



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

ESPACIOS CLASIFICANTES DE CATEGORÍAS FIBRADAS

Tesis presentada para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires
en el área Ciencias Matemáticas

Matias L. del Hoyo

Director de tesis: Elías Gabriel Minian

Buenos Aires, 2009

Espacios Clasificantes de Categorías Fibradas

Resumen

Esta tesis se desarrolla en torno al estudio de los espacios clasificantes de fibraciones de categorías. Toda categoría pequeña tiene asociado de un modo natural un espacio topológico, su *espacio clasificante*. Introducimos variantes de esta construcción para el caso en que la categoría tiene estructura fibrada. A partir de estas nuevas construcciones obtenemos nuevos resultados en la teoría de homotopía de categorías, e interpretamos desde un nuevo punto de vista y de un modo conceptual varios de los teoremas clásicos de Quillen, Segal y Thomason.

Entre los resultados obtenidos destacamos una versión relativa del Teorema A de Quillen, una versión homológica de ese mismo Teorema y una sucesión espectral, análoga a la clásica sucesión espectral de Serre, para calcular la homología de fibraciones de Grothendieck.

Exponemos también una construcción novedosa para la subdivisión de una categoría, y derivaciones de esta construcción en teoría de homotopía de posets y en teoría de categorías.

Por último, estudiamos la generalización de espacios clasificantes a 2-categorías, e implementamos los resultados expuestos en homotopía de categorías fibradas para caracterizar los espacios de lazos de las 2-categorías.

Parte de los resultados obtenidos fueron publicados en los artículos [dH08a] y [dH08b], mientras que los referentes a homotopía de 2-categorías pequeñas serán incluidos en [dH09].

Palabras Claves: Espacios clasificantes; fibraciones de Grothendieck; nervios de categorías; subdivisiones; 2-categorías; espacios de lazos.

Classifying Spaces of Fibred Categories

Abstract

This thesis deals with classifying spaces of fibred categories. A topological space is associated in a natural way to a every small category, namely its *classifying space*. We introduce alternative constructions for categories endowed with a fibred structure, obtaining new results in homotopy of categories and placing those of Quillen, Segal and Thomason into our framework.

Among the obtained results, we emphasize a relative version of Quillen's Theorem A, a homological version of the same theorem and a Serre-style spectral sequence.

As an application, we propose a new construction for subdivision of small categories, and derive consequences in homotopy of posets and in category theory.

Finally, we study classifying spaces of 2-categories, and we apply the results in homotopy of fibred categories to give a characterization of loop spaces of 2-categories.

Most part of the results exposed here were published in [dH08a] and [dH08b], while the others will appear in [dH09].

Keywords: Classifying spaces; Grothendieck fibrations; nerves; subdivision; 2-categories; loop-spaces.

Agradecimientos

A *Gabriel Minian*, por haberme dirigido durante estos años. Por el compromiso que demuestra, la pasión con la que trabaja y por el modo en que entiende y enseña matemática.

A *Fernando Cukierman*, por ser un referente y mostrarse siempre disponible. Por su amistad que tanto aprecio. Por sus consejos y su constante apoyo.

A *Eduardo Dubuc*, por confiar en mí y por sus enseñanzas. Y porque a partir de él ser matemático argentino quiere decir otra cosa.

A aquellos con los que compartí la grata experiencia de aprender. A *Ariel Molinuevo*, *Federico Quallbrunn* y *César Massri*. A *Nicolás Ojeda Bar*. A *Jonathan Barmak* y *Miguel Ottina*. A *Leandro Lombardi* y *Sergio Yuhjtman*.

A *Tim Porter* y a *Peter May*, por sus visitas a Buenos Aires y las charlas que me orientaron. A *Manuel Ladra* y *Carles Casacuberta*, por sus esfuerzos que hicieron posible mi tan provechosa visita a España.

A *Kazunori Noguchi*, porque desde Japón se interesó en mi trabajo, y porque a partir de sus inquietudes surgieron algunos de los resultados de la sección 6.

Y a mis padres, mis hermanos y mis sobrinas. Por darme su cariño y su comprensión. Porque más allá de la distancia ellos siempre están presentes.

A todos, muchas gracias.

Matías

“There are times to cultivate and create, when you nurture your world and give birth to new ideas and ventures. There are times of flourishing and abundance, when life feels in full bloom, energized and expanding. And there are times of fruition, when things come to an end. They have reached their climax and must be harvested before they begin to fade. And finally of course, there are times that are cold, and cutting and empty, times when the spring of new beginnings seems like a distant dream. Those rhythms in life are natural events. They weave into one another as day follows night, bringing, not messages of hope and fear, but messages of how things are.”

-Chögyam Trungpa

Introducción

Una categoría pequeña es una estructura algebraico-combinatoria. Consiste en un conjunto de objetos y de flechas entre los objetos, además de una ley de composición definida sobre las flechas. Las categorías pequeñas generalizan y permiten dar un trato unificado a estructuras tan variadas como las siguientes: conjuntos parcialmente ordenados (posets), grupos, grafos, etcétera.

El espacio clasificante de una categoría pequeña C es un espacio topológico BC construido a partir de C . Esta construcción fue introducida por Segal (cf. [Se68]), inspirada en trabajos de Grothendieck y Milnor, y posteriormente desarrollada por Segal y Quillen entre otros. El espacio clasificante permite vincular la teoría de homotopía de espacios con las estructuras categóricas, dando lugar a una interacción que arroja resultados en ambas direcciones.

Por un lado, se estudia la categoría a partir de su espacio clasificante y de sus invariantes discretos (grupos de homotopía, grupos de homología). Por otro lado, dado que todo espacio X es el espacio clasificante de una categoría C , salvo equivalencia homotópica débil, las categorías pequeñas pueden ser interpretadas como modelos para tipos de homotopía de espacios: la categoría C resulta una presentación o descripción combinatoria del espacio X .

Algunos de los problemas que surgen de estas observaciones son:

- Calcular los invariantes discretos de $X = BC$ aprovechando la estructura algebraica de C , usando métodos combinatorios, sin pasar por la topología.
- Dada C categoría equipada con estructura adicional (e. g. categorías fibradas), usar esta información extra para dar una descripción más eficiente del espacio $X = BC$, y estudiar como se manifiesta geoméricamente esta estructura.

Como antecedentes en el tema destacamos los siguientes: el trabajo de Quillen [Qu73] definiendo y calculando los grupos de K -teoría de orden superior, asociando a cada anillo una categoría y analizando su espacio clasificante; la descripción de colímites homotópicos de categorías debida a Thomason [Th79]; el estudio de espacios de lazos y espectros provenientes de categorías monoidales hecho por Segal [Se74] y los modelos axiomáticos establecidos por Thomason [Th80], Minian [Min02] y Maltson [Mal05].

En suma, la categoría de categorías pequeñas es un contexto válido para hacer teoría de homotopía, y entender cómo es que se comportan las categorías

pequeñas y sus espacios clasificantes lleva a comprender los espacios topológicos y sus deformaciones continuas.

La noción de fibración aparece naturalmente en topología y geometría. Son ejemplos de fibraciones los revestimientos y los fibrados. Una fibración puede ser pensada como una familia continua de espacios, las fibras, parametrizada por el espacio base.

Las fibraciones juegan un rol central en topología algebraica. Por ejemplo, toda fibración induce una sucesión exacta larga de grupos de homotopía, relacionando aquellos del espacio base, del espacio total y de las distintas fibras. Esta es una de las herramientas más efectivas para el cálculo de grupos de homotopía (ver por ejemplo [Sp66]). Con respecto a la homología, Serre introduce en [Se51] sucesiones espectrales para calcular la homología y cohomología de las fibraciones. A partir de la sucesión espectral cohomológica, Serre deriva los resultados más importantes que se obtuvieron hasta el momento respecto de los grupos de homotopía de las esferas.

Las fibraciones de Grothendieck [Gr71] (o categorías fibradas) son de algún modo el análogo a las fibraciones de espacios en el contexto categórico, ya que pueden ser pensadas como familias de categorías parametrizadas por la categoría base. A diferencia de las fibraciones topológicas, en una fibración de Grothendieck las fibras pueden variar arbitrariamente.

Si bien originariamente se usaron como un instrumento en teoría de categorías y en geometría algebraica, las fibraciones de Grothendieck también demostraron ser de gran utilidad en la teoría de homotopía de categorías. En efecto, muchos de los resultados de Quillen, Segal y Thomason mencionados arriba pueden ser reinterpretados en términos del comportamiento de las fibraciones respecto al funtor espacio clasificante.

Es el objetivo principal de esta tesis estudiar este comportamiento, poniendo en perspectiva los resultados clásicos en el tema, y obteniendo nuevos resultados en el estudio de los tipos de homotopía de estructuras categóricas.

El espacio clasificante de una categoría C se construye a partir del nervio NC . El nervio es un conjunto simplicial, un objeto de naturaleza combinatoria que codifica la información de la categoría. Dada $E \rightarrow B$ una fibración de categorías, proponemos construcciones alternativas para el nervio de E , el nervio fibrado $N_f E$ y el nervio clivado $N_c E$. Probada la equivalencia de estas construcciones con el nervio usual (cf. 4.3.3, 4.3.6), los nervios fibrado y clivado resultan en una descripción más eficiente del tipo de homotopía del espacio clasificante de la categoría total.

El nervio fibrado $N_f E$ es un conjunto bisimplicial que preserva de algún modo la estructura fibrada de E . En 4.1.12 presentamos uno de los resultados fundamentales de esta construcción: un morfismo de fibraciones que es una

equivalencia homotópica fibra a fibra es una equivalencia homotópica entre las categorías totales. Una consecuencia inmediata de este resultado es el famoso Teorema A de Quillen (cf. 4.4.3), y su versión relativa (cf. 4.4.2).

Estableciendo analogías entre espacios y categorías, probamos en 5.2.3 que toda fibración da origen a una sucesión espectral en homología, recuperando una versión de la sucesión espectral de Serre. Como corolario exhibimos una versión homológica del Teorema A (cf. 5.2.8).

Cuando los funtores de cambio de base son equivalencias homotópicas decimos que la fibración es de Quillen. El resultado fundamental 5.3.16 afirma que nuestro funtor $E \mapsto B_f E$ manda fibraciones de Quillen en quasifibraciones, una versión relajada de fibración topológica. El Teorema B de Quillen (cf. 5.3.18) puede ser reinterpretado de este modo.

Una fibración escindida $E \rightarrow B$ es una fibración que admite un clivaje cerrado. Las fibraciones escindidas son una clase muy especial de fibraciones, y para ellas presentamos el nervio clivado, una variante del nervio fibrado mucho más pequeña y a la vez suficiente para describir la situación (cf. 4.2.12). Entre otras aplicaciones, derivamos el Teorema de Thomason que caracteriza los colímites homotópicos en $\mathcal{C}at$ (cf. 5.1.3), estudiamos una categoría equipada con la acción de un grupo (cf. 5.4), y recuperamos, salvo isomorfismo, el nervio clásico del clivado usando la construcción codiagonal (cf. 4.5.9).

Aplicando los métodos y elementos descritos arriba se obtuvieron también los siguientes resultados originales. Introducimos una descripción novedosa de la subdivisión de categorías (cf. 6.3.4), y probamos la equivalencia con las definiciones previas (cf. 6.4.3). Si C es una categoría pequeña, entonces su subdivisión $Sd(C)$ es otra categoría, localmente más simple, pero con el mismo tipo de homotopía. Los resultados fundamentales respecto a esta construcción son (1) $Sd^2(C)$ es un poset para toda C (cf. 6.5.5), y (2) existe una equivalencia homotópica natural $Sd(C) \rightarrow C$ (cf. 6.7.8). La subdivisión $Sd(C)$ juega el rol de *resolución* o *reemplazo cofibrante*, y el morfismo $Sd(C) \rightarrow C$ el de *aumentación*. Presentamos dos aplicaciones de esta construcción. La primera es una demostración de que las categorías homotópicas de posets y de categorías coinciden (cf. 6.8.4), resultando los posets en modelos para tipos de homotopía. La segunda es el teorema 7.5.13 en que se establece una construcción universal que involucra 2-categorías y funtores laxos, y que es usada luego en la tesis.

La construcción de espacios clasificantes de 2-categorías queda justificada a partir del trabajo de Bullejos y Cegarra [BC03], en el que prueban que las distintas construcciones usadas previamente son coherentes entre sí. En [BC03] introducen también una versión del Teorema A de Quillen para 2-funtores. En esta tesis, usando la subdivisión de categorías y nuestros resultados en fibraciones de categorías, extendemos el resultado de [BC03] obteniendo una

versión del Teorema A para funtores laxos (cf. 8.6.2). Aplicamos el Teorema A laxo para probar que la categoría homotópica de 2-categorías y funtores laxos es equivalente a la categoría homotópica usual (cf. 9.3.5). Por último, usamos los resultados en fibraciones y el Teorema A laxo para caracterizar el espacio de lazos de una 2-categoría bajo ciertas condiciones (cf. 9.4.9). Se deriva de este teorema el método clásico para delooper una categoría monoidal en 9.5.5.

Organización de la tesis

En el capítulo 1 fijamos notaciones, damos referencias, y revisamos los preliminares que necesitaremos acerca de conjuntos simpliciales y construcciones afines. En el capítulo 2 damos una rápida introducción a la teoría de homotopía de categorías, y ofrecemos las referencias principales.

Los siguientes tres capítulos están dedicados a las fibraciones de categorías. El capítulo 3 presenta las definiciones y construcciones fundamentales en torno a las fibraciones de Grothendieck. En el capítulo 4 introducimos los nervios fibrado y clivado para fibraciones, y derivamos las propiedades fundamentales. El capítulo 5 es una colección de aplicaciones de los nervios fibrado y clivado.

En el capítulo 6 nos dedicamos a la subdivisión de categorías.

