\phi(x) \neq 0$ en el soporte de a entonces*

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\pi\phi(x)} a(x) dx = O(\lambda^{-N}) \quad (42)$$

para todo $N \in \mathbb{N}$

Proposición 5.2.2 (Fase estacionaria, ver Proposición 5.1.2) *Sean a y ϕ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a de soporte compacto. Sea x_0 un punto crítico de ϕ no degenerado, es decir, $\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}\right)(x_0)$ es inversible. Si el soporte de a está contenido en un entorno suficientemente chico de x_0 entonces*

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\pi\phi(x)} a(x) dx = Ca(x_0)e^{i\lambda\phi(x_0)} \lambda^{-\frac{n}{2}} + O(\lambda^{-\frac{n+1}{2}}) \quad (43)$$

Con estos dos resultados podemos probar que si $d\sigma$ es la medida de una hipersuperficie S de curvatura no nula entonces hay cierto decaimiento para su transformada.

Teorema 5.2.3 *Sea $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie, $d\sigma$ la medida en S , $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $d\mu = a d\sigma$. Si S admite una parametrización por una ϕ como en la Proposición 5.2.2 (decimos en ese caso que S tiene curvatura Gaussiana no nula), entonces*

$$|\widehat{d\mu}(\xi)| \lesssim |\xi|^{-\frac{n}{2}} \quad (44)$$

Demostración: Podemos suponer que

$$S = \{(x, \phi(x)) : x \in U \subset \mathbb{R}^n ; \phi(0) = 0 ; \nabla\phi(0) = 0\} \quad (45)$$

Entonces $d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla\phi|^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n$. La integral oscilatoria a estimar es entonces

$$\widehat{d\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu(x) \quad (46)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle (x_1, \dots, x_n, \phi(x_1, \dots, x_n)), \xi \rangle} \tilde{a}(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (47)$$

Ponemos $\lambda = |\xi|$ y $\eta \in \mathbb{S}^n$ tal que $\xi = \lambda\eta$. Definimos ahora $\Phi(x, \eta) = \sum_{1 \leq j \leq n} x_j \eta_j + \phi(x_1, \dots, x_n) \eta_{n+1}$.

Tenemos que probar que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\Phi(x, \eta)} \tilde{a}(x) dx \right| \leq A_\eta \lambda^{-\frac{n}{2}} \quad (48)$$

Dividamos $\mathbb{S}^n = S_N \cup S_S \cup S_E$ (cerca del polo norte, del polo sur y la banda del ecuador).

Veamos la parte de S_N (la de S_S) sale igual. Sabemos que $\phi(0) = \nabla\phi(0) = 0$ y que

$$\det_{1 \leq j, k \leq n} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) (0) \neq 0 \quad (49)$$

Notemos además que dado η ,

$$\nabla_x \Phi(x, \eta) = (\eta_1, \dots, \eta_n) + \eta_{n+1} \nabla\phi(x) \quad (50)$$

de modo que

$$\nabla_x \Phi(x, \eta_N) = \nabla\phi(x) \quad (51)$$

y además

$$\det_{1 \leq j, k \leq n} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) (x, \eta_N) = \det_{1 \leq j, k \leq n} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) (x) \quad (52)$$

En particular,

$$\nabla_x \Phi(0, \eta_N) = \nabla\phi(0) = 0 \quad (53)$$

y

$$\det_{1 \leq j, k \leq n} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) (0, \eta_N) = \det_{1 \leq j, k \leq n} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) (0) \neq 0 \quad (54)$$

Queremos ver, para cada $\eta \in S_N$, si $\Phi(x, \eta)$ tiene puntos críticos. Para eso, debe satisfacerse el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n, \eta_1, \dots, \eta_{n+1}) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n, \eta_1, \dots, \eta_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

Ahora, como tenemos que

$$\det_{1 \leq j, k \leq n} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) (0, \eta_N) \neq 0 \quad (55)$$

el teorema de la función implícita nos dice que hay entornos U de η_N y V de $x_0 = 0$ tales que para cada $\eta \in U$ hay un único $x(\eta) \in V$ que satisface las ecuaciones de arriba y por lo tanto es un punto crítico de $\Phi(\cdot, \eta)$. Si tomamos entornos U y V suficientemente chicos, resulta que

$$\det_{1 \leq j, k \leq n} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) (x(\eta), \eta) \neq 0 \quad (56)$$

Podemos aplicar entonces la Proposición 5.2.2 con $x_0 = x(\eta)$ y obtener el resultado para las regiones polares.

