ALGUNOS RESULTADOS SOBRE EL ALGORITMO AVARICIOSO DE CHEBYSHEV

Eugenio Hernández

Colaboradores: P. Berná, O. Blasco, G. Garrigós, T. Oikhberg

XIV Encuentro Nacional de Analistas A.P. Calderón

21-24 Noviembre, 2018

MTM-2016-76566-P

1. NOTACIÓN

- X = espacio de Banach sobre $\mathbb{F} = (\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$
- $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistema de Markusevich seminormalizado con funcionales biortogonales $\mathcal{B}^* = \{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$:
  - $e_n^*(e_k) = \delta_{n,k}$
  - $0 < C_1 \leq \|e_k\|, \|e_n^*\| \leq C_2 < \infty$
  - Completo: $X = \overline{\text{span}\{e_n\}}$
  - Total: Si $e_n^*(x) = 0$ $\forall n$, entonces $x = 0$.
- $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n$. Sumas parciales $S_N\left(\sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n\right) = \sum_{n=1}^{N} e_n^*(x) e_n$

Base de Schauder: $\boxed{\sup_N \|S_N\| := K_b < \infty}$

- Medias de Cesàro: $C_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n} S_n$

Base de Cesàro: $\boxed{\sup_N \|C_N\| := \beta < \infty}$

NOTA: $\mathcal{E} = \{e^{2\pi i n x}\}$ base trig. con orden $\{0, +1, -1, 2, -2, \dots\}$ no es Schauder en $L^1(\mathbb{T})$, pero es Cesàro en $L^1(\mathbb{T})$.

Conjunto avaricioso: $x \in X$, $m \in \mathbb{N}$; $A \subset \mathbb{N}$ es un conjunto avaricioso de tamaño m ($A \in G(x,m)$) si $|A| = m$ y $\min_{n\in A} |e_n^*(x)| \geq \max_{n \notin A} |e_n^*(x)|$.

Algoritmo avaricioso: $\mathcal{G}_m(x) = \sum_{n\in A} e_n^*(x) e_n$ con $A \in G(x, m)$

La eficiencia del algoritmo avaricioso se mide comparándolo con el error de la mejor aproximación

$$\sigma_m(x) = \inf \{ \|x - y\| : y = \sum_{n\in B} a_n e_n,\ a_n \in \mathbb{F},\ |B| = m \}$$

Parámetro de Lebesgue: $L_m(\mathcal{B}) := \sup \left\{ \frac{\|x - \mathcal{G}_m(x)\|}{\sigma_m(x)} : \sigma_m(x) \neq 0,\ \mathcal{G}_m \text{ avaricioso} \right\}$

(Konyagin-Temlyakov-1998): $\boxed{(\underline{\mathcal{B} \text{ Schauder}})\ L_m(\mathcal{B}) = O(1) \iff \mathcal{B} \text{ es incondicional y democrática}}$

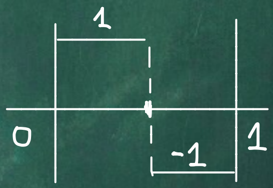
Nomenclatura: Si $L_m(\mathcal{B}) = O(1)$, $\mathcal{B}$ se dice <u>avariciosa</u>

Sistema incondicional: $K_u(N) := \sup_{|A| \le N} \| P_A \| \le K_u$ donde $P_A(x) = \sum_{n \in A} e_n^*(x) e_n$

Sistema democrático: $\exists\ 0 < D < \infty$ tal que si $A, B \subseteq \mathbb{N}$, $|A| = |B| \le N$ se tiene $\| \sum_{n \in A} e_n \| \le D \| \sum_{n \in B} e_n \|$.

Ejemplo 1: Toda base ortonormal en un espacio de Hilbert es avariciosa

Ejemplo 2 (Temlyakov, 1999): La base de Haar en $L^p([0,1))$, $1 < p < \infty$, es avariciosa.