Los capítulos 7, 8 y 9 se centran en las 2-categorías y sus espacios clasificantes. El capítulo 7 introduce las definiciones y notaciones básicas sobre 2-categorías, y las construcciones que utilizaremos más adelante. En el capítulo 8 se estudian las distintas formas de asociar un espacio a una 2-categoría. Varios de los resultados de este capítulo son originales de [BC03]; nuestras demostraciones son versiones de las presentadas allí. Al final del capítulo presentamos una versión del Teorema A para funtores laxos. En el capítulo 9 usamos los resultados en fibraciones, subdivisión y 2-categorías para caracterizar el espacio de lazos de una 2-categoría.

La tesis termina con dos breves apéndices. En el primero (A) repasamos algunas construcciones, herramientas y ejemplos sobre categorías homotópicas. El segundo (B) lo usamos para recordar algunos hechos básicos sobre prehaces de categorías, el lema de Yoneda y extensiones de Kan.

Índice general

Introducción	i
Glosario de categorías	viii
1. Preliminares en métodos simpliciales	1
1.1. La categoría Δ	1
1.2. Conjuntos simpliciales	2
1.3. Ejemplos	4
1.4. Realización geométrica y homología	6
1.5. Conjuntos bisimpliciales	9
1.6. La construcción codiagonal	10
1.7. Grupos abelianos simpliciales	11
1.8. Grupos abelianos bisimpliciales	12
2. Homotopía de categorías pequeñas	14
2.1. Nervio	14
2.2. Espacio clasificante	15
2.3. Propiedades Básicas	16
2.4. Grupo fundamental de una categoría	18
2.5. Homología de una categoría	19
2.6. Teorema Fundamental	21
3. Fibraciones de Grothendieck	22
3.1. Primeras definiciones	22
3.2. Algunas propiedades básicas	24
3.3. Clivajes	26
3.4. Morfismos entre fibraciones	27
3.5. Cambios de fibra	28
3.6. Fibración asociada a un funtor	29
3.7. Morfismos buenos y muy buenos	30
3.8. Construcción de Grothendieck	32
4. Espacios clasificantes de fibraciones	34
4.1. Nervio fibrado	34
4.2. Nervio clivado	37
4.3. Relación con el nervio clásico	39

4.4.	El Teorema A de Quillen y su forma relativa	42
4.5.	Fibraciones y la construcción codiagonal	43
5.	Ejemplos y aplicaciones	46
5.1.	Colímites homotópicos de categorías	46
5.2.	Sucesión espectral de una fibración	47
5.3.	Fibraciones de Quillen y el Teorema B	49
5.4.	Acciones de grupos y TCP	52
6.	Subdivisión de categorías	55
6.1.	La categoría de símplices de C	55
6.2.	Los funtores sup e ínf	56
6.3.	La subdivisión de una categoría	58
6.4.	Suryecciones y subdivisión	60
6.5.	Subdivisión y posets	61
6.6.	Funtorialidad de la subdivisión	62
6.7.	El functor de aumentación $\epsilon : \text{Sd}(C) \rightarrow C$	63
6.8.	Aplicación: La categoría homotópica de posets	66
7.	2-Categorías	68
7.1.	Definiciones y ejemplos	68
7.2.	2-Funtores	71
7.3.	Funtores laxos	72
7.4.	Fibras homotópicas	74
7.5.	La construcción \tilde{C}	75
8.	Tipo homotópico de una 2-categoría	80
8.1.	El 2-nervio	80
8.2.	Equivalencias homotópicas	82
8.3.	El nervio geométrico	83
8.4.	Equivalencia entre ambas construcciones	84
8.5.	Teorema A para 2-funtores	87
8.6.	Teorema A para funtores laxos	89
9.	Espacio de lazos de una 2-categoría	91
9.1.	La categoría $\Delta//C$	91
9.2.	El functor $\text{sup} : \Delta//C \rightsquigarrow C$	92
9.3.	La categoría $\text{Ho } \mathcal{Lax}$	94
9.4.	Espacio de lazos de una 2-categoría	95
9.5.	Caso de una categoría monoidal estricta	96

A. Categorías homotópicas	99
A.1. Localización de categorías	99
A.2. Clases saturadas	100
A.3. Modelos para tipos de homotopía	102
B. Categorías de prehaces	104
B.1. Prehaces y el Lema de Yoneda	104
B.2. Funtores singulares y extensión de Kan	105
B.3. Ejemplos y aplicaciones	107

Glosario de categorías

Dada \mathcal{C} una categoría, denotamos por $\text{ob}(\mathcal{C})$ su conjunto (o clase) de objetos y por $\text{fl}(\mathcal{C})$ su conjunto (o clase) de flechas. Dados X e Y objetos de \mathcal{C} , denotamos con $\mathcal{C}(X, Y)$ el conjunto de flechas $X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} .

A continuación introducimos notaciones para algunas de las categorías que usaremos, describiendo en cada caso los objetos y las flechas.

Set - conjuntos y funciones;

Cat - categorías pequeñas y funtores;

Top - espacios topológicos y funciones continuas;

sSet - conjuntos simpliciales y morfismos simpliciales; en general, *sC* denota la categoría de objetos simpliciales en \mathcal{C} (e.g. *sCat*, *sTop*, *sAb*, etc);

Poset - conjuntos parcialmente ordenados (posets) y morfismos de orden;

Gr - grupos y morfismos de grupos;

Ab - grupos abelianos y morfismos de grupos;

Ch_{≥0} - complejos de cadenas de grupos abelianos y morfismos de complejos;

bsSet - conjuntos bisimpliciales y morfismos bisimpliciales.

Fib - fibraciones (de Grothendieck) y morfismos fibrados;

Cliv - fibraciones equipadas con un clivaje y morfismos clivados;

2Cat - 2-categorías pequeñas y 2-funtores;

Lax - 2-categorías pequeñas y funtores laxos.

Capítulo 1

Preliminares en métodos simpliciales

La topología algebraica se centra en el estudio de los tipos de homotopía de espacios mediante la asignación de invariantes discretos, como por ejemplo los grupos de homología. Estos espacios suelen estar dados en forma combinatoria, como pegados de símlices o celdas. Tal es el caso de los poliedros, cuya estructura se describe a partir de complejos simpliciales, y de los CW-complejos. Los conjuntos simpliciales son una abstracción de los complejos simpliciales, mucho más cómoda para el manejo algebraico y categórico.

Los conjuntos simpliciales, y en general los objetos simpliciales, demostraron ser de gran utilidad no sólo en topología algebraica, sino también en álgebra homológica, geometría algebraica, etcétera. En este capítulo repasamos definiciones y propiedades sobre conjuntos simpliciales, y algunas de sus aplicaciones. Entre las muchas referencias destacamos las siguientes: [May67], [GZ67], [GM96], [GJ99].

1.1 La categoría Δ

1.1.1 Notación. La categoría Δ tiene por objetos los ordinales finitos

$$[n] = \{0 < 1 < \dots < n\} \quad n \geq 0$$

y sus flechas son las funciones $\xi : [m] \rightarrow [n]$ monótonas no decrecientes. Una *inyección elemental* es un morfismo inyectivo $[n-1] \rightarrow [n]$, y una *suryección elemental* es un morfismo suryectivo $[n+1] \rightarrow [n]$. Denotamos δ_i la inyección elemental cuya imagen no contiene a i , y σ_j la suryección elemental que toma dos veces el valor j . Notar que se está haciendo un abuso de notación, pues δ_i y σ_j refieren a distintos morfismos al variar n .

1.1.2. Es fácil ver que todo morfismo $\xi : [m] \rightarrow [n]$ en Δ se factoriza en la forma

$$\xi = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_k} \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_l}$$

y además esta factorización es única si se pide $i_1 > \dots > i_k$ y $j_1 < \dots < j_l$.

Esta descripción permite presentar la categoría Δ en términos de generadores y relaciones (cf. [McL98, VII.5]). Está generada por las inyecciones y suryecciones elementales, sujetas a las siguientes relaciones, conocidas como

identidades simpliciales:

$$\begin{aligned} \delta_i \delta_j &= \delta_{j+1} \delta_i & i \leq j \\ \sigma_i \delta_j &= \delta_{j-1} \sigma_i & i < j - 1 \\ \sigma_i \delta_j &= \text{id} & i = j, j - 1 \\ \sigma_i \delta_j &= \delta_j \sigma_{i-1} & i > j \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_{j-1} \sigma_i & i \leq j \end{aligned}$$

1.1.3 Definición. Sea C una categoría. Un *objeto simplicial* (a valores en C) es un funtor $K : \Delta^\circ \rightarrow C$. Aquí Δ° denota la categoría opuesta a Δ , que se obtiene invirtiendo el sentido de las flechas. Un *morfismo simplicial* $f : K \rightarrow K'$ es una transformación natural. Con sC denotamos la categoría de objetos simpliciales y morfismos simpliciales.

1.1.4. La observación 1.1.2 ofrece una definición alternativa y equivalente para objeto simplicial. Un *objeto simplicial* K consta de una colección

$$\{K_n\}_{n \geq 0} \quad \begin{array}{ll} d_i : K_n \rightarrow K_{n-1} & 0 \leq i \leq n \\ s_j : K_n \rightarrow K_{n+1} & 0 \leq j \leq n \end{array}$$

donde K_n son objetos de C , y d_i y s_j son morfismos estructurales satisfaciendo identidades duales a las descritas arriba. Los d_i son llamados *caras* y los s_j *degeneraciones*. Un morfismo simplicial $f : K \rightarrow K'$ consta de una colección $\{f_n : K_n \rightarrow K'_n\}_{n \geq 0}$ de morfismos de C que conmutan con las caras y degeneraciones. Si K es dado como un funtor $\Delta^\circ \rightarrow C$, entonces $K_n = K([n])$, $d_i = K(\delta_i)$, $s_j = K(\sigma_j)$ y en general notaremos $\xi^* = K(\xi)$.

1.1.5 Ejemplo. Un *conjunto simplicial* es un objeto simplicial a valores en Set . Análogamente se definen los *grupos simpliciales*, los *espacios simpliciales*, las *categorías simpliciales*, etc.

1.2 Conjuntos simpliciales

1.2.1 *Notación.* Si K es un conjunto simplicial, los elementos de K_n son llamados *n-símplices* o *símplices de dimensión n*. Si x es un *n-símplex* de K y $\xi : [m] \rightarrow [n]$ es inyectiva, decimos que $\xi^*(x)$ es una *cara* de x . Si en cambio ξ es suryectiva, decimos que $\xi^*(x)$ es una *degeneración* de x . Un *símplex* x se dice *degenerado* si está en la imagen de algún s_j .

1.2.2 Ejemplo. Los siguientes son algunos de los conjuntos simpliciales más simples.

- El *punto* pt es aquel que consta de un *símplex* en cada dimensión. Es el objeto final de $sSet$.

- El *intervalo* I es el conjunto simplicial generado libremente por un 1-símplex x . Tiene exactamente 3 símplexes no degenerados: x , d_0x y d_1x .
- El k -*símplex estándar* $\Delta[k]$ es el conjunto simplicial representado por $[k]$, es decir $\Delta[k]_n = \Delta([n], [k])$. Está generado libremente por el k -símplex $\text{id}_{[k]}$. Un morfismo $\xi : [m] \rightarrow [n]$ induce un morfismo simplicial $\Delta[m] \rightarrow \Delta[n]$ que también denotamos ξ haciendo abuso de notación.
Notar que $\Delta[0] = \text{pt}$ y $\Delta[1] = I$.
- El *borde del k -símplex* $\partial\Delta[k]$ es el subconjunto simplicial de $\Delta[k]$ generado por las caras $d_i(\text{id}_{[k]})$, $i = 0, \dots, n$.

1.2.3. El Lema de Yoneda (cf. B.1.6) establece una biyección natural

$$s\text{Set}(\Delta[n], K) \rightarrow K_n$$

Un morfismo simplicial $f : \Delta[n] \rightarrow K$ queda completamente determinado por el símplex $x = f(\text{id}_{[n]})$ bajo la fórmula

$$f(\xi) = \xi^*(x) \quad \xi \in \Delta[n]_m$$

1.2.4. Dado $x \in K_n$ existen $\bar{x} \in K_m$ no degenerado y $\sigma : [n] \rightarrow [m]$ suryección tal que $\sigma^*(\bar{x}) = x$. Además, \bar{x} y σ son únicos con esta propiedad. En otras palabras, todo símplex x es una degeneración formal de un símplex no degenerado \bar{x} . Diremos que \bar{x} es la *forma normal* de x . De algún modo, un conjunto simplicial queda determinado por sus símplexes no degenerados.

1.2.5 Definición. La *dimensión* de un conjunto simplicial K se define por

$$\dim K = \sup\{n : \exists x \in K_n \text{ no degenerado}\}$$

1.2.6. El d -*esqueleto* de K es el subconjunto simplicial $\text{sk}_d K$ generado por los símplexes de dimensión $\leq d$. Más precisamente, $\text{sk}_d K_n = \{x \in K_n : \dim \bar{x} \leq d\}$ y las caras y degeneraciones de $\text{sk}_d K$ son aquellas de K . Notar que

$$\dim(K) \leq d \iff K = \text{sk}_d(K)$$

Por ejemplo, $\partial\Delta[n] = \text{sk}_{n-1} \Delta[n]$.

1.2.7. Los productos, coproductos, y en general los límites y colímites en $s\text{Set}$ se calculan lugar a lugar, como en cualquier categoría de prehaces (cf. B.1.10).

1.3 Ejemplos

En esta sección repasamos varias familias de ejemplos. Muchas de ellas pueden ser interpretadas en términos de *funtores singulares* (cf. B.2.1).