Veamos ahora la región ecuatorial. La idea central es que en esta región la fase es no estacionaria, así que el decaimiento será aún mejor.

Recordemos que

$$\nabla_x \Phi(x, \eta) = (\eta_1, \dots, \eta_n) + \eta_{n+1} \nabla \phi(x) \quad (57)$$

Como estamos en el ecuador, $(\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2)^{\frac{1}{2}} \geq c > 0$. Además $\nabla \phi(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$. De modo que

$$|\nabla_x \Phi(x, \eta)| \geq c' > 0 \quad (58)$$

para todo $\eta \in S_E$ y todo x cerca del origen. Podemos aplicar el Lema 5.2.1 y listo. ■

6. Teoremas de restricción $R(p \rightarrow 2)$

La primera reducción del problema es estudiar restricciones particulares del tipo $R(p \rightarrow 2)$. La ventaja de usar estos exponentes está en la posibilidad de usar el siguiente lema sobre operadores lineales en L^p .

Lema 6.0.4 (Método T^*T) *Sea $T : L^p \rightarrow L^2$ un operador lineal, $T^* : L^2 \rightarrow L^{p'}$ su adjunto. Entonces T es acotado si y sólo si $T^*T : L^p \rightarrow L^p$ es acotado.*

Veamos cómo funciona esto con el operador de restricción. Tenemos el operador $R : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ tal que, para cada f , vale

$$R(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \quad \xi \in \mathbb{S}^{n-1}$$

El adjunto de R es

$$R^*(g)(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i x \xi} g(\xi) d\sigma(\xi) = \widehat{g d\sigma}(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

pues

$$\begin{aligned} R^*(g)(f) &= g(R(f)) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i x \xi} g(\xi) d\xi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g d\sigma} dx \end{aligned}$$

de modo que $R^*(g) = \widehat{g d\sigma}$.

Entonces

$$\begin{aligned} R^* R(f)(x) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{2\pi i x \xi} (Rf)(\xi) d\sigma(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{2\pi i x \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \xi} f(y) dy \right) d\sigma(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{2\pi i \xi(x-y)} d\sigma(\xi) \right) f(y) dy \\ &= (f * K)(x) \end{aligned}$$

donde $K(x) = \widehat{d\sigma}(-x)$.

Otra manera de verlo es la siguiente. Tenemos que conseguir una desigualdad del tipo

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C \|f\|_p \quad (59)$$

Elevamos al cuadrado,

$$\int |\widehat{f}|^2 d\sigma \leq C \|f\|_p^2 \quad (60)$$

$$\langle \widehat{f}, \widehat{f} d\sigma \rangle \leq \|f\|_p^2 \quad (61)$$

$$\langle \widehat{f}, \widehat{f * d\sigma} \rangle \leq \|f\|_p^2 \quad (62)$$

$$\langle f, f * \widehat{d\sigma} \rangle \leq \|f\|_p^2 \quad (63)$$

Como por Hölder vale que

$$\langle f, f * \widehat{d\sigma} \rangle \leq \|f\|_p \|f * \widehat{d\sigma}\|_{p'}, \quad (64)$$

el objetivo entonces es encontrar acotaciones del tipo

$$\|f * \widehat{d\sigma}\|_{p'} \leq C \|f\|_p \quad (65)$$

6.1. Primer teorema de restricción: $R(\frac{4n}{3n+1} \rightarrow 2)$

Tenemos un primer teorema de restricción como corolario del siguiente teorema.

Teorema 6.1.1 (Hardy-Littlewood-Sobolev) Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p, q < \infty$ y

$$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n}$$

entonces

$$\left\| f * \frac{1}{|x|^\alpha} \right\|_q \leq C \|f\|_p$$

Comentario: El teorema anterior puede interpretarse como el caso extremo de la desigualdad de Young, pues lo que ocurre es que $1/|x|^\alpha$ está "casi" en $L^{\frac{n}{\alpha}}$

La primera aproximación que se puede hacer, en vistas de (65), es usar el decaimiento de $\widehat{d\sigma}$ y aplicar el Teorema 6.1.1. Sabemos que

$$|\widehat{d\sigma}| = O(|x|^{-\frac{n-1}{2}})$$

de modo que si $\frac{1}{p'} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{n-1}{2n}$ (que es lo mismo que $\frac{1}{p} = \frac{3n+1}{4n}$) obtenemos

$$\|f * \widehat{d\sigma}\|_{\frac{4n}{n-1}} \leq C \|f\|_{\frac{4n}{3n+1}} \quad (66)$$