Ejemplo 3 (Temlyakov, 1999): Para $\mathcal{E} = \{ e^{2\pi i n x} \}_{n=-\infty}^{\infty}$ en $L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, se tiene $L_m(\mathcal{E}, L^p(\mathbb{T})) \approx_p m^{\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right|}$.

2. ALGORITMO AVARICIOSO DE CHEBYSHEV

Algoritmo avaricioso de Chebyshev de orden m: es un elemento $\mathcal{CG}_m(x) \in \operatorname{span}\{e_n : n \in A\}$ con $A \in G(x,m)$ tal que

$$\|x - \mathcal{CG}_m(x)\| = \min\left\{ \|x - \sum_{n\in A} a_n e_n\| : a_n \in \mathbb{F} \right\}$$

La eficiencia del algoritmo avaricioso de Chebyshev se mide comparándolo con el error de la mejor aproximación

$$\sigma_m(x) = \inf\left\{ \|x-y\| : y = \sum_{n\in B} a_n e_n,\ a_n \in \mathbb{F},\ |B| = m \right\}$$

Parámetro de Lebesgue:

$$L_m^{Ch}(\mathcal{B}) := \sup\left\{ \frac{\|x - \mathcal{CG}_m(x)\|}{\sigma_m(x)} : \sigma_m(x) \neq 0,\ \mathcal{CG}_m(x) \text{ avari. de Chebyshev} \right\}$$

Nota: El algoritmo avaricioso de Chevyshev fue definido por S. Dilworth, N. Kalton y D. Kutzarova (2003) y estudiado con más detalle por S. Dilworth, D. Kutzarova y T. Oihkberg (2016)

Nomenclatura: Si $L_m^{ch}(\mathcal{B}) = O(1)$, $\mathcal{B}$ se dice semi-avariciosa

(P. Berná - 2018): ($\mathcal{B}$ Schauder) $\mathcal{B}$ es semi-avariciosa $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{B}$ es quasi-avariciosa y democrática.

Sistema quasi-avaricioso: $q(N) := \sup\{\|\mathcal{G}_N\| : \mathcal{G}_N \text{ avaricioso}\} \leq q < \infty$

NOTACIÓN

- $1_A = \sum_{n\in A} e_n$ con $A \subset \mathbb{N}$ finito
- $1_{\varepsilon A} = \sum_{n\in A} \varepsilon_n e_n$ con $A \subset \mathbb{N}$ finito y $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $|\varepsilon_n| = 1$

$\mu(m) := \sup\left\{\frac{\|1_A\|}{\|1_B\|} : |A| = |B| \leq m\right\}$ (parámetro de democracia)

3. ACOTACIONES ELEMENTALES

Lema 1: ($\mathcal{B}$ M-sistema): $L_m^{ch}(\mathcal{B}) \leq L_m(\mathcal{B}) \leq 2\, k_u(m)\, L_m^{ch}(\mathcal{B})$

Lema 2: ($\mathcal{B}$ M-sistema) $L_m^{ch}(\mathcal{B}) \leq 1 + 2Mm$ donde

$$M = (\sup_n \|e_n\|)(\sup_k \|e_k^*\|)$$

La estimación universal del Lema 2 se alcanza para la base "suma" y su biortogonal, la base "diferencia"

Base "suma": $X = \{ \underset{\sim}{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|\underset{\sim}{a}\| = \sup_m \left| \sum_{n=1}^{m} a_n \right| \}$ y $\mathcal{B} = \{e_n\}$

la base canónica de sucesiones ($\|e_n\| = 1$)

Base "diferencia": $\mathcal{B}^* = \{e_n^*\}$, $e_1^* = e_1$, $e_n^* = e_n - e_{n-1}$, con la norma de ℓ^1 ($\|e_1^*\| = 1$, $\|e_n^*\| = 2$ si $n \geq 2$)

Para la base "suma": $L_m^{ch}(\beta) \leq 1 + 4m$

$$\underset{\sim}{x} = (x_n) = \Big(\underbrace{\underbrace{\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}}, \ldots, \underbrace{\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}}}_{m}, \tfrac{1}{2}, \underbrace{\underbrace{-1, 1}, \ldots, \underbrace{-1, 1}}_{m}, 0, 0, \ldots \Big)$$