1.3.1 Ejemplo. Dado $n \geq 0$, denotamos $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ al n -simplex topológico

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) : t_i > 0, \sum t_i = 1\}$$

Se definen morfismos $\delta_i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ y $\sigma_j : \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n$ por

$$\begin{aligned} \delta_i(t_0, \dots, t_{n-1}) &= (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) \\ \sigma_j(t_0, \dots, t_{n+1}) &= (t_0, \dots, t_i + t_{i+1}, \dots, t_{n+1}) \end{aligned}$$

El *conjunto simplicial singular* $S(X)$ de un espacio X está dado por los siguientes datos.

$$S(X)_n = \mathcal{T}op(\Delta^n, X) \quad d_i(f) = f \circ \delta_i \quad s_j(f) = f \circ \sigma_j$$

Este conjunto simplicial tiene en general dimensión infinita.

1.3.2 Ejemplo. Dada C una categoría pequeña, su *nervio* NC es el conjunto simplicial cuyos n -simplices son las cadenas de n flechas componibles de C .

$$x = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n)$$

La cara d_i borra el objeto x_i , componiendo las flechas $x_{i-1} \rightarrow x_i$ y $x_i \rightarrow x_{i+1}$ cuando $i \neq 0, n$, borrando la flecha $x_0 \rightarrow x_1$ cuando $i = 0$ y borrando la flecha $x_{n-1} \rightarrow x_n$ cuando $i = n$. La degeneración s_j repite el objeto x_j , insertando una identidad entre las dos copias. Si identificamos $[n]$ con una categoría en el modo usual, entonces

$$NC_n = \mathcal{C}at([n], C) \quad d_i(u) = u \circ \delta_i \quad s_j(u) = u \circ \sigma_j$$

Un simplex $x \in NC_n$ es degenerado si y sólo si alguna de las flechas $x_i \rightarrow x_{i+1}$ es una identidad.

1.3.3. Un conjunto parcialmente ordenado (poset) P puede ser visto como una categoría pequeña de modo canónico, con un objeto por cada elemento de P y una flecha $x \rightarrow y$ cada vez que $x \leq y$ en P . Esta construcción es funtorial, y define una inclusión plenamente fiel

$$\mathcal{P}oset \rightarrow \mathcal{C}at$$

Si G es un grupo, entonces podemos construir una categoría con un solo objeto \star tal que $\text{hom}(\star, \star) = G$. Esta construcción también es funtorial y define una inclusión plenamente fiel

$$\mathcal{G}r \rightarrow \mathcal{C}at$$

A partir de estas inclusiones, podemos hablar del nervio de un poset NP y del nervio de un grupo NG , asociando de un modo natural un conjunto simplicial a este tipo de estructuras.

1.3.4 Ejemplo. Si K es un complejo simplicial, denotamos V_K su conjunto de vértices, y S_K su conjunto de símplices. Si \leq es un orden total en V_K , podemos construir un conjunto simplicial \tilde{K} del siguiente modo.

$$\tilde{K}_n = \{(v_0, \dots, v_n) : v_i \leq v_{i+1}, \{v_0, \dots, v_n\} \in S_K\}$$

d_i borra la i -ésima coordenada, y s_j repite la j -ésima. El conjunto simplicial \tilde{K} tiene exactamente un símplex no degenerado por cada símplex de K .

1.3.5. Notar que la construcción \tilde{K} aún tiene sentido en el caso en que \leq es un orden parcial con la propiedad que se restringe a un orden total en cada símplex. Un ejemplo de ésto es el complejo simplicial de cadenas de un poset.

1.3.6. Hay otro modo de ver un complejo simplicial como un conjunto simplicial, sin necesidad de ordenar sus símplices, que es tomando la construcción

$$\hat{K}_n = \{(v_0, \dots, v_n) : \{v_0, \dots, v_n\} \in S_K\}$$

con d_i y s_j como antes. Un aspecto negativo de esta construcción es que cada símplex de K da origen a varios símplices no degenerados de \hat{K} . En particular, si K tiene dimensión mayor que 0 entonces \hat{K} tiene dimensión infinita.

1.3.7 Ejemplo. Si M es un monoide, entonces su *resolución bar* \bar{M} es un conjunto simplicial con $\bar{M}_n = M \times \dots \times M$ el producto de n copias de M , tal que

$$d_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} (x_2, \dots, x_n) & i = 0 \\ (x_1, \dots, x_{i-1}x_i, \dots, x_n) & 0 < i < n \\ (x_1, \dots, x_{n-1}) & i = n \end{cases}$$

$$s_j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_j, 1, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

1.3.8. Es muy importante que este ejemplo puede trasladarse a cualquier categoría base C , donde M es ahora un objeto monoide en C (e.g. monoide topológico, categoría monoidal estricta). La construcción bar \bar{M} es un objeto simplicial de C .

1.4 Realización geométrica y homología

Damos aquí las definiciones de realización geométrica y homología de un conjunto simplicial. También enunciamos algunos resultados, para los que ofrecemos ideas de su demostración y referencias en la literatura.

1.4.1 Definición. La *realización geométrica* de K es el espacio

$$|K| = \coprod_{n \geq 0} K_n \times \Delta^n / \sim$$

donde K_n es visto como espacio discreto y la relación \sim está generada por los pares

$$\begin{aligned} (d_i x, t) &\sim (x, \delta_i t) & x \in K_n, t \in \Delta^{n-1} \\ (s_j x, t) &\sim (x, \sigma_j t) & x \in K_n, t \in \Delta^{n+1} \end{aligned}$$

1.4.2. Se deduce de la presentación usual de los colímites en $\mathcal{T}op$ que

$$|K| = \varinjlim_{\Delta/K} \Delta^n$$

donde el colímite se calcula sobre el diagrama $\Delta/K \rightarrow \mathcal{T}op$, $x \mapsto \Delta^n$ (ver B.2.5). Luego el funtor $|\cdot|$ es la extensión de Kan del funtor $\Delta \rightarrow \mathcal{T}op$, $[n] \mapsto \Delta^n$. Así vemos la adjunción entre la realización geométrica (cf. 1.4.1) y el funtor singular (cf. 1.3.1).

$$|\cdot| : sSet \rightarrow \mathcal{T}op \quad S : \mathcal{T}op \rightarrow sSet$$

$$|\cdot| \dashv S$$

1.4.3 Definición. Decimos que $f : K \rightarrow L$ es una *equivalencia homotópica* si $|f| : |K| \rightarrow |L|$ lo es en $\mathcal{T}op$.

1.4.4 Ejemplo. Si \tilde{K} es el conjunto simplicial inducido por un complejo simplicial (cf. 1.3.4), entonces $|\tilde{K}|$ es el poliedro inducido por K .

1.4.5 Ejemplo. Es claro que $|\Delta[n]| = \Delta^n$. También puede verse que $|\partial\Delta[n]| = \partial\Delta^n \equiv S^{n-1}$ expresando $\partial\Delta[n]$ como el coegalizador de

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta[n-2] \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \coprod_{0 \leq k \leq n} \Delta[n-1],$$

donde si $t \in \Delta[n-2]$ entonces $f(t, i, j) = (\partial_i(t), j)$ y $g(t, i, j) = (\partial_{j-1}(t), i)$, y usando que $|\cdot|$ preserva colímites por ser adjunto a izquierda.

1.4.6 Proposición. $|K|$ es un CW-complejo, con una n -celda por cada n -simplex no degenerado.

Demostración. El siguiente es un push-out en $sSet$, pues lo es en cada coordenada.

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\substack{x \in K_n \\ x \text{ no deg.}}} \partial\Delta[n] & \longrightarrow & \text{sk}_{n-1} K \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\substack{x \in K_n \\ x \text{ no deg.}}} \Delta[n] & \longrightarrow & \text{sk}_n K \end{array}$$

Al aplicar $|\cdot|$ en el cuadrado anterior se obtiene una adjunción de n -celdas. Por último, del colímite

$$K = \varinjlim \text{sk}_n K$$

se deduce que $|K|$ tiene la topología inducida por sus esqueletos $|\text{sk}_n K|$. \square

1.4.7. La fórmula $|K| = \coprod_{n \geq 0} K_n \times \Delta^n / \sim$ permite extender el functor $|\cdot|$ a los espacios simpliciales.

$$|\cdot| : sTop \rightarrow Top$$

Es remarcable que si K es un espacio simplicial, $|K|$ no necesariamente es un CW-complejo, ni aún cuando K_n sea un CW-complejo para todo n .

1.4.8. El functor $|\cdot|$ se lleva en cierta forma bien con los productos. Con intención de ser más precisos recordamos las siguientes definiciones (cf. [GZ67]).

Dado X espacio topológico, X_{CG} es el conjunto subyacente a X con la topología final inducida por los compactos de X . Decimos que X está *compactamente generado* si $X = X_{CG}$. Por ejemplo, $|K|$ está compactamente generado porque tiene la topología inducida por sus simplices. La categoría CG de espacios compactamente generados es una subcategoría reflexiva de Top , donde $X \mapsto X_{CG}$ es el adjunto a derecha para la inclusión. Luego puede verse que CG es completa y cocompleta, y que el producto $X \times_{CG} Y$ en CG es igual a $(X \times Y)_{CG}$.

1.4.9 Proposición. Se tiene un isomorfismo natural $|K \times L| \cong (|K| \times |L|)_{CG}$. En particular, si $|K|$ es localmente compacto vale

$$|K \times L| \cong |K| \times |L|$$

Demostración. Tanto en CG como en $sSet$ vale la ley exponencial, es decir multiplicar por un objeto admite un adjunto a derecha (ver B.3.2). Luego los funtores

$$L \mapsto |K \times L| \quad L \mapsto (|K| \times |L|)_{CG}$$

son cocontinuos y para ver que coinciden basta verlo en los generadores $\Delta[n]$. Pero por el mismo motivo, para probar $|K \times \Delta[n]| \cong |K| \times |\Delta[n]|$ basta ver que

$$|\Delta[m] \times \Delta[n]| \cong |\Delta[m]| \times |\Delta[n]|$$

lo cual se verifica fácilmente. \square

1.4.10 Definición. Dados $f, g : K \rightarrow L$ morfismos simpliciales, una *homotopía simplicial* $h : f \cong g$ es un morfismo simplicial $h : K \times I \rightarrow L$ tales que $h\partial_0 = f$ y $h\partial_1 = g$. Aquí $\partial_0, \partial_1 : \text{pt} \rightarrow I$ son las inclusiones.

1.4.11. La relación $f \cong g$ es reflexiva, pero en general no es simétrica ni transitiva. Esto sí vale cuando el codominio es un *complejo de Kan*. Los complejos de Kan juegan un rol fundamental en la teoría de homotopía de conjuntos simpliciales (cf. [GZ67], [May67], [GJ99]).

1.4.12. Por 1.4.9 una homotopía simplicial $f \cong g$ induce una homotopía continua $|f| \cong |g|$ al aplicar el functor realización geométrica.

1.4.13 Definición. Sea K un conjunto simplicial. Definimos $C(K) \in \mathcal{Ch}_{\geq 0}$ como el complejo cuyas d -cadenas son $\mathbb{Z}[K_d]$, el grupo abeliano libre generado por K_d , y cuya diferencial $\partial : C_d(K) \rightarrow C_{d-1}(K)$ manda un elemento básico $x \in K_n$ a $\partial(x) = \sum_i (-1)^i d_i x$. Las identidades simpliciales implican $\partial \circ \partial = 0$. La *homología* de K es la homología del complejo de cadenas $C(K)$.

1.4.14. Estas construcciones son functoriales.

$$C : s\text{Set} \rightarrow \mathcal{Ch}_{\geq 0} \quad H_n : s\text{Set} \rightarrow \mathcal{Gr}$$

1.4.15 Ejemplo. La *homología simplicial* de un complejo simplicial K es la homología de \tilde{K} tal como la definimos arriba (cf. 1.3.4). La *homología singular* de un espacio X se define como la homología de $S(X)$ (cf. 1.3.1).

1.4.16. La unidad de la adjunción $|\cdot| \dashv S$ definen un morfismo $\eta : K \rightarrow S|K|$. Si $x \in K_n$, entonces $\eta_x : \Delta^n \rightarrow |K|$ es la función característica del simplex indexado por x .

Usando la sucesión espectral que induce la filtración por esqueletos, en [May67, III.16.2] se prueba que η induce isomorfismos en la homología

$$H_n(K) \xrightarrow{\sim} H_n(|K|)$$

Este isomorfismo permite calcular de modo combinatorio la homología singular de un espacio para el que se conoce una estructura simplicial.

1.5 Conjuntos bisimpliciales

1.5.1 Definición. Un *conjunto bisimplicial* es un funtor $K : \Delta^\circ \times \Delta^\circ \rightarrow \mathcal{S}et$. Un morfismo de conjuntos simpliciales $K \rightarrow L$ es una transformación natural. Denotamos $bs\mathcal{S}et$ la categoría de conjuntos bisimpliciales.

1.5.2. Un conjunto bisimplicial K puede ser visto como una familia de conjuntos $\{K_{m,n}\}_{m,n \geq 0}$ equipada con operadores horizontales y verticales de caras y degeneraciones

$$\begin{array}{ll} d_i^h : K_{m,n} \rightarrow K_{m,n-1} & s_j^h : K_{m,n} \rightarrow K_{m,n+1} \\ d_i^v : K_{m,n} \rightarrow K_{m-1,n} & s_j^v : K_{m,n} \rightarrow K_{m+1,n} \end{array}$$

satisfaciendo las identidades simpliciales y tales que los operadores horizontales y los verticales conmutan (cf. 1.1.2).

1.5.3. Bajo la ley exponencial, un conjunto bisimplicial se identifica con un objeto simplicial en $s\mathcal{S}et$.

$$\mathcal{S}et^{\Delta^\circ \times \Delta^\circ} \cong (\mathcal{S}et^{\Delta^\circ})^{\Delta^\circ}$$

1.5.4 *Notación.* Denotamos con $\Delta[m, n]$ al conjunto bisimplicial representado por $[m] \times [n] \in \text{ob}(\Delta \times \Delta)$.