La desventaja de este enfoque es que sólo se explota el decaimiento de $\widehat{d\sigma}$ y no su oscilación. En dimensión 1, por ejemplo, estamos estimando

$$\widehat{d\sigma}(x) = 2 \frac{\text{sen}(2\pi|x|)}{|x|} \sim \frac{1}{|x|} \quad (67)$$

6.2. Segundo teorema de restricción: $R(p \rightarrow 2), \frac{1}{p} > \frac{n+3}{2(n+1)}$

Para aprovechar decaimiento y oscilación de $\widehat{d\sigma}$ para obtener una acotación como en (65), lo que hacemos es introducir una partición diádica de la siguiente manera.

Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ una función radial tal que $\phi(x) = 1$ para $|x| < 1$ y $\text{sop}(\phi) \subset B_{(0,2)}$. Definimos

$$\psi_k(x) = \phi\left(\frac{x}{2^k}\right) - \phi\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)$$

de modo que tenemos

$$\psi_0(x) = \phi(x) - \phi(2x)$$

$$\psi_1(x) = \phi\left(\frac{x}{2}\right) - \phi(x)$$

$$\psi_2(x) = \phi\left(\frac{x}{4}\right) - \phi\left(\frac{x}{2}\right)$$

y además

$$\psi_k(x) = \psi_0\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

Observemos que

$$|x| < 2^{k-1} \Rightarrow \frac{|x|}{2^k} < \frac{1}{2} \text{ y } \frac{|x|}{2^{k-1}} < 1 \Rightarrow \psi_k(x) = \phi\left(\frac{x}{2^k}\right) - \phi\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) = 0$$

y

$$|x| < 2^{k+1} \Rightarrow \frac{|x|}{2^k} > 2 \text{ y } \frac{|x|}{2^{k+1}} > 4 \Rightarrow \psi_k(x) = \phi\left(\frac{x}{2^k}\right) - \phi\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) = 0$$

Entonces, el soporte de cada ψ_k está contenido en la corona

$$C_k = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} < |x| < 2^{k+1}\}$$

Ahora, dado $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos la identidad

$$\sum_{k>0} \psi_k(x) = -\phi(x) + \lim_{k \rightarrow \infty} \phi\left(\frac{x}{2^k}\right) = 1 - \phi(x)$$

Escribimos entonces

$$(f * \widehat{d\sigma})(x) = (f * (\phi + \sum_{k>0} \psi_k) \widehat{d\sigma})(x) = (f * (\phi \widehat{d\sigma})) + \sum_{k>0} f * (\psi_k \widehat{d\sigma})$$

y con la desigualdad triangular queda

$$\|f * \widehat{d\sigma}\|_{p'} \leq \underbrace{\|f * (\phi \widehat{d\sigma})\|_{p'}}_A + \underbrace{\left\| \sum_{k>0} f * (\psi_k \widehat{d\sigma}) \right\|_{p'}}_B \quad (68)$$

Para acotar A basta notar que $\phi \widehat{d\sigma}$ es una función C^∞ de soporte compacto, de modo que está en cualquier L^p . Podemos usar Young (9) con los exponentes

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{2}{p'} - 1$$

y concluir que

$$\|f * (\phi \widehat{d\sigma})\|_{p'} \leq \|f\|_p \|\phi \widehat{d\sigma}\|_{\frac{p'}{2}}$$

Ahora acotamos B. La idea es acotar cada término de la suma con constantes sumables, algo como

$$\|f * (\psi_k \widehat{d\sigma})\|_{p'} \leq C 2^{-\varepsilon k} \|f\|_p \quad \text{con } \varepsilon > 0$$

(el 2 va a aparecer por haber hecho una partición diádica, y en el parámetro ε se va a afilar el lápiz para conseguir una serie sumable)

Para obtener una cota (p, p') , una camino es interpolar entre una cota $(1, \infty)$ y otra $(2, 2)$

La cota $(1, \infty)$ es fácil:

$$\begin{aligned} \|f * (\psi_k \widehat{d\sigma})\|_{\infty} &\leq \|f\|_1 \|\psi_k \widehat{d\sigma}\|_{\infty} \\ &\leq \|f\|_1 2^{-(k-1)\frac{n-1}{2}} \sim \|f\|_1 2^{-\frac{k}{2}(n-1)} \end{aligned}$$

pues $\text{sop}(\psi_k) \subset C_k$ y $\widehat{d\sigma}(x) = O(|x|^{-\frac{n-1}{2}})$.

