Aproximación mediante operadores de marcos con restricciones

Pedro G. Massey

CMaLP-FCE-UNLP & IAM-CONICET, Argentina

Resumen

Dada una matriz semidefinida positva $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y una familia de números positivos $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{R}^k_{>0}$, indexados por $\mathbb{I}_k = \{1, \ldots, k\}$, introducimos el conjunto $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ formado por las familias $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{C}^d)^k$ tales que $\|g_i\|^2 = a_i$, para $i \in \mathbb{I}_k$. Notemos que $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ es el producto de esferas y como tal, lo consideramos con su métrica producto.

Dada una norma unitariamente invariante y estrictamente convexa $N(\cdot)$ en el álgebra de matrices $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, consideramos la función *distancia al operador de marco* (generalizada) $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$ definida en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, dada por

$$\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}(\mathcal{G}) = N(S - S_{\mathcal{G}}) \quad \text{donde} \quad S_{\mathcal{G}} = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} g_i\, g_i^* \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+\,.$$

En esta charla vamos a considerar el problema de hallar la mejor aproximación de S a través de los operadores de marco $S_{\mathcal{G}}$ con la restricción $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, con respecto a la norma $N(\cdot)$, minimizando la función $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. Vamos a mostrar que de hecho, los mínimos locales de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$ son globales, y no dependen de la elección particular de $N(\cdot)$ (como arriba); además, describiremos procedimientos efectivos para la construcción de mínimos globales $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$. La charla está basada en trabajos en conjunto con Noelia Rios y Demetrio Stojanoff.