1.5.5 *Notación.* Dado K conjunto bisimplicial, con $\{m \mapsto K_{m,n}\}$ denotamos el n -ésimo conjunto simplicial *vertical*, que se obtiene fijando la segunda coordenada igual a n . El m -ésimo conjunto simplicial *horizontal* $\{n \mapsto K_{m,n}\}$ se define de modo análogo. Denotamos por $\text{diag}(K)$ el conjunto simplicial *diagonal*, que se obtiene como la composición de K con el funtor diagonal $\Delta^\circ \rightarrow \Delta^\circ \times \Delta^\circ$.

1.5.6 Ejemplo. Si K y L son conjuntos simpliciales, su *producto externo* $K \times_e L$ es el conjunto bisimplicial con (m, n) -símplices $K_m \times L_n$, con operadores verticales dados por los de K y horizontales dados por los de L . Notar que $K \times L = \text{diag}(K \times_e L)$.

1.5.7 Definición. La *realización geométrica* de K es el espacio $|\text{diag}(K)|$.

1.5.8. Se tienen homeomorfismos naturales entre la realización geométrica de K y los espacios obtenidos primero realizando en una dirección y luego en la otra.

$$|n \mapsto |m \mapsto K_{m,n}|| \cong |\text{diag}(K)| \cong |m \mapsto |n \mapsto K_{m,n}||$$

Estos homeomorfismos siguen de que las tres construcciones son cocontinuas, del isomorfismo $\text{diag}(\Delta[r, s]) = \Delta[r] \times \Delta[s]$ y de $|\Delta[r] \times \Delta[s]| = \Delta^r \times \Delta^s$.

1.5.9 Definición. Si $f : K \rightarrow L$ es un morfismo de conjuntos bisimpliciales, decimos que f es una *equivalencia homotópica* si su realización geométrica $f_* : |\text{diag}(K)| \rightarrow |\text{diag}(L)|$ lo es.

1.5.10. El siguiente criterio es muy útil a la hora de probar que un morfismo es una equivalencia homotópica. Se pueden consultar demostraciones en [BK72, XII,2.3] y [GJ99, IV,1.9].

1.5.11 Proposición. Sea $f : K \rightarrow L$ un morfismo en $bsSet$ tal que para todo n el morfismo inducido $f_* : \{m \mapsto K_{m,n}\} \rightarrow \{m \mapsto L_{m,n}\}$ es una equivalencia homotópica en $sSet$. Entonces f es una equivalencia homotópica.

1.6 La construcción codiagonal

La construcción codiagonal asocia un conjunto simplicial a un conjunto bisimplicial, emulando la construcción del complejo total de un complejo doble (cf. [CR05], ver también [AM66]).

1.6.1 Definición. Dado K un conjunto bisimplicial, su *codiagonal* $\nabla(K)$ es el conjunto simplicial cuyos n -símplices son

$$\nabla(K)_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) : x_i \in K_{i,n-i}, d_0^h x_i = d_{i+1}^v x_{i+1} \text{ para } 0 \leq i < n\}$$

y cuyas caras y degeneraciones están dadas por

$$\begin{aligned} d_i(x_0, \dots, x_n) &= (d_i^h x_0, d_{i-1}^h x_1, \dots, d_1^h x_{i-1}, d_i^v x_{i+1}, \dots, d_i^v x_n) \\ s_j(x_0, \dots, x_n) &= (s_j^h x_0, s_{j-1}^h x_1, \dots, s_0^h x_j, s_j^v x_j, \dots, s_j^v x_n). \end{aligned}$$

1.6.2. La construcción codiagonal es una alternativa a la diagonal, y presenta la siguiente ventaja conceptual: asumiendo que un (m, n) -símplex tiene dimensión total $m + n$, el funtor ∇ preserva la dimensión.

1.6.3. Se tiene un morfismo natural $\theta : \text{diag}(K) \rightarrow \nabla(K)$, que manda un n -símplex x de $\text{diag}(K)$ en

$$\theta(x) = ((d_1^v)^n x, (d_2^v)^{n-1} d_0^h x, \dots, (d_{i+1}^v)^{n-i} (d_0^h)^i x, \dots, (d_0^h)^n x).$$

1.6.4. El siguiente teorema es debido a Cegarra y Remedios [CR05], y puede interpretarse como una versión homotópica del Teorema de Eilenberg-Zilber.

1.6.5 Teorema. El morfismo $\theta : \text{diag}(K) \rightarrow \nabla(K)$ es una equivalencia homotópica.

1.7 Grupos abelianos simpliciales

Un grupo abeliano simplicial es un objeto simplicial en la categoría $\mathcal{A}b$ de grupos abelianos. Las identidades simpliciales, junto con la rigidez de los morfismos de grupos, llevan a que un grupo abeliano simplicial pueda ser descrito de un modo más simple respecto a la presentación usual.

1.7.1. A partir de un grupo abeliano simplicial A pueden derivarse dos complejos de cadenas; el primero, $C(A)$, tiene los mismos grupos que A , con diferencial $\partial = \sum_i (-1)^i d_i$; el segundo, $N(A)$, es el complejo con n -cadenas dadas por

$$N(A)_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(d_i : A_n \rightarrow A_{n-1})$$

y con diferencial $\partial = d_n$. Se tiene una inclusión de complejos de cadenas

$$i : N(A) \rightarrow C(A)$$

1.7.2 Proposición. *La inclusión $i : N(A) \rightarrow C(A)$ induce isomorfismos en la homología.*

Demostración. Se considera la siguiente filtración de $C(A)$:

$$F_p C(A)_n = \{x \in A_n : d_i x = 0 \forall i < p\}$$

se tiene $F_0 C(A) = C(A)$ y $\bigcap_p F_p C(A) = N(A)$. Por un argumento de paso al límite basta con probar que la inclusión $\alpha : F_{p+1} C(A) \rightarrow F_p C(A)$ induce isomorfismos en la homología. Puede verse que el morfismo $\beta : F_p C(A) \rightarrow F_{p+1} C(A)$ definido por

$$r(x) = \begin{cases} x & x \in F_p C(A)_n, n \leq p \\ x - s_p d_p x & x \in F_p C(A)_n, n > p \end{cases}$$

es un inverso para la inclusión salvo homotopía de cadenas, de donde el resultado sigue. Más precisamente, $\beta\alpha = \text{id}$ y una homotopía $\phi : \alpha\beta \cong \text{id}$ está dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & x \in F_p C(A)_n, n < p \\ (-1)^p s_p x & x \in F_p C(A)_n, n \geq p \end{cases}$$

□

1.7.3. En la demostración anterior se prueba que la inclusión $N(A)_n \rightarrow C(A)_n$ admite una sección, por lo que $N(A)_n$ es un sumando directo de $C(A)_n$. De hecho, puede verse que

$$C(A) = N(A) \oplus D(A)$$

donde $D(A)$ es el subcomplejo generado por los elementos degenerados de A (cf. [May67, §22]).

1.7.4 Corolario (Teorema de normalización). *La proyección al cociente*

$$C(A) \rightarrow C_N(A) = C(A)/D(A)$$

induce isomorfismos en homología.

1.7.5. En particular, la homología de un conjunto simplicial (cf. 1.4.13) puede calcularse usando un complejo con una copia de \mathbb{Z} por cada simplex no degenerado.

1.7.6. Como mencionamos antes, un grupo abeliano simplicial contiene mucha información redundante. En tal sentido se tiene el Teorema de Dold-Kan, que es a la vez un resultado fundamental del álgebra homológica y un punto de partida del álgebra homotópica.

1.7.7 Teorema (Teorema de Dold-Kan). *El funtor $N : sAb \rightarrow Ch_{\geq 0}$ es una equivalencia de categorías entre los grupos abelianos simpliciales y los complejos de cadenas.*

Demostración. Uno exhibe directamente un quasi inverso $\Gamma : Ch_{\geq 0} \rightarrow sAb$ para N , que agrega a un complejo de cadenas todas las degeneraciones formales. Una demostración detallada puede consultarse en [May67, §22]. \square

1.8 Grupos abelianos bisimpliciales

1.8.1 Definición. Un *grupo abeliano bisimplicial* es un funtor $A : \Delta^\circ \times \Delta^\circ \rightarrow Ab$. Vía la ley exponencial, A puede ser pensado como un objeto simplicial en la categoría de grupos abelianos simpliciales.

1.8.2. Si $A \in bsAb$, denotamos por $C(A)$ el complejo doble asociado, cuyas (m, n) -cadenas son $A_{m,n}$ y donde los diferenciales horizontales y verticales se obtienen como suma alternada de los operadores de caras.

1.8.3 Proposición. *Si $f : A \rightarrow B$ es un morfismo en $bsAb$ tal que para todo n el morfismo inducido $f_* : \{m \mapsto A_{m,n}\} \rightarrow \{m \mapsto B_{m,n}\}$ induce isomorfismos en homología, entonces $f : \text{Tot } C(A) \rightarrow \text{Tot } C(B)$ también induce isos en la homología.*

Demostración. Sigue de la sucesión espectral asociada a un complejo doble que f induce isomorfismo entre los complejos totales. \square

1.8.4. Vimos para conjuntos bisimpliciales que la diagonal contiene toda la información. Esto se debe a que cualquier (m, n) -simplex tiene una degeneración en la diagonal. Para grupos abelianos bisimpliciales este resultado toma la siguiente forma (cf. [GJ99, IV.2]).

1.8.5 Teorema (Teorema de Eilenberg-Zilber generalizado). *Dado A grupo abeliano bisimplicial, existe un isomorfismo natural*

$$H_n(C(\text{diag } A)) \rightarrow H_n(\text{Tot } C(A))$$

1.8.6. Si K y L son conjuntos simpliciales, entonces el producto exterior $K \times_e L$ da origen a un grupo abeliano bisimplicial $\mathbb{Z}[K \times_e L]$, cuyos (m, n) -símplices están libremente generados por $K_m \times L_n$ (cf. 1.5.6). Por un lado $\mathbb{Z}[K \times_e L]_{m,n}$ se identifica con $\mathbb{Z}[K_m] \otimes \mathbb{Z}[L_n]$, por otro $\text{diag } \mathbb{Z}[K \times_e L] = \mathbb{Z}[K \times L]$. Luego

$$C(K \times L) \rightarrow C(K) \otimes C(L)$$

induce isomorfismos en homología por el teorema anterior. Ésta es la formulación clásica del teorema de Eilenberg-Zilber.

Capítulo 2

Homotopía de categorías pequeñas

En este capítulo presentamos las bases y fundamentos de la teoría de homotopía de categorías pequeñas. El espacio clasificante de una categoría fue introducido por Segal [Se68], y permitió establecer nociones homotópicas en $\mathcal{C}at$. Posteriormente Quillen desarrolló esta teoría como una herramienta para definir y construir los grupos de K-teoría de orden superior (cf. [Qu73]).

Todos los resultados que aparecen en este capítulo son folklore. Por tal motivo no siempre nos detendremos en los detalles de las demostraciones, refiriendo a la literatura en esos casos.

2.1 Nervio

En esta sección describimos el nervio de una categoría, su espacio clasificante y damos algunos ejemplos sencillos de estas construcciones.

2.1.1. Recordamos (cf. 1.3.2) que dada C una categoría pequeña, su nervio NC es el conjunto simplicial cuyos n -símplices son las cadenas

$$x = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n)$$

de n flechas componibles de C .

2.1.2. El nervio es un funtor singular en el sentido de B.2.1. En efecto,

$$NC_n = \mathcal{C}at([n], C).$$

Luego vale la siguiente adjunción (cf. B.2.5)

$$c : s\mathcal{S}et \rightarrow \mathcal{C}at \quad N : \mathcal{C}at \rightarrow s\mathcal{S}et$$

$$c \dashv N$$

donde c es el funtor de *realización categórica*, que asocia a cada conjunto simplicial X una categoría con un objeto por cada 0-símplice, una flecha generadora por cada 1-símplice, y una relación por cada 2-símplice.

2.1.3. Se tiene $NC_0 = \text{ob}(C)$ y $NC_1 = \text{fl}(C)$. Además los morfismos estructurales de C (dominio, codominio, composición, identidad) pueden recuperarse como caras y degeneraciones de NC , de donde el nervio determina completamente a la categoría.

2.1.4. $N : \mathcal{C}at \rightarrow s\mathcal{S}et$ es plenamente fiel. Por este motivo, muchas veces se identifica una categoría con su nervio, y se piensa en categorías como conjuntos simpliciales distinguidos.

2.1.5. Si I es una categoría filtrante y $I \rightarrow \mathcal{C}at$, $i \mapsto C_i$ es un diagrama de categorías, entonces $\varinjlim C_i$ es la categoría que tiene objetos $\varinjlim \text{ob}(C_i)$, flechas $\varinjlim \text{fl}(C_i)$ y morfismos estructurales inducidos por el paso al límite. Esta descripción especial de los colímites filtrantes en $\mathcal{C}at$ implica inmediatamente que el funtor nervio conmuta con colímites filtrantes.

2.2 Espacio clasificante

2.2.1 Definición. El *espacio clasificante* BC es la realización geométrica del nervio, o sea $BC = |NC|$.

$$B : \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{T}op$$

2.2.2. El espacio clasificante BC es un CW-complejo con una n -celda por cada cadena de n flechas componibles en C que no involucra una identidad (cf. 1.4.6). BC tiene un vértice por cada objeto de C , una 1-celda por cada flecha, una 2-celda por cada triángulo conmutativo, etcétera.