Veamos ahora la cota $(2, 2)$. Vía Plancherel y Hölder, para acotar la norma 2 de un operador de convolución, basta estimar la norma ∞ de la transformada del núcleo (Proposición 2.1.1). En este caso el núcleo es $\psi_k \widehat{d\sigma}$, de modo que lo que tenemos que controlar es

$$\|\widehat{\psi_k \widehat{d\sigma}}\|_{\infty}$$

Como

$$\begin{aligned} \widehat{d\sigma}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi x} d\sigma(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi x} d\sigma(-x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi x} d\sigma(x) = \check{d\sigma}(\xi) \end{aligned}$$

podemos usar la Proposición 2.1.3 y nos queda que

$$\widehat{\psi_k \widehat{d\sigma}} = \widehat{\psi_k \check{d\sigma}} = \widehat{\psi_k} * d\sigma$$

Acotemos entonces $|(\widehat{\psi_k} * d\sigma)(\xi)|$. Empezamos con una acotación puntual para $\widehat{\psi_k}$:

$$\widehat{\psi_k}(\xi) = 2^{nk} \widehat{\psi_0}(2^k \xi)$$

Como ψ_0 está en la clase de Schwartz, $\widehat{\psi_0}$ también, así que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe una constante $C_N > 0$ tal que

$$|\widehat{\psi_0}(2^k \xi)| \leq C_N \frac{1}{(1 + 2^k |\xi|)^N}$$

y entonces

$$|\widehat{\psi}_k(\xi)| \lesssim \frac{2^{nk}}{(1 + 2^k|\xi|)^N}$$

Definamos, para $j \geq 0$, las bolas centradas en ξ : $B_j := B(\xi, 2^{j-k})$. Entonces

$$\begin{aligned} |(\widehat{\psi}_k * d\sigma)(\xi)| &\leq C_N 2^{nk} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + 2^k|\xi - \omega|)^{-N} d\sigma(\omega) \\ &\leq C_N 2^{nk} \int_{B_0} (1 + 2^k|\xi - \omega|)^{-N} d\sigma(\omega) + \\ &\quad + C_N 2^{nk} \sum_{j \geq 0} \int_{B_{j+1} \setminus B_j} (1 + 2^k|\xi - \omega|)^{-N} d\sigma(\omega) \\ &\leq C_N 2^{nk} \sigma(B_0) + C_N 2^{nk} \sum_{j \geq 0} 2^{-jN} \sigma(B_{j+1} \setminus B_j) \\ &= C_N 2^{nk} 2^{-k(n-1)} + C_N 2^{nk} \sum_{j \geq 0} 2^{-jN} 2^{(j-k)(n-1)} \end{aligned}$$

Donde usamos que $\sigma(B_{j+1} \setminus B_j) = 2^{(j+1-k)(n-1)} - 2^{(j-k)(n-1)}$. Si ponemos $N = n$, nos queda

$$\begin{aligned} |(\widehat{\psi}_k * d\sigma)(\xi)| &\leq C_n 2^k + C_n 2^{nk} \sum_{j \geq 0} 2^{-jn} 2^{(j-k)(n-1)} \\ &\leq C_n 2^k + C_n 2^k \sum_{j \geq 0} \frac{1}{2^j} \sim 2^k \end{aligned}$$

de modo que $\|\widehat{\psi}_k * d\sigma\|_\infty \leq 2^k$

Resumiendo, tenemos las dos acotaciones:

- $\|f * (\psi_k \widehat{d\sigma})\|_\infty \leq 2^{-k \frac{n-1}{2}} \|f\|_1$
- $\|f * (\psi_k \widehat{d\sigma})\|_2 \leq 2^k \|f\|_2$

Podemos aplicar entonces Riesz-Thorin y obtenemos cotas (p, p') para todo $1 < p < 2$. Para calcular bien las cotas, tenemos que encontrar $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{2} \\ \frac{1}{p'} &= \frac{\theta}{\infty} + \frac{1-\theta}{2} \end{aligned}$$