Para esta sucesión puede probarse:

- $\| \underset{\sim}{x} - \mathcal{CG}_m(\underset{\sim}{x}) \| \geq \| (\underbrace{\underbrace{\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}}, \ldots, \underbrace{\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}}}_{m}, \tfrac{1}{2}, 0, 0 \ldots) \| = 2m + \tfrac{1}{2}$
- $\sigma_m(\underset{\sim}{x}) \leq \tfrac{1}{2} \| \underset{\sim}{x} - 2(\underbrace{\underbrace{0, 1, 0}, \ldots, \underbrace{0, 1, 0}}_{m}, 0, 0, 0, \ldots) \| = \tfrac{1}{2}$
- $L_m^{ch}(\beta) \geq \dfrac{2m + 1/2}{1/2} = 1 + 4m$

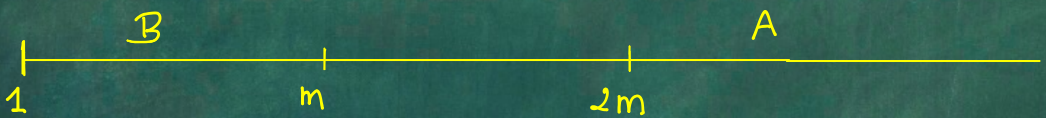
---

4. ACOTACIONES INFERIORES

Teorema 3: $\mathcal{B}$ Cesàro con constante β

$$\frac{\|1_{\varepsilon A}\|}{\|1_{\eta B}\|} \le 3\beta^2 L_m^{ch}(\mathcal{B})$$

para todo $|A|=|B|\le m$, con $A>2B$ ó $B>2A$ y $|\varepsilon_j|=1$, $|\eta_j|=1$



Ejemplo (Sistema trigonométrico) $\mathcal{T}=\{e^{2\pi i n x}\}_{n=1}^{\infty}$ en $L^p(\mathbb{T})$, $1\le p\le\infty$

Temlyakov (1999): $L_m^{ch}(\mathcal{T},L^p)\le L_m(\mathcal{T},L^p)\le C_p\, m^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}$

- CASO $1<p\le 2$

- $B=\{-\ell,\dots,\ell\}$, $\ell=\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor$; $1_B=\sum_{k=-\ell}^{\ell} e^{2\pi i k x}$ es el núcleo de Dirichlet: $\|1_B\|_p\approx m^{1-1/p}$.

- $A = \{2^j : j_0 \le j \le j_0 + 2l\}$ lacunar: $\|1_A\|_p \approx \sqrt{m}$ $(2^{j_0} \ge m)$ (L-P)

- $\mathcal{T}$ es Schauder en $L^p(\mathbb{T})$ si $1 < p \le 2$ y por tanto Cesàro $(\beta = 1)$

  Por el Teorema 3, $L_m^{ch}(\mathcal{T}, L^p) \ge 3 \dfrac{\|1_A\|}{\|1_B\|} \approx C_p\, m^{\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|}$

$\boxed{\text{CASO } 2 \le p < \infty}$ Intercambiar A y B ~~en el caso anterior~~

$\boxed{\text{CASO } p = \infty}$ Reemplazar el conjunto lacunar por polinomios de Rudin-Shapiro: $R(x) = e^{iNx} \sum_{n=0}^{2^L - 1} \varepsilon_n e^{inx}$ con $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$ y $2^L \le m \le 2^{L+1}$. Con $B = N + \{0, 1, \dots, 2^L - 1\}$ se tiene $\|1_B\|_\infty = \|R_\infty\| \approx \sqrt{m}$

Con $A = \{\pm 1, \dots, \pm(2^L - 1)\}$ se tiene $\|1_A\|_\infty = \|D_{2^L - 1} - 1\|_\infty \approx m$.