2.2.3. El nervio de una categoría NC queda completamente determinado por su 2-esqueleto. Luego el espacio clasificante BC es un CW-complejo determinado por su 2-esqueleto $sk_2 BC$, y el tipo homotópico de BC pareciera estar severamente condicionado por este hecho. Veremos que esto no es así, pues la descripción celular de $sk_2 BC$ contiene información combinatoria que no se refleja en el espacio subyacente.

2.2.4 Ejemplo. Si G es un grupo discreto, entonces BG es un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo $(G, 1)$.

2.2.5 Ejemplo. Si P es un poset, entonces BP es el poliedro asociado al complejo simplicial K_P , cuyos vértices son los elementos de P y cuyos símlices son las cadenas de P . En particular, si P es el poset de símlices de un poliedro K , entonces BP es la subdivisión baricéntrica de K .

2.2.6. Puesto que todo tipo homotópico débil puede ser modelado con un poliedro, sigue que para cualquier espacio X existe una categoría C con X y BC equivalentes homotópicos débiles.

2.2.7 Ejemplo. Si C es el grupoide simplemente conexo con dos objetos,

$$\bullet \rightleftarrows \bullet$$

entonces NC tiene dos símlices no degenerados en cada dimensión. Es fácil ver que existe un homeomorfismo natural $sk_n(BC) = S^n$ entre el k -ésimo esqueleto de K y la esfera, de donde BC es homeomorfo a S^∞ .

2.2.8. El ejemplo anterior muestra que BC puede ser de dimensión infinita aún cuando C tenga finitas flechas.

2.2.9. Dada C categoría pequeña, denotamos por C° su categoría opuesta, que se obtiene invirtiendo el sentido de las flechas. Existe un homeomorfismo canónico entre BC y BC° , que sólo en casos muy especiales puede ser realizado por un funtor. Ejemplos donde sí puede realizarse por un funtor es cuando C es un grupo. Uno de los muchos ejemplos donde no es cuando C es

$$\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$$

2.2.10. Sean C y D las categorías descritas abajo.

$$C = \bullet \rightrightarrows \bullet \quad D = \begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \bullet & & \bullet \\ \searrow & & \swarrow \\ & \bullet & \end{array}$$

Para cualquier funtor $u : C \rightarrow D$ la función $u_* : BC \rightarrow BD$ es homotópica a cero. Como los espacios clasificantes BC y BD son homeomorfos a S^1 , este ejemplo muestra que hay clases homotópicas de funciones continuas que no son realizadas por ningún funtor.

2.3 Propiedades Básicas

Las nociones homotópicas de $\mathcal{T}op$ se levantan a nociones homotópicas en $\mathcal{C}at$ a través del funtor espacio clasificante. En esta sección presentamos los rudimentos de la teoría de homotopía de categorías.

2.3.1 Definición. Un funtor $u : C \rightarrow D$ en $\mathcal{C}at$ es una *equivalencia homotópica* si $u_* : NC \rightarrow ND$ lo es en $sSet$, o equivalentemente si $u_* : BC \rightarrow BD$ lo es en $\mathcal{T}op$.

2.3.2 Definición. Una categoría pequeña C es *contráctil* si BC lo es.

2.3.3 *Notación.* Denotamos con $I = \{0 \rightarrow 1\}$ a la categoría asociada al ordinal de dos elementos. Su espacio clasificante BI es homeomorfo al intervalo real $[0, 1]$.

2.3.4. El funtor nervio admite un adjunto a izquierda y por lo tanto preserva productos (cf. 2.1.2). El funtor de realización geométrica también preserva productos si se trabaja con espacios compactamente generados (cf. 1.4.9). Luego se tiene un homeomorfismo natural

$$B(C \times C') \cong BC \times_{cG} BC'.$$

En particular, se tiene un homeomorfismo $B(C \times I) \cong BC \times [0, 1]$.

2.3.5 Proposición. *Una transformación natural $\eta : u \Rightarrow v : C \rightarrow D$ induce una homotopía $\eta_* : u_* \cong v_* : BC \rightarrow BD$.*

Demostración. Las transformaciones naturales $\eta : u \Rightarrow v : C \rightarrow D$ se corresponden naturalmente con los funtores $C \times I \rightarrow D$. El resultado sigue de la observación anterior (cf. 2.3.4). \square

2.3.6 Corolario. *Si un functor admite un adjunto, entonces es una equivalencia homotópica.*

Demostración. La unidad y la counidad de la adjunción inducen en este caso las homotopías buscadas. \square

2.3.7 Corolario. *Una categoría que tiene objeto inicial o final es contráctil.*

Demostración. En estos casos, la proyección $C \rightarrow \text{pt}$ sobre el objeto final de Cat admite un adjunto. \square

2.3.8 Corolario. *Sea $i : C \rightarrow D$ un morfismo en Cat plenamente fiel. Si existe $r : D \rightarrow C$ y $\eta : \text{id}_D \Rightarrow ir$, entonces i es una equivalencia homotópica, con inversa r .*

Demostración. Como una transformación natural induce una homotopía (cf. 2.3.5), bastará con construir una transformación natural $\epsilon : \text{id}_C \Rightarrow ri$. Dado c objeto de C , como i es pleno el morfismo $\eta_{i(c)} : i(c) \rightarrow iri(c)$ debe ser igual a $i(\epsilon_c)$ para algún $\epsilon_c : c \rightarrow ri(c)$. Definiendo ϵ de este modo, dada $f : c \rightarrow c'$ una flecha en C se tiene

$$i(ri(f)\epsilon_c) = iri(f)i(\epsilon_c) = iri(f)\eta_{i(c)} = \eta_{i(c')}i(f) = i(\epsilon_{c'})i(f) = i(\epsilon_{c'}f)$$

Como i es fiel se tiene que $ri(f)\epsilon_c = \epsilon_{c'}f$ y por lo tanto ϵ es natural. \square

2.3.9. El functor espacio clasificante preserva colímites filtrantes. En efecto, el functor $|\cdot|$ preserva colímites porque es adjunto a izquierda y N preserva colímites filtrantes (cf. 2.1.5).

2.3.10 Proposición. *Si C es una categoría filtrante, entonces C es contráctil.*

Demostración. (cf. [Qu73]) Dado c objeto de C , denotamos C/c la categoría cuyos objetos son las flechas $f : c' \rightarrow c$ en C , y en donde un morfismo $f \rightarrow g$ consiste en un triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} c' & \longrightarrow & c'' \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & c \end{array}$$

Notar que C/c tiene objeto final (id_c) y es por lo tanto contráctil (cf. 2.3.7). Asignando a cada f su dominio se tiene un funtor $C/c \rightarrow C$. Es fácil ver que

$$C = \varinjlim(C/c),$$

donde el colímite se toma sobre el diagrama $C \rightarrow \mathcal{C}at, c \mapsto C/c$. Como el funtor espacio clasificante conmuta con colímites filtrantes resulta $BC = \varinjlim B(C/c)$. Luego puede verse que

$$\pi_n(BC) = \varinjlim \pi_n(B(C/c))$$

y como cada categoría C/c es contráctil, se tiene $\pi_n(BC) = 0$ para todo n . Como BC es un CW-complejo, se concluye que es contráctil. \square

2.4 Grupo fundamental de una categoría

En esta sección repasamos un ejemplo paradigmático de la interacción entre la estructura de una categoría y el tipo homotópico de su espacio clasificante: la caracterización del grupo fundamental en términos de la localización de C . Nuestra referencia es [Qu73]. En [GJ99] puede consultarse una demostración alternativa.

2.4.1 Definición. Sea C una categoría pequeña. Decimos que un funtor $F : C \rightarrow \mathcal{S}et$ *invierte morfismos* si $F(f)$ es una biyección para toda flecha f de C . Denotamos $\mathcal{S}et_{i.m.}^C$ a la subcategoría plena de $\mathcal{S}et^C$ formada por los funtores que invierten morfismos.

2.4.2. Sea $p : E \rightarrow BC$ un revestimiento del espacio clasificante de C . A cada objeto c de C podemos asociarle la fibra $F_E(c) = p^{-1}(c)$, donde c es visto como 0-celda de BC . Toda flecha $f : c \rightarrow c'$ en C induce un camino en BC . Por las propiedades de levantamiento de caminos que tienen los revestimientos, este camino induce una biyección $F_E(f)$ entre las fibras $p^{-1}(c)$ y $p^{-1}(c')$. De este modo queda definido $F_E \in \mathcal{S}et_{i.m.}^C$.

2.4.3. Recíprocamente, dado $F \in \mathcal{S}et_{i.m.}^C$, llamamos C_F a la categoría de pares (c, x) con $c \in C$ y $x \in F(c)$, donde una flecha $f_* : (c, x) \rightarrow (c', x')$ es un morfismo $f : c \rightarrow c'$ en C con $F(f)(x) = x'$. Si llamamos $p : C_F \rightarrow C$ a la proyección $(c, x) \mapsto c$, entonces $p_* : N(C_F) \rightarrow NC$ es un revestimiento de conjuntos simpliciales, y por lo tanto induce un revestimiento de espacios topológicos $B(C_F) \rightarrow BC$ (cf. [GZ67]).

2.4.4. Las construcciones de arriba son functoriales

$$\begin{array}{ccc} \text{Revest}/BC & \rightarrow & \mathcal{S}et_{i.m.}^C & & \mathcal{S}et_{i.m.}^C & \rightarrow & \text{Revest}/BC \\ E & \mapsto & F_E & & F & \mapsto & B(C_F) \end{array}$$

Aquí $Revest/BC$ es la categoría de revestimientos sobre el espacio BC . No es difícil ver que estas construcciones son mutuamente inversas, lo que implica el siguiente resultado.

2.4.5 Proposición. (cf. [Qu73]) *Se tiene una equivalencia de categorías*

$$Revest/BC \cong \mathcal{S}et_{i.m.}^C.$$

2.4.6. Sea G el grupoide que resulta de invertir formalmente las flechas de C . El morfismo canónico $C \rightarrow G$ induce una equivalencia de categorías

$$\mathcal{S}et^G \cong \mathcal{S}et_{i.m.}^C.$$

2.4.7. Si C es conexa, $c \in C$ y G es el grupoide asociado a C , denotando $G_c = G(c, c)$, la inclusión $G_c \rightarrow G$ es una equivalencia de categorías e induce otra

$$\mathcal{S}et^G \cong \mathcal{S}et^{G_c}$$

2.4.8 Teorema. *Hay un isomorfismo canónico $\pi_1(BC, c) = G_c$ entre el grupo fundamental del espacio clasificante y el grupo de automorfismos de c en el grupoide asociado.*

Demostración. Sigue de las equivalencias de categorías

$$\mathcal{S}et^{\pi_1(BC, c)} \cong Revest/BC \cong \mathcal{S}et_{i.m.}^C \cong \mathcal{S}et^G \cong \mathcal{S}et^{G_c}$$

La primera es conocida de la teoría de revestimientos de espacios. Las restantes equivalencias fueron discutidas en esta sección. Notar que uno puede recuperar la clase de isomorfismo de H a partir de $\mathcal{S}et^H$. Para ver esto último, observemos que si H es un grupo, entonces el funtor olvido $\mathcal{S}et^H \rightarrow \mathcal{S}et$ tiene un adjunto a izquierda F (el funtor libre, único salvo isomorfismo) y vale $H = \text{Aut}(F(\text{pt}))$, con pt el conjunto puntual. \square

2.5 Homología de una categoría

A continuación recordamos algunas definiciones sobre homología de categorías.

2.5.1 Definición. Dada C una categoría pequeña, un *módulo sobre C* es un funtor $A : C \rightarrow \mathcal{A}b$, donde $\mathcal{A}b$ es la categoría de grupos abelianos.

2.5.2. La categoría de C -módulos $\mathcal{A}b^C$ es una categoría abeliana, en la que las sumas directas, núcleos, conúcleos, etc. se calculan lugar a lugar (cf. B.1.10).

2.5.3. Se tiene la siguiente adjunción

$$\begin{aligned} \varinjlim : \mathcal{A}b^C &\rightarrow \mathcal{A}b & \text{diag} : \mathcal{A}b &\rightarrow \mathcal{A}b^C \\ \varinjlim &\dashv \text{diag} \end{aligned}$$

donde \varinjlim es el funtor que asocia a cada C -módulo su colímite, y diag es el funtor que asocia a cada grupo abeliano G el C -módulo constante $\text{diag}(G)$. Ambos funtores son aditivos, y se infiere de esta adjunción que \varinjlim es exacto a derecha.

2.5.4 Definición. El m -ésimo grupo de homología de C con coeficientes en A se define como

$$H_m(C, A) = \varinjlim^m A$$

donde \varinjlim^m es el m -ésimo derivado a izquierda del funtor $\varinjlim : \mathcal{A}b^C \rightarrow \mathcal{A}b$.

2.5.5 Proposición. Los grupos $H_m(C, A)$ se pueden calcular usando el siguiente complejo de cadenas

$$C_m(C, A) = \bigoplus_{c_0 \rightarrow \dots \rightarrow c_m} A(c_0) \quad \partial = \sum_i (-1)^i d_i$$

donde

$$d_i(x, c_0 \rightarrow \dots \rightarrow c_m) = \begin{cases} (x, d_i(c_0 \rightarrow \dots \rightarrow c_m)) & i > 0 \\ (A(c_0 \rightarrow c_1)(x), d_0(c_0 \rightarrow \dots \rightarrow c_m)) & i = 0 \end{cases}$$

Demostración. La demostración puede consultarse en [GZ67, AII-3.3]. Utiliza argumentos estándar de álgebra homológica. Primero, es fácil ver que el funtor $\mathcal{A}b^C \rightarrow \mathcal{C}h_{\geq 0}$, $A \mapsto C(C, A)$ es exacto, por lo que $\{H_n(C(C, A))\}_n$ es un δ -funtor. Luego, dado un módulo A se construye un epimorfismo $A' \rightarrow A$ tal que $H_n(C(C, A')) = 0$ para todo n . Esto prueba que el funtor $A \mapsto H_n(C(C, A))$ es *coeffaceable* (cf. [We94]) y por lo tanto el δ -funtor es universal. Como $H_0(C(C, A)) = \varinjlim A$, concluimos que $H_n(C(C, A))$ es el n -ésimo derivado de \varinjlim . \square

2.5.6. Si A es un funtor constante e igual a \mathbb{Z} , entonces la homología $H_m(C, A)$ coincide con la homología del nervio NC tal como se definió antes (cf. 1.4.13). En este caso denotamos directamente $H_m(C)$. Notar que $H_m(C) = H_m(BC)$, donde el lado derecho denota la homología singular del espacio BC (cf. 1.4.16).