El valor de θ que se obtiene es $\theta = \frac{2}{p} - 1$. Conseguimos entonces la acotación (p, p') :

$$\begin{aligned} \|f * (\psi_k \widehat{d\sigma})\|_{p'} &\leq 2^{-k\theta(\frac{n-1}{2})} 2^{k(1-\theta)} \|f\|_p \\ &= 2^{k(\theta\frac{1-n}{2} + 1 - \theta)} \|f\|_p \\ &= 2^{k(\frac{n+2}{3} - \frac{n+1}{p})} \|f\|_p \end{aligned}$$

Los valores de p que hacen negativo al exponente son aquellos tales que $\frac{1}{p} > \frac{n+3}{2(n+1)}$

Con esto conseguimos acotar

$$\sum_{k>0} \|f * (\psi_k \widehat{d\sigma})\|_{p'} \lesssim \|f\|_p$$

Como además tenemos que

$$f * \widehat{\phi d\sigma} + \sum_{k=0}^N f * (\psi_k \widehat{d\sigma}) \xrightarrow{N} f * \widehat{d\sigma}$$

puntualmente, por Fatou nos queda que para la norma p' vale

$$\|f * \widehat{d\sigma}\|_{p'} \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \|f * \widehat{\phi d\sigma}\|_{p'} + \sum_{k=0}^N \|f * (\psi_k \widehat{d\sigma})\|_{p'} \leq C \|f\|_p$$

para todo $p > \frac{2(n+1)}{n+3}$.

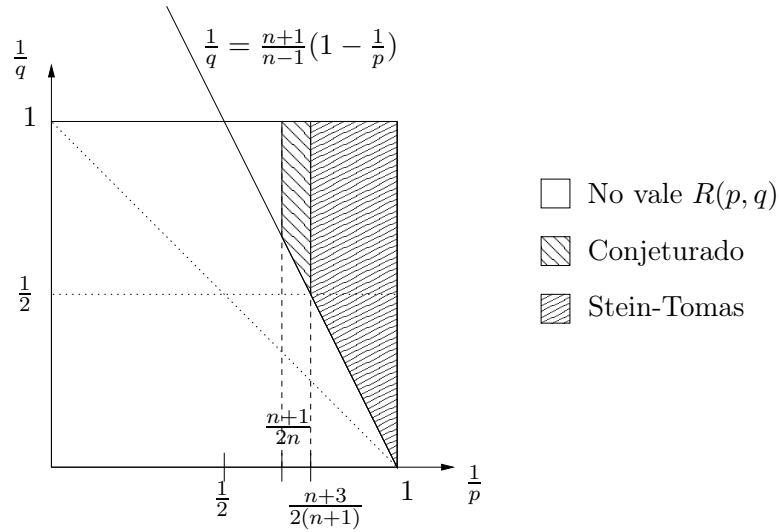


Figura 3: Resultados, $n = 3$.

7. Teoremas de Stein Tomas para fractales

Tenemos la siguiente generalización:

Teorema 7.0.1 (Mockenhaupt, [Moc00]) *Sea μ una medida de soporte compacto en \mathbb{R}^n tal que*

1. Existe $\beta > 0$ tal que $|\widehat{\mu}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\frac{\beta}{2}}$

2. Existe $\alpha > 0$ tal que $\mu(B_r(x)) \leq Cr^\alpha$ para cada bola centrada en x .

Entonces, para $1 < \frac{2(2n-2\alpha+\beta)}{4(n-\alpha)+\beta}$, se tiene

$$\left(\int |\widehat{f}|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (69)$$

Observación 7.0.2 Las hipótesis sobre μ no son independientes.

Proposición 7.0.3 Sea $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto. Si existe $0 < \beta < \frac{n}{2}$ tal que $|\widehat{\mu}(\xi)| \lesssim |\xi|^{-\beta}$, entonces $\dim_H(\text{sop}(\mu)) \geq 2\beta$.

