Diseño óptimo de multicompletaciones con restricciones de norma

Expositor: María José Benac (Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías-UNSE, mjbenac@gmail.com)

Autor/es: María José Benac (Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías-UNSE, mjbenac@gmail.com); Pedro Massey (UNLP - CONICET, pedro.massey@gmail.com); Mariano Ruiz (UNLP - CONICET, maruiz@gmail.com); Demetrio Stojanoff (UNLP - CONICET, demsto@gmail.com)

Consideremos una sucesión finita de números reales positivos $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^n$ y una sucesión de números enteros positivos $\mathbf{d} = (d_j)_{j=1}^m$, ambas ordenadas en forma no-creciene. Un $(\alpha, \mathbf{d})-$diseño es una familia $\Phi = (\mathcal{F}_j)_{j=1}^m$ tal que: $\mathcal{F}_j = \{f_{ij}\}_{i=1}^n \in (\mathbb{C}^{d_j})^n$ de forma que se verifican las restricciones

$$\sum_{j=1}^m \|f_{ij}\|^2 = \alpha_i\,,\ i = 1, \ldots, n.$$

Denotaremos con $\mathcal{D}(\alpha, \mathbf{d})$ al conjunto de todos los $(\alpha, \mathbf{d})-$diseños. Sea $\Phi^0 = (\mathcal{F}_j^0)_{j=1}^m$ tal que $\mathcal{F}_j^0 = \{f_{ij}^0\}_{i=1}^k \in (\mathbb{C}^{d_j})^k$ con $j = 1, \ldots, m$. Una $(\alpha, \mathbf{d})-$ *multicompletación* de Φ^0 es

$$(\Phi^0, \Phi) = (\mathcal{F}_j^0, \mathcal{F}_j)_{j=1}^m \ \text{ con } \ \Phi \in \mathcal{D}(\alpha, \mathbf{d})\,,$$

donde $(\mathcal{F}_j^0, \mathcal{F}_j) \in (\mathbb{C}^{d_j})^{k+n}$, para $j = 1, \ldots, m$. Dadas (Φ^0, Φ) una $(\alpha, \mathbf{d})-$multicompletación y una función $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ estrictamente convexa, consideramos el potencial conjunto inducido por φ, dado por:

$$\Psi_\varphi(\Phi) = \mathrm{P}_\varphi(\Phi^0, \Phi) = \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{m}} \mathrm{tr}(\varphi[\mathrm{S}_{(\mathcal{F}_\mathrm{j}^0, \mathcal{F}_\mathrm{j})}]),$$

donde $S_{(\mathcal{F}_j^0, \mathcal{F}_j)} = S_{\mathcal{F}_j^0} + S_{\mathcal{F}_j}$ denota el operador de marco de $(\mathcal{F}_j^0, \mathcal{F}_j) \in (\mathbb{C}^{d_j})^{k+n}$, para $j = 1, \ldots, m$. El potencial conjunto inducido por una función convexa mide la estabilidad de la familia de algoritmos de codificación-decodificación: cuanto menor es el potencial, más estable es la familia (con las restricciones de normas anteriores). En esta charla consideraremos el problema de la existencia de $(\alpha, \mathbf{d})-$multicompletaciones $(\Phi^0, \Phi^{\mathrm{op}})$ óptimas dentro de la clase de todas las $(\alpha, \mathbf{d})-$multicompletaciones, es decir, tales que

$$\mathrm{P}_\varphi(\Phi^0, \Phi^{\mathrm{op}}) \leq \mathrm{P}_\varphi(\Phi^0, \Phi),$$

para toda $(\alpha, \mathbf{d})-$multicompletación (Φ^0, Φ) y para toda φ.

Referencias

[1] P. Massey, N. Rios , D. Stojanoff, Frame completions with prescribed norms: local minimizers and applications. Adv. Comput. Math. 44 (2018), no. 1, 51-86.

[2] P. Massey, M. Ruiz, D. Stojanoff; Optimal frame completions with prescribed norms for majorization. J. Fourier Anal. Appl. 20 (2014), no. 5, 1111-1140.