2.6 Teorema Fundamental

El teorema fundamental de la teoría de homotopía de categorías fue demostrado originalmente en [Il72], y ofrece una descripción categórica de los tipos homotópicos.

2.6.1 Definición. La categoría homotópica $\mathrm{Ho} \mathcal{C}at$ es la localización (cf. A.1.1) de $\mathcal{C}at$ por las equivalencias homotópicas.

2.6.2 Teorema. *El funtor nervio induce una equivalencia entre las categorías homotópicas.*

$$\mathrm{Ho} \mathcal{C}at \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ho} s\mathcal{S}et$$

2.6.3. El teorema anterior, junto con la clásica equivalencia $\mathrm{Ho} s\mathcal{S}et \cong \mathrm{Ho} \mathcal{T}op$ que en [GZ67] llaman *una descripción combinatoria de los espacios topológicos*, implican la siguiente equivalencia de categorías.

$$\mathrm{Ho} \mathcal{C}at \cong \mathrm{Ho} \mathcal{T}op$$

2.6.4. A partir de esta equivalencia las categorías pequeñas resultan modelos para tipos de homotopía. Surgen de esta observación las siguientes dos preguntas, las cuales nos interesa estudiar:

- cómo calcular los invariantes discretos de $X = BC$ usando la estructura de C ;
- cómo se refleja en el espacio $X = BC$ la estructura adicional que eventualmente tenga C .

En las próximas secciones daremos una respuesta a esta última pregunta para el caso en que C tiene estructura fibrada.

2.6.5. Es sabido que $\mathcal{T}op$, $s\mathcal{S}et$ y $\mathcal{C}at$ admiten estructura de categorías de modelos en el sentido de Quillen (cf. [Qu67], [Th80]). Ambas equivalencias $\mathrm{Ho} s\mathcal{S}et \cong \mathrm{Ho} \mathcal{T}op$ y $\mathrm{Ho} \mathcal{C}at \cong \mathrm{Ho} s\mathcal{S}et$ están inducidas por equivalencias de Quillen entre las categorías originales, la primera dada por la adjunción $|\cdot| \dashv S$ y la segunda por $c\mathrm{Sd}^2 \dashv \mathrm{Ex}^2 N$, donde Sd y Ex son los funtores de subdivisión y extensión definidos por Kan.

2.6.6. Más adelante en la tesis demostraremos las siguientes equivalencias de categorías

$$\mathrm{Ho} \mathcal{C}at \cong \mathrm{Ho} \mathcal{P}oset \quad (\text{cf. 6.8.4})$$

$$\mathrm{Ho} \mathcal{C}at \cong \mathrm{Ho} \mathcal{L}ax \quad (\text{cf. 9.3.5})$$

las cuales se combinan con el teorema fundamental 2.6.2, ofreciendo nuevos modelos para tipos de homotopía: los posets, y las 2-categorías con funtores laxos.

Capítulo 3

Fibraciones de Grothendieck

Una fibración de categorías $E \rightarrow B$ es esencialmente una familia de categorías parametrizada por B . Esta noción fundamental ha tenido numerosas y variadas aplicaciones. En esta tesis nos centraremos en el comportamiento de las fibraciones con respecto al funtor espacio clasificante, obteniendo nuevos resultados en el estudio de homotopía de categorías, y presentando en un contexto natural aquellos de Quillen, Segal y Thomason.

A lo largo de este capítulo trabajamos con lo que usualmente son llamadas categorías cofibradas u opfibradas. Otras nociones de fibraciones entre categorías fueron estudiadas en [Ev75] y [Min05].

Si bien todos los resultados y construcciones admiten formulaciones duales, elegimos trabajar con categorías cofibradas (en lugar de fibradas) para preservar cierta analogía con las fibraciones de espacios topológicos. Finalmente, adoptamos una terminología y una notación dual a la estándar con objeto de simplificar la notación.

3.1 Primeras definiciones

En esta sección repasamos las nociones de fibra y fibra homotópica, e introducimos las definiciones de flechas cartesianas, prefibraciones y fibraciones, además de ilustrar con algunos ejemplos.

3.1.1 Notación. Dada C una categoría, escribimos $C_0 = \text{ob}(C)$ para denotar el conjunto de objetos, y $C_1 = \text{fl}(C)$ para el conjunto de flechas. Si $u : A \rightarrow B$ es un morfismo entre categorías pequeñas y $f \in A_1$, decimos que f está sobre $\phi \in B_1$ si $u(f) = \phi$, y que $f \in A_1$ está sobre $b \in B_0$ si $u(f) = \text{id}_b$.

3.1.2 Definición. Dados $u : A \rightarrow B$ en $\mathcal{C}at$ y $b \in B_0$, la *fibra* u_b es la subcategoría de A de flechas sobre b , y la *fibra homotópica* (o fibra a izquierda) u/b es la categoría cuyos objetos son los pares (a, ϕ) , $a \in A_0$ y $\phi : u(a) \rightarrow b \in B_1$, y cuyas flechas $f : (a, \phi) \rightarrow (a', \phi')$ son los morfismos $f : a \rightarrow a' \in A_1$ tales que $\phi' u(f) = \phi$.

3.1.3 Notación. Haciendo abuso de notación, escribimos A_b y A/b en lugar de u_b y u/b cuando no haya lugar a confusión.

3.1.4. Se tiene una inclusión canónica plenamente fiel $i_b : A_b \rightarrow A/b$, definida en los objetos por $a \mapsto (a, \text{id}_{u(a)})$.

3.1.5 Definición. Sea $p : E \rightarrow B$ un functor entre categorías pequeñas. Una *flecha cartesiana* (para p) es una flecha $f : e \rightarrow e' \in E_1$ satisfaciendo la siguiente propiedad universal: Para toda $g : e \rightarrow e'' \in E_1$ tal que $p(f) = p(g)$ existe una única flecha $h : e' \rightarrow e'' \in E_1$ tal que $p(h) = \text{id}_{p(e')}$ y $hf = g$.

$$\begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{f} & e' \\ & \searrow \forall g & \downarrow \exists! h \\ & & e'' \end{array}$$

$$p(e) \xrightarrow{p(f)} p(e')$$

3.1.6 Notación. En las condiciones de arriba, denotaremos la flecha h por g/f . Notar que g/f sólo tiene sentido si f es cartesiana, $\text{dom } f = \text{dom } g$ y $p(f) = p(g)$.

3.1.7. Las flechas cartesianas pueden pensarse como flechas ortogonales a las fibras. Permiten relacionar unas fibras con otras, dando una suerte de conexión.

3.1.8 Proposición. *Se verifican las siguientes propiedades.*

- a) $(g/f)f = g$; $(hf)/f = h$;
- b) g es cartesiana sii g/f es un isomorfismo; en este caso $f/g = (g/f)^{-1}$.
- c) si f es isomorfismo, entonces f es cartesiana y $g/f = gf^{-1}$.

Demostración. Los ítems a) y c) son inmediatos a partir de la definición.

Para b), observamos que si g/f es un isomorfismo entonces g también cumple la propiedad universal y es por lo tanto cartesiana. Para la vuelta, suponemos que g es cartesiana, luego $(f/g)(g/f)f = (f/g)g = f$ y por unicidad en la propiedad universal se tiene $(f/g)(g/f) = \text{id}$. Análogamente se prueba $(g/f)(f/g) = \text{id}$. \square

3.1.9 Definición. El functor $p : E \rightarrow B$ es una *prefibración* si dados $e \in E_0$ y $\phi : p(e) \rightarrow b \in B_1$ existe $f : e \rightarrow e' \in E_1$ cartesiana tal que $p(f) = \phi$.

3.1.10. A modo informal, podemos decir que una prefibración es un functor que admite suficientes flechas cartesianas.

3.1.11 Definición. El functor $p : E \rightarrow B$ es una *fibración* si es una prefibración y además las flechas cartesianas son cerradas bajo la composición.

3.1.12 Notación. Decimos que B es la *base* de la fibración, y que E es la categoría *total*.

3.1.13. En la categoría total se distinguen dos clases de flechas: las *verticales*, que son proyectadas por p en identidades; y las *horizontales*, que son las flechas cartesianas.

3.1.14 Ejemplo. La proyección $\pi : F \times B \rightarrow B$ es una fibración. Si $(x, b) \in (F \times B)_0$ y $\phi : p(x, b) = b \rightarrow b' \in B_1$, la flecha $(\text{id}_x, \phi) \in (F \times B)_1$ es cartesiana. Las fibras de π son todas isomorfas a F .

3.1.15 Ejemplo. El funtor $\text{cod} : B^I \rightarrow B$ que asigna a cada flecha su codominio es una fibración. Si $f : b \rightarrow b' \in (B^I)_0$ y $\phi : \text{cod}(f) = b' \rightarrow b'' \in B_1$, la flecha $(\text{id}_b, \phi) : f \rightarrow \phi f \in (B^I)_1$ es cartesiana. La fibra de cod sobre b es la categoría *slice* B/b .

Análogamente, el funtor $\text{dom} : B^I \rightarrow B^\circ$ es una fibración.

3.1.16 Ejemplo. El funtor $\text{cod} : S(B) \rightarrow B$ es una fibración. Aquí $S(B)$ denota la categoría cuyos objetos son las flechas de B y cuyas flechas $(u, v) : f \rightarrow g$ son las factorizaciones $g = vfu$. Si $f : b \rightarrow b' \in S(B)_0$ y $\phi : \text{cod}(f) = b' \rightarrow b'' \in B_1$, la flecha $(\text{id}_b, \phi) : f \rightarrow \phi f \in S(B)_1$ es cartesiana. Las fibras de cod son las categorías $(B/b)^\circ$.

Análogamente, el funtor $\text{dom} : S(B) \rightarrow B^\circ$ es una fibración.

3.1.17 Ejemplo. Una subcategoría $A \subset B$ es un *ideal* (a derecha) si toda flecha con dominio en A está en A . Si $A \subset B$ es un ideal, entonces la inclusión $A \rightarrow B$ es una fibración.

3.1.18 Ejemplo. Como los isomorfismos son flechas cartesianas (cf. 3.1.8.c), un funtor entre grupoides que es suryectivo en las flechas es una fibración. En particular, cualquier epimorfismo de grupos $p : E \rightarrow B$ puede ser considerado una fibración entre grupoides de un solo objeto.

3.2 Algunas propiedades básicas

3.2.1 Proposición. $p : E \rightarrow B$ es una prefibración si y sólo si la inclusión $i_b : E_b \rightarrow E/b$ admite un adjunto a izquierda para todo b en B .

Demostración. Si $p : E \rightarrow B$ es una prefibración, dado $b \in B_0$ definimos un funtor $r_b : E/b \rightarrow E_b$ enviando un objeto $(e, \phi : p(e) \rightarrow b)$ al codominio de una flecha cartesiana f sobre ϕ con dominio e . En las flechas, r_b se define usando

la propiedad universal de las flechas cartesianas: $r_b(g) = (f'g)/f$.

$$\begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{f} & r_b(e) \\ & \searrow g & \downarrow r_b(g) \\ & & e' \xrightarrow{f'} r_b(e') \end{array}$$

$$p(e) \longrightarrow p(e') \longrightarrow b$$

De la propiedad universal de las flechas cartesianas se deduce que $r_b \dashv i_b$.

Por otro lado, si $r_b : E/b \rightarrow E_b$ es dado tal que $r_b \dashv i_b$, entonces la unidad de la adjunción $\eta : \text{id}_{E/b} \Rightarrow i_b r_b$ asigna a cada objeto $(e, \phi : p(e) \rightarrow b)$ una flecha cartesiana $\eta_{(e, \phi : p(e) \rightarrow b)}$ sobre ϕ con dominio e . \square

3.2.2. La construcción de r_b no es natural, y depende de una elección de flechas cartesianas (ver 3.3). En cualquier caso, dos construcciones distintas de r_b serán canónicamente isomorfas.

3.2.3 Corolario. Si $p : E \rightarrow B$ es una prefibración, entonces la inclusión $E_b \rightarrow E/b$ es una equivalencia homotópica para todo b (cf. 2.3.6).

3.2.4. Las flechas cartesianas de una fibración satisfacen la siguiente propiedad universal, que extiende la de la definición.

3.2.5 Proposición. Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración y sea $f : e \rightarrow e'$ una flecha cartesiana en E . Dada $g : e \rightarrow e''$ tal que $p(g) = \phi p(f)$ para algún $\phi : p(e') \rightarrow p(e'')$, existe una única flecha $h : e' \rightarrow e''$ sobre ϕ tal que $hf = g$.

$$\begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{f} & e' \\ & \searrow g & \downarrow \exists! h \\ & & e'' \end{array}$$

$$p(e) \xrightarrow{p(f)} p(e') \xrightarrow{\phi} p(e'')$$

Demostración. Como p es una fibración, existe $f' : e' \rightarrow e'''$ flecha cartesiana sobre ϕ , y la composición $f'f : e \rightarrow e'''$ es también cartesiana. La composición $h = (g/(f'f))f'$ está sobre ϕ y satisface $hf = g$, lo que prueba la existencia. Si k es otra flecha sobre ϕ tal que $kf = g$, entonces $(k/f')f'f = g$, de donde $k/f' = g/(f'f)$ y $k = (g/(f'f))f'$, lo que prueba la unicidad. \square

3.2.6. En las condiciones de la proposición anterior, h es cartesiana si y sólo si g lo es. Esto se deduce de 3.1.8 y las igualdades

$$h/f' = ((g/(f'f))f')/f' = g/(f'f)$$

3.3 Clivajes

Un *clivaje* Σ es una elección de flechas cartesianas. Concretamente se tiene la siguiente definición.