Es importante notar que el enunciado recíproco es bien falso: No es cierto que un conjunto de dimensión β soporte una medida de probabilidad con decaimiento para su transformada. Por ejemplo, el segmento $I = [0, 1] \times 0 \subset \mathbb{R}^2$ tiene dimensión 1 pero no soporta ninguna medida cuya FT tienda a cero (es independiente de una de las coordenadas). Algunos ejemplos de conjuntos y medidas con decaimiento para sus transformadas:

- (Jarnik) Sea

$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{hay infinitos racionales } \frac{a}{q} \text{ tales que } \left| x - \frac{a}{q} \right| \leq q^{-(2+\alpha)} \right\} \quad (70)$$

La dimensión de E_α es $\frac{2}{2+\alpha}$ y (Kaufman, [Kau81]) soporta una medida μ tal que para todo $\varepsilon > 0$

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \leq C_\varepsilon |\xi|^{-\frac{1}{2+\alpha} + \varepsilon} \quad (71)$$

- (Salem, [Sal51]) Existe un conjunto de Cantor F de dimensión α y una medida $\mu \in \mathcal{P}(F)$ tale que

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \leq C_\varepsilon |\xi|^{-\frac{\alpha}{2} + \varepsilon} \quad (72)$$

- (Bluhm, [Blu00]) Sea \mathbb{L} el conjunto de los números de Liouville

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \forall n \in \mathbb{N}, \exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^n} \right\} \quad (73)$$

El conjunto \mathbb{L} soporta una medida de Rajchman ($|\widehat{\mu}(\xi)| \rightarrow 0$).

Necesitamos el siguiente lema

Lema 7.0.4 Sea φ una función creciente tal que $\varphi(0) = 0$ y f una función medible en (X, μ) . Entonces

$$\int_X \varphi(|f|) d\mu = \int_0^\infty d_f(r) \varphi'(r) dr$$

Demostración: (del Teorema 7) Retomamos desde las cotas $(1, \infty)$ y $(2, 2)$.

La cota $(1, \infty)$ es fácil:

$$\begin{aligned} \|f * (\psi_k \widehat{d\sigma})\|_\infty &\leq \|f\|_1 \|\psi_k \widehat{d\sigma}\|_\infty \\ &\leq \|f\|_1 2^{-(k-1)\frac{\beta}{2}} \sim \|f\|_1 2^{-k\frac{\beta}{2}} \end{aligned}$$

pues $\text{supp}(\psi_k) \subset C_k$ y $\widehat{d\sigma}(x) = O(|x|^{-\frac{\beta}{2}})$.

Ahora

$$|(\widehat{\psi_k} * d\sigma)(\xi)| \leq C_N 2^{nk} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + 2^k |\xi - \omega|)^{-N} d\sigma(\omega)$$

Vamos a usar el lema con $\varphi(r) = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{-N}$ y $f(\omega) = \frac{1}{2^k |\xi - \omega|}$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + 2^k |\xi - \omega|)^{-N} d\sigma(\omega) &= \int_0^\infty \frac{1}{r^2} \frac{N}{\left(1 + \frac{1}{r}\right)^{N+1}} \mu(B(\xi, \frac{1}{2^k r})) dr \\ &= \int_0^\infty \frac{N}{(1+t)^{N+1}} \mu(B(\xi, 2^{-k} t)) dt \end{aligned}$$

Nos queda entonces que

$$\begin{aligned} |(\widehat{\psi_k} * d\sigma)(\xi)| &\leq C_N 2^{nk} 2^{-k\alpha} \int_0^\infty \frac{N t^\alpha}{(1+t)^{N+1}} dt \\ &\leq C_N 2^{k(n-\alpha)} \end{aligned}$$

Tenemos entonces las dos cotas $(1, \infty)$ y $(2, 2)$. Podemos interpolar para obtener una acotación (p, p') (con $\theta = \frac{2}{p} - 1$) para cada término de la suma

$$\begin{aligned} \|f * (\psi_k \widehat{d\sigma})\|_{p'} &\leq 2^{-k\frac{\beta}{2}\theta} 2^{k(n-\alpha)(1-\theta)} \|f\|_p \\ &= 2^{k(-\theta\frac{\beta}{2} + (1-\theta)(n-\alpha))} \|f\|_p \\ &= 2^{k((1-\frac{2}{p})\frac{\beta}{2} + 2(1-\frac{1}{p})(n-\alpha))} \|f\|_p \end{aligned}$$

Queremos los valores de p que hacen negativo al exponente.

$$\left(1 - \frac{2}{p}\right)\frac{\beta}{2} + 2\left(1 - \frac{1}{p}\right)(n - \alpha) < 0. \quad (74)$$