$\boxed{\text{CASO } p = 1}$ Con $B = \{-l, \dots, l\}$, $\|1_B\|_1 = \|D_l\|_1 \approx \log m$;

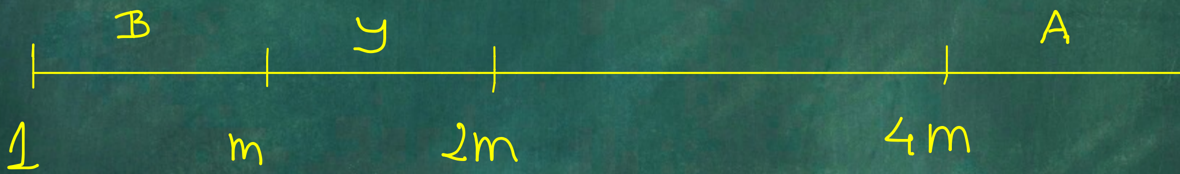
$A = \{2^j : j_0 \le j < j_0 + m\}$, $2^{j_0} > 4m$; $\|1_A\|_1 \approx \sqrt{m} \Rightarrow L_m(\mathcal{T}, L^1(\mathbb{T})) \ge C \dfrac{\sqrt{m}}{\log m}$.

Teorema 4: $\mathcal{B}$ Cesàro con constante β

$$\frac{\| 1_{\varepsilon A} \|}{\| 1_{\eta B} + y \|} \le 3 \beta^2 \, 1_m^{ch}(\mathcal{B})$$

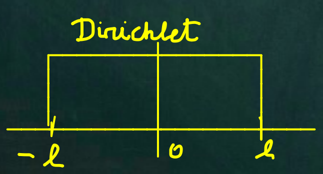
para todo $|A| = |B| \le m$, con $A > 2(B \dot\cup \operatorname{sop} y)$

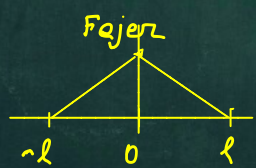
y $|\varepsilon_j| = 1$, $|\eta_j| = 1$ y $|e_n^*(y)| \le 1$.

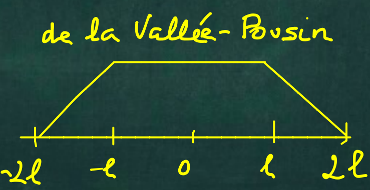


$\boxed{\text{CASO } p=1}$ A y B como en el caso $1 < p \le 2$. Elegir y tal que

$1_B + y = V_\ell$ con $V_\ell = 2F_{2\ell} - F_\ell$ núcleo de de la Vallée-Poussin







$\| 1_B + y \|_1 =$

$= \| V_\ell \|_1 \le 3$

5. ACOTACIÓN SUPERIOR

Teorema 5: $\mathcal{B}$ sistema de Markusevich en X

$$L_m^{ch}(\mathcal{B}) \leq 2g(2m) + 4\tilde{\mu}(m)g(m)$$

con

$$g(m) := \sup\{\|G_m\| : G_m \text{ avaricioso}\}$$

y

$$\tilde{\mu}(m) = \sup\left\{ \frac{\|1_{\varepsilon A}\|}{\|1_{\eta B}\|} : |A| = |B| \leq m,\ |\varepsilon| = 1,\ |\eta| = 1 \right\}$$

es el parámetro de super-democracia.

Base de Lindenstrauss: $\mathcal{L} = \{x_n\}$ con $x_n = e_n - \frac{1}{2}e_{2n+1} - \frac{1}{2}e_{2n+2}$, con donde $\{e_n\}$ es la base canónica de $\ell^1(\mathbb{N})$, y norma $\|\ \|_{\ell^1}$.

Sabemos $L_m(\mathcal{L}) \approx \log m$ y, por el Teorema 5, $L_m^{ch}(\mathcal{L}) \approx O(1)$ porque $g_m(\mathcal{L}) \leq g$ y $\tilde{\mu}(m) \approx O(1)$.


GRACIAS