3.3.1 Definición. Dada $p : E \rightarrow B$ un morfismo en $\mathcal{C}at$, un *clivaje* Σ (para p) es un subconjunto $\Sigma \subset E_1$ cuyos elementos son flechas cartesianas y tal que dados $e \in E_0$ y $\phi : p(e) \rightarrow b \in B_1$ existe una única $f : e \rightarrow e' \in \Sigma$ satisfaciendo $p(f) = \phi$.

3.3.2 Notación. Notamos $\Sigma_{e,\phi}$ a esta f .

3.3.3. Es claro que p admite un clivaje si y sólo si es prefibración. Una prefibración admite en general muchos clivajes.

3.3.4 Proposición. *Son equivalentes:*

- *Dar un clivaje.*
- *Explicitar para cada b un adjunto a izquierda para $i : E_b \rightarrow E/b$.*

Demostración. Sigue de la proposición 3.2.1 y su demostración. □

3.3.5 Definición. Dados $p : E \rightarrow B$ una prefibración y Σ un clivaje, decimos que Σ es *normal* si contiene a las identidades ($\text{Id} \subset \Sigma$), y que Σ es *cerrado* si es cerrado para la composición ($\Sigma \circ \Sigma \subset \Sigma$).

3.3.6. Toda fibración admite un clivaje normal. Sin embargo, no toda fibración admite un clivaje cerrado.

3.3.7 Definición. Si una fibración admite un clivaje cerrado, entonces diremos que es *escindida*.

3.3.8 Ejemplo. (cf. [Gr71]) Sean E, B grupos, vistos como categorías con un solo objeto, y sea $p : E \rightarrow B$ un morfismo entre ellos. Toda flecha de E es cartesiana puesto que son isomorfismos. Luego p es una fibración si y sólo si p es un epimorfismo de grupos. Un clivaje Σ para p es una sección conjuntista para p . El clivaje es normal si manda el neutro en el neutro, y el clivaje es cerrado si la sección es un morfismo de grupos.

3.3.9. El ejemplo anterior muestra en particular cuán restrictiva es la condición de ser escindida.

3.3.10 Notación. De aquí en más, asumiremos que todos los clivajes son normales.

3.3.11 Lema. *Un clivaje Σ es cerrado si y sólo si para todo par f, f' de flechas componibles de E vale $f, f'f \in \Sigma \Rightarrow f' \in \Sigma$.*

Demostración.

- \Rightarrow) Sean $f : e \rightarrow e', f' : e' \rightarrow e''$ tales que $f, f'f \in \Sigma$, y sea $g : e' \rightarrow e''' = \Sigma_{e', p(f')}$. Queremos ver que $f' = g$. Como el clivaje es cerrado, $gf \in \Sigma$. Luego $gf = \Sigma_{e, p(f'f)} = f'f$, y por lo tanto $f' = g$ (cf. 3.2.5).
- \Leftarrow) Si Σ no es cerrado entonces existen $f : e \rightarrow e', g : e' \rightarrow e'' \in \Sigma$ tales que $gf \notin \Sigma$. Si $h = \Sigma_{e, p(gf)}$ entonces $h \neq gf$, o equivalentemente $h/(gf)$ no es una identidad. Luego $f' = (h/(gf))g$ tiene dominio e' , proyección $p(g)$ y es distinta de g , por lo tanto no está en Σ .

□

3.4 Morfismos entre fibraciones

A continuación discutimos dos nociones de morfismos entre fibraciones, y describimos las categorías correspondientes.

3.4.1 Definición. Dados $\xi = (p : E \rightarrow B)$ y $\xi' = (p' : E' \rightarrow B')$ fibraciones, un *morfismo fibrado* $(u, v) : \xi \rightarrow \xi'$ es un par $u : E \rightarrow E', v : B \rightarrow B'$ de morfismos en $\mathcal{C}at$ tal que u preserva flechas cartesianas y $p'u = vp$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{v} & B' \end{array}$$

3.4.2 Notación. Denotamos $\mathcal{F}ib(\xi, \xi')$ al conjunto de morfismos fibrados $\xi \rightarrow \xi'$, y $\mathcal{F}ib$ a la categoría de fibraciones y morfismos fibrados.

3.4.3 Definición. Sean (ξ, Σ) y (ξ', Σ') fibraciones equipadas con clivajes. Un *morfismo clivado* $(u, v) : (\xi, \Sigma) \rightarrow (\xi', \Sigma')$ es un morfismo fibrado $(u, v) : \xi \rightarrow \xi'$ satisfaciendo $u(\Sigma) \subset \Sigma'$.

3.4.4 Notación. Con $\mathcal{C}liv((\xi, \Sigma), (\xi', \Sigma'))$ denotamos al conjunto de morfismos clivados $(\xi, \Sigma) \rightarrow (\xi', \Sigma')$, y con $\mathcal{C}liv$ a la categoría de pares (ξ, Σ) y morfismos clivados.

3.4.5. Se tienen las siguientes inclusiones de conjuntos.

$$\mathcal{C}liv((\xi, \Sigma), (\xi', \Sigma')) \subset \mathcal{F}ib(\xi, \xi') \subset \mathcal{C}at^I(\xi, \xi')$$

3.4.6 Notación. Por último, denotamos por $\mathcal{E}sc$ la subcategoría plena de $\mathcal{C}liv$ cuyos objetos son los pares (ξ, Σ) con Σ un clivaje cerrado de ξ .

3.4.7. Se tiene el siguiente diagrama, donde la primera es una inclusión plena y la flecha $\mathcal{Cliv} \rightarrow \mathcal{Fib}$ es el funtor olvido $(\xi, \Sigma) \mapsto \xi$.

$$\mathcal{E}sc \subset \mathcal{Cliv} \rightarrow \mathcal{Fib} \subset \mathcal{Cat}^I$$

3.4.8 Notación. Con la notaciones de arriba, diremos que $u : E \rightarrow E'$ es un *morfismo fibrado sobre B* si $B = B'$ y $(u, \text{id}_B) : \xi \rightarrow \xi' \in \mathcal{Fib}(\xi, \xi')$. Análogamente, diremos que $u : E \rightarrow E'$ es un *morfismo clivado sobre B* si $(u, \text{id}_B) \in \mathcal{Cliv}((\xi, \Sigma), (\xi', \Sigma'))$.

3.5 Cambios de fibra

Una fibración puede ser pensada como una generalización de un funtor a valores en \mathcal{Cat} , o dicho en otros términos, una familia de categorías (las fibras) indexadas por la base.

3.5.1 Definición. Sea $\xi = (p : E \rightarrow B)$ una fibración con clivaje Σ . Para cada $\phi : b \rightarrow b' \in B_1$ se define el *cambio de base* $\phi_* : E_b \rightarrow E_{b'}$ como la composición $r_{b'} \tilde{\phi} i_b$, donde $i_b : E_b \rightarrow E/b$ es la inclusión de la fibra en la fibra a izquierda, $\tilde{\phi} : E/b \rightarrow E/b'$ es el funtor obvio, y $r_{b'} : E/b' \rightarrow E_{b'}$ es el adjunto a la inclusión determinado por el clivaje Σ (cf. 3.3.4).

3.5.2. Explícitamente, $\phi_*(e) = \text{cod}(\Sigma_{e,\phi})$ para $e \in E_0$ y $\phi_*(f) = (\Sigma_{e',\phi} f) / \Sigma_{e,\phi}$.

$$\begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{\Sigma_{e,\phi}} & \phi_*(e) \\ f \downarrow & & \downarrow \phi_*(f) \\ e' & \xrightarrow{\Sigma_{e',\phi}} & \phi_*(e') \end{array}$$

3.5.3. Por supuesto, ϕ_* depende del clivaje, pero diferentes clivajes dan lugar a funtores de cambio de fibra isomorfos, tal como se deduce de la propiedad universal de las flechas cartesianas. Más precisamente, si ϕ_*^Σ y $\phi_*^{\Sigma'}$ son los funtores cambio de fibra asociados a los clivajes Σ y Σ' respectivamente, entonces $\eta : \phi_*^\Sigma \Rightarrow \phi_*^{\Sigma'}$ dado por $\eta_e = \Sigma'_{e,\phi} / \Sigma_{e,\phi}$ es un isomorfismo natural.

$$\begin{array}{ccc} & & \phi_*^\Sigma(e) \\ & \nearrow \Sigma_{e,\phi} & \downarrow \Sigma'_{e,\phi} / \Sigma_{e,\phi} \\ e & & \phi_*^{\Sigma'}(e) \\ & \searrow \Sigma'_{e,\phi} & \end{array}$$

3.5.4. Del mismo modo, dadas ϕ, ψ flechas componibles de B , se tiene un isomorfismo natural $(\psi\phi)_* \Rightarrow \psi_*\phi_*$. Los datos

$$b \mapsto E_b \quad \phi \mapsto \phi_* \quad \psi, \phi \mapsto ((\psi\phi)_* \Rightarrow \psi_*\phi_*)$$

definen un *pseudofunctor* $F : B \rightsquigarrow \mathcal{C}at$ (ver la definición en 7.3.8, ver también [Gr71]).

3.5.5. Notar que si Σ es cerrado entonces los isomorfismos $(\psi\phi)_* \Rightarrow \psi_*\phi_*$ son identidades y se tiene efectivamente un funtor fibra $F : B \rightarrow \mathcal{C}at$.

3.5.6 Definición. Como al aplicar el funtor espacio clasificante funtores isomorfos dan lugar a funciones homotópicas, una fibración ξ da lugar a un verdadero funtor $F : B \rightarrow [\mathcal{T}op]$, con $[\mathcal{T}op]$ la categoría de espacios y clases homotópicas de funciones. Este funtor asigna a cada objeto b el tipo de homotopía del espacio clasificante de E_b , y a cada flecha ϕ la clase homotópica de la función ϕ_* , que no depende del clivaje (cf. 3.5.3).

3.6 Fibración asociada a un funtor

Una función continua $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{T}op$ admite una factorización canónica $X \rightarrow N^f \rightarrow Y$ como una equivalencia homotópica seguida de una fibración. Aquí N^f es el *mapping path space*, cuyos puntos son los pares (x, γ) con $x \in X$ y γ un camino en Y que empieza en $f(x)$. Esta construcción encuentra la siguiente analogía en $\mathcal{C}at$.

3.6.1 Definición. Dado $u : A \rightarrow B$ un morfismo entre categorías pequeñas, definimos la categoría $E^u = A \times_B B^I$ como el pull-back sobre u y $\text{dom} : B^I \rightarrow B$ en $\mathcal{C}at$.

$$\begin{array}{ccc} E^u & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow u \\ B^I & \xrightarrow{\text{dom}} & B \end{array}$$

3.6.2. Los objetos de E^u son los pares $(a, u(a) \rightarrow b)$, con $a \in A_0$ y $u(a) \rightarrow b \in B_1$, y las flechas de E^u son los pares (f, g) que inducen un cuadrado conmutativo en B .

3.6.3. El funtor u se factoriza a través de E^u como πi , donde i es la inclusión $a \mapsto (a, \text{id}_{u(a)})$, y π es la proyección $(a, u(a) \rightarrow b) \mapsto b$.

$$\begin{array}{ccc} & E^u & \\ & \nearrow i & \searrow \pi \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

El funtor i es plenamente fiel y admite un adjunto a derecha ($i \dashv r$), la retracción $r : E^u \rightarrow A$, que manda $(a, u(a) \rightarrow b)$ en a .

3.6.4 Corolario. *El morfismo $i : A \rightarrow E^u$ es una equivalencia homotópica (cf. 2.3.6).*

3.6.5. El functor π es una fibración. El conjunto $\Sigma^u \subset \text{fl}(E^u)$ de flechas cuya primer coordenada es una identidad

$$\Sigma^u = \{(\text{id}_a, \phi) : (a, u(a) \rightarrow b) \rightarrow (a, u(a) \rightarrow b')\},$$

es un clivaje cerrado para π , por lo tanto π se escinde.

3.6.6 Definición. Decimos que $\pi : E^u \rightarrow B$ es la *fibración asociada a u* , y la equipamos con el clivaje Σ^u .

3.6.7. Sigue de lo anterior que todo functor es una fibración escindida salvo homotopía. En particular, toda fibración se escinde salvo homotopía.

3.6.8. Si b es un objeto de B , entonces la fibra E_b^u de π es isomorfa a la fibra homotópica A/b de u .

3.7 Morfismos buenos y muy buenos

Considerando A y E^u como categorías sobre B , la retracción $r : E^u \rightarrow A$ no conmuta en general con las proyecciones. A continuación mostramos cómo reemplazar r por otras retracciones que se comportan bien cuando u ya es una fibración.

3.7.1 Definición. Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración, y sea $\pi : E^p \rightarrow B$ la fibración asociada. Decimos que un morfismo $s : E^p \rightarrow E$ es *bueno* si $si = \text{id}_E$, $ps = \pi$ y s preserva flechas cartesianas.

$$\begin{array}{ccc} E & \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{s} \end{array} & E^p \\ & \begin{array}{c} \searrow p \\ \swarrow \pi \end{array} & \\ & & B \end{array}$$

Si s es bueno, entonces $s : E^p \rightarrow E$ es un morfismo fibrado sobre B .