Nos queda entonces que

$$\frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{p} + 2(n - \alpha) - \frac{2}{p}(n - \alpha) < 0 \quad (75)$$

que es lo mismo que

$$-\frac{1}{p}(\beta + 2(n - \alpha)) < -2(n - \alpha) - \frac{\beta}{2} = -\frac{4(n - \alpha) + \beta}{2}. \quad (76)$$

Entonces, los valores de p buscados son aquellos tales que $\frac{1}{p} > \frac{4(n-\alpha)+\beta}{4(n-\alpha)+2\beta}$ ■

8. Miscelánea

8.1. Further reading

- [Bou00]
- [ŁP09]

8.2. Algunos links

- Terence Tao: <http://www.math.ucla.edu/~tao/>
- Alex Iosevich <http://www.math.missouri.edu/~iosevich/>
- Izabella Łaba <http://www.math.ubc.ca/~ilaba/>
- Ben Green: <http://www.dpmms.cam.ac.uk/~bjg23/>

Referencias

- [BL04] Bak, J.-G. and Lee, S. Restriction of the Fourier transform to a quadratic surface in \mathbb{R}^n . *Math. Z.*, **247**(2):409–422, 2004.
- [BLL07] Bak, J.-G., Lee, J. and Lee, S. Weighted restriction theorems for space curves. *J. Math. Anal. Appl.*, **334**(2):1232–1245, 2007.
- [Blu00] Bluhm, C. Liouville numbers, Rajchman measures, and small Cantor sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**(9):2637–2640, 2000.
- [BO03] Bak, J.-G. and Oberlin, D. M. A note on Fourier restriction for curves in \mathbb{R}^3 . In *Harmonic analysis at Mount Holyoke (South Hadley, MA, 2001)*, volume 320 of *Contemp. Math.*, 9–13. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [BOS08] Bak, J.-G., Oberlin, D. M. and Seeger, A. Restriction of Fourier transforms to curves. II. Some classes with vanishing torsion. *J. Aust. Math. Soc.*, **85**(1):1–28, 2008.

- [BOS09] Bak, J.-G., Oberlin, D. M. and Seeger, A. Restriction of Fourier transforms to curves and related oscillatory integrals. *Amer. J. Math.*, **131**(2):277–311, 2009.
- [Bou00] Bourgain, J. Harmonic analysis and combinatorics: how much may they contribute to each other? In *Mathematics: frontiers and perspectives*, 13–32. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [FGU04] Ferreyra, E., Godoy, T. and Urciuolo, M. Restriction theorems for the Fourier transform to homogeneous polynomial surfaces in \mathbb{R}^3 . *Studia Math.*, **160**(3):249–265, 2004.
- [FU08] Ferreyra, E. and Urciuolo, M. Restriction theorems for anisotropically homogeneous hypersurfaces of \mathbb{R}^{n+1} . *Georgian Math. J.*, **15**(4):643–651, 2008.
- [FU09] Ferreyra, E. and Urciuolo, M. Fourier restriction estimates to mixed homogeneous surfaces. *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **10**(2):Article 35, 11, 2009.
- [Gra04] Grafakos, L. *Classical and modern Fourier analysis*. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004.
- [Kau81] Kaufman, R. On the theorem of Jarník and Besicovitch. *Acta Arith.*, **39**(3):265–267, 1981.
- [ŁP09] Łaba, I. and Pramanik, M. Arithmetic progressions in sets of fractional dimension. *Geom. Funct. Anal.*, **19**(2):429–456, 2009.
- [Mit02] Mitsis, T. Norm estimates for the Kakeya maximal function with respect to general measures. *Real Anal. Exchange*, **27**(2):563–572, 2001/02.
- [Moc00] Mockenhaupt, G. Salem sets and restriction properties of Fourier transforms. *Geom. Funct. Anal.*, **10**(6):1579–1587, 2000.
- [Sal51] Salem, R. On singular monotonic functions whose spectrum has a given Hausdorff dimension. *Ark. Mat.*, **1**:353–365, 1951.
- [Ste93] Stein, E. M. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.
- [Tao04] Tao, T. Some recent progress on the restriction conjecture. In *Fourier analysis and convexity*, Appl. Numer. Harmon. Anal., 217–243. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.

- [Tom75] Tomas, P. A. A restriction theorem for the Fourier transform. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **81**:477–478, 1975.
- [Wol03] Wolff, T. H. *Lectures on harmonic analysis*, volume 29 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. With a foreword by Charles Fefferman and preface by Izabella Łaba, Edited by Łaba and Carol Shubin.