3.7.2 Lema. *Un morfismo bueno s es una equivalencia homotópica, e induce equivalencias homotópicas en las fibras $s : E_b^p \rightarrow E_b$ para cada objeto b en B .*

Demostración. La primera afirmación sigue del hecho que s es inversa a izquierda de i y de que i admite un adjunto (cf. 2.3.6, 3.6.3). La segunda afirmación es consecuencia de la primera, puesto que un morfismo bueno se restringe a otro $s|_A : E^p|_A \rightarrow E|_A$ para toda subcategoría A de B , en particular para las puntuales. □

3.7.3 Proposición. *Dada $p : E \rightarrow B$ fibración, existe una correspondencia 1-1 entre clivajes (normales) de E y morfismos buenos $s : E^p \rightarrow E$.*

Demostración. Sea $s : E^p \rightarrow E$ bueno. Para cada $e \in E_0$ y $\phi : p(e) \rightarrow b \in B_1$ la flecha $(\text{id}_e, \phi) : (e, \text{id} : p(e) \rightarrow p(e)) \rightarrow (e, \phi : p(e) \rightarrow b)$ es cartesiana en E^p . Por lo tanto, $s(\text{id}_e, \phi)$ es cartesiana en E sobre ϕ con dominio $s(i(e)) = e$. Luego la familia $\Sigma = \{s(\text{id}_e, \phi)\}_{e, \phi}$ es un clivaje de E , y es normal porque $s(\text{id}_e, \text{id}_{p(e)}) = s(i(\text{id}_e)) = \text{id}_e$.

En el otro sentido, si Σ es un clivaje normal de E , entonces podemos construir un morfismo bueno $s = s(\Sigma) : E^p \rightarrow E$ como se describe a continuación: un objeto $(e, \phi : p(e) \rightarrow b)$ en E^p es enviado por s en $\text{cod}(\Sigma_{e, \phi}) \in E_0$; una flecha $(\alpha, \beta) : (e, \phi : p(e) \rightarrow b) \rightarrow (e', \phi' : p(e') \rightarrow b')$ de E^p es enviada por s en la única flecha sobre β que hace conmutar el siguiente diagrama (cf. 3.2.5).

$$\begin{array}{ccc}
 e & \xrightarrow{\alpha} & e' \\
 \searrow & & \searrow \\
 \Sigma_{e, \phi} & & \Sigma_{e', \phi'} \\
 & s(e) \xrightarrow{s(\alpha, \beta)} & s(e') \\
 \\
 p(e) & \xrightarrow{p(\alpha)} & p(e') \\
 \searrow & & \searrow \\
 \phi & & \phi' \\
 & b \xrightarrow{\beta} & b'
 \end{array}$$

Notar que s preserva flechas cartesianas por 3.2.6. Como respeta identidades y composiciones, s es de hecho un funtor, y $ps = \pi$ por construcción. El morfismo s definido de este modo es una retracción para $i : E \rightarrow E^p$ porque Σ es normal.

Se verifica que ambas construcciones son mutuamente inversas. \square

3.7.4. Es importante notar que i no respeta flechas cartesianas, y por lo tanto no es un morfismo fibrado.

3.7.5 Definición. Si E está equipada con un clivaje Σ y $s : E^p \rightarrow E$ es un morfismo bueno tal que $s(\Sigma^u) \subset \Sigma$, entonces decimos que s es *muy bueno*. Si s es muy bueno, entonces $s : (E^p, \Sigma^p) \rightarrow (E, \Sigma)$ es un morfismo clivado sobre B .

3.7.6 Corolario. *Si s y Σ se corresponden como arriba (cf. 3.7.3), entonces Σ es cerrado si y sólo si s es muy bueno.*

Demostración. Sea Σ un clivaje cerrado y s el morfismo bueno inducido. Si (id_e, β) es una flecha en el clivaje Σ^u , entonces el diagrama de arriba implica que $s(\text{id}_e, \beta)\Sigma_{e, \phi} = \Sigma_{e, \beta\phi}$. Luego $s(\text{id}_e, \beta) \in \Sigma$ (cf. 3.3.11) y por lo tanto el morfismo s es muy bueno.

Por otro lado, dado Σ un clivaje que no es cerrado, uno puede encontrar $f, f' \in \Sigma$ tales que $f' = gf$ con $g \notin \Sigma$ (cf. 3.3.11). Como $g = s(\text{id}, p(g))$ sigue que s no es muy bueno. \square

3.8 Construcción de Grothendieck

Si B es una categoría pequeña, cada funtor $F : B \rightarrow \mathcal{C}at$ da origen a una fibración de Grothendieck en forma funtorial. Esta construcción nos ofrece numerosos ejemplos de fibraciones, que se suman a los anteriores.

3.8.1 Definición. Dado $F : B \rightarrow \mathcal{C}at$ funtor, la *construcción de Grothendieck*

$$p : F \times B \rightarrow B$$

de F es una fibración (escindida) cuyas fibras son los valores de F . Los objetos de la categoría total $F \times B$ son los pares (x, b) , $x \in F(b)_0$ y $b \in B_0$. Una flecha $(x, b) \rightarrow (x', b')$ en $F \times B$ es un par (f, ϕ) con $\phi : b \rightarrow b' \in B_1$ y $f : F(\phi)(x) \rightarrow x' \in F(b')_1$.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{(id, \phi)} & F(\phi)(x) \\ & \searrow (f, \phi) & \downarrow (f, id) \\ & & x' \end{array}$$

$$b \xrightarrow{\phi} b'$$

Las identidades son los pares (id, id) , y la composición está dada por la fórmula

$$(g, \psi) \circ (f, \phi) = (gF(\psi)(f), \psi\phi).$$

El morfismo $F \times B \rightarrow B$ es la proyección, y las flechas de la forma (id, ϕ) forman un clivaje cerrado.

3.8.2 Ejemplo. Si E y B son grupos, y B actúa por automorfismos de E , entonces la construcción de Grothendieck del funtor inducido $B \rightarrow \mathcal{C}at, * \mapsto E$, tiene como categoría total al producto semidirecto de grupos $E \times B$.

3.8.3. La construcción de Grothendieck de un funtor $F : B \rightarrow \mathcal{C}at$ está caracterizada por la siguiente propiedad universal (cf. [Mal05, 2.2.3]): Si A es una categoría pequeña, $u_b : F(b) \rightarrow A$ una familia de funtores y $\eta_\phi : u_b \Rightarrow u_{b'}F(\phi) : F_b \rightarrow A$ una familia de transformaciones naturales compatibles, entonces existe un único funtor $u : F \times B \rightarrow A$ tal que $ui_b = u_b$.

3.8.4. La construcción de Grothendieck puede extenderse a funtores laxos (cf. 7.3.1). Concretamente, si $F : B \rightsquigarrow \mathcal{C}at$ es un funtor laxo entonces $F \times B \rightarrow B$ es una prefibración definida como antes, pero con la composición dada por

$$(g, \psi) \circ (f, \phi) = (gF(\psi)(f)c_{\psi, \phi}x, \psi\phi)$$

donde $c_{\psi,\phi} : F(\psi\phi) \Rightarrow F(\psi)F(\phi)$ es la 2-celda estructural de F . La prefibración $F \times B \rightarrow B$ es una fibración si y sólo si F es un pseudofunctor (cf. 7.3.8).

Notar que las 2-celdas estructurales juegan el rol de los cociclos en las extensiones de grupos.

3.8.5. El siguiente teorema afirma que una fibración con un clivaje distinguido es esencialmente lo mismo que un pseudofunctor a valores en $\mathcal{C}at$. Su enunciado involucra cuestiones técnicas que no son abarcadas por esta tesis. Para más detalles y una demostración referimos a [Bo94, Vol2-8.3.1].

3.8.6 Teorema. *La construcción de Grothendieck define una 2-equivalencia de 2-categorías*

$$PsFun(B, \mathcal{C}at) \rightarrow \mathcal{F}ib(B)$$

entre la 2-categoría de pseudofuntores $B \rightsquigarrow \mathcal{C}at$ y la 2-categoría de fibraciones con base B

Capítulo 4

Espacios clasificantes de fibraciones

Describimos aquí dos modos de asociar un conjunto bisimplicial a una fibración: el nervio fibrado y el nervio clivado.

El nervio fibrado es una extensión natural del nervio definido por Segal para una categoría, y resulta una descripción simplicial alternativa del tipo homotópico de la categoría total. El nervio clivado es una variante más pequeña, que emerge de un clivaje distinguido.

Establecemos algunos hechos fundamentales y probamos que para una fibración escindida ambas construcciones tienen el mismo tipo de homotopía. También probamos que el nervio fibrado es equivalente homotópico al nervio clásico. De aquí derivamos las versiones original y relativa del Teorema A de Quillen. Por último, mostramos cómo recuperar el nervio original a partir del nervio clivado usando la construcción codiagonal.

Las construcciones y resultados presentados en este capítulo y el siguiente fueron publicados en el artículo [dH08b].

4.1 Nervio fibrado

4.1.1 Notación. Dados $m, n \geq 0$, definimos $\square_{m,n}$ como la fibración

$$\square_{m,n} = (\text{pr}_2 : [m] \times [n] \rightarrow [n])$$

Estas fibraciones desempeñan el rol de símplices en \mathcal{Fib} , e inducen un funtor covariante $\square : \Delta \times \Delta \rightarrow \mathcal{Fib}$.

4.1.2 Definición. Dada $\xi = (p : E \rightarrow B)$ una fibración de categorías pequeñas, definimos el *nervio fibrado de ξ* como el conjunto bisimplicial $N_f \xi$ cuyos (m, n) -símplices están dados por

$$N_f \xi_{m,n} = \mathcal{Fib}(\square_{m,n}, \xi),$$

y el *espacio clasificante fibrado $B_f \xi$* como la realización geométrica $|\text{diag}(N_f \xi)|$ del nervio fibrado.

4.1.3. Estas construcciones son functoriales.

$$N_f : \mathcal{Fib} \rightarrow \text{bsSet} \quad B_f : \mathcal{Fib} \rightarrow \text{Top}$$

Notar que N_f es el funtor singular inducido por \square (cf. B.2.1).

4.1.4 Notación. Escribimos $N_f E$ y $B_f E$ en lugar de $N_f \xi$ y de $B_f \xi$ cuando no haya lugar a confusión.

4.1.5. El nervio fibrado extiende al nervio clásico en el sentido que existe un isomorfismo natural $\text{diag}(N_f(\text{id}_B)) = \text{diag}(N_f B) \cong NB$.

4.1.6. Un (m, n) -simplex de $N_f E$ es un par (x, y) con $x : [m] \times [n] \rightarrow E$ y $y : [n] \rightarrow B$.

$$\begin{array}{ccc} [m] \times [n] & \xrightarrow{x} & E \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow p \\ [n] & \xrightarrow{y} & B \end{array}$$

Haciendo abuso de notación escribimos x en lugar de (x, y) . Este abuso está sustentado en que x determina completamente a y .

4.1.7 **Definición.** Decimos que $y \in NB_n$ es la *base* del simplex, y que $x|_{\text{pr}_2^{-1}(0)} \in N(E_{y_0})_m$ es el *mástil*.

4.1.8. Visualizamos a x como un arreglo rectangular de flechas de E yendo hacia abajo y hacia la derecha. Las flechas horizontales son cartesianas, y las verticales están sobre identidades.

$$\begin{array}{ccccccc} x_{0,0} & \longrightarrow & x_{0,1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & x_{0,n} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ x_{1,0} & \longrightarrow & x_{1,1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & x_{1,n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \cdots & & \downarrow \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ x_{m,0} & \longrightarrow & x_{m,1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & x_{m,n} \\ & & & & & & \\ y_0 & \longrightarrow & y_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & y_n \end{array}$$

Con $x_{i,j} \rightarrow x_{i',j'}$ nos referimos a $x((i, j) \rightarrow (i', j'))$. Notar que por la propiedad universal de las flechas cartesianas x queda completamente determinado por su mástil y por las flechas $x_{i,j} \rightarrow x_{i,j+1}$.

4.1.9 **Definición.** Sea $y : [n] \rightarrow B$ fijo. Definimos $N_f E_y$ como el conjunto simplicial cuyos simplices son aquellos de $N_f E$ con base y , con caras y degeneraciones en la dirección vertical.

4.1.10 **Lema.** El morfismo $\mu : N_f E_y \rightarrow N(E_{y_0})$ que asigna a cada simplex x su mástil es una equivalencia homotópica.

Demostración. A partir de un clivaje Σ construimos una inversa homotópica $\nu : NE_{y_0} \rightarrow N_f E_y$ para μ . El morfismo ν asocia a cada símplex $a : [m] \rightarrow E_{y_0}$ el único símplex $x = \nu(a)$ con mástil a y base y tal que $x_{i,j} \rightarrow x_{i,j+1} \in \Sigma$ para todos i, j . Es claro que $\mu\nu = \text{id}$. A continuación describimos una homotopía simplicial

$$h : N_f E_y \times I \rightarrow N_f E_y$$

entre $\nu\mu$ y la identidad, lo que completa la demostración.

Recordamos que $(N_f E_y \times I)_m = (N_f E_y)_m \times I_m$, y que $I_m = \{t : [m] \rightarrow [1]\}$. Dado $(x, t) \in (N_f E_y \times I)_m$ definimos $h(x, t)$ como el único m -símplex de $N_f E_y$ con el mismo mástil que x y tal que

$$h(x, t)_{i,j} \rightarrow h(x, t)_{i,j+1} = \begin{cases} x_{i,j} \rightarrow x_{i,j+1} & \text{si } t(i) = 0 \\ \nu\mu(x)_{i,j} \rightarrow \nu\mu(x)_{i,j+1} & \text{si } t(i) = 1 \end{cases}$$

Es fácil ver que h definida de este modo resulta un morfismo simplicial, que $h(x, 0) = x$ y que $h(x, 1) = \nu\mu(x)$. \square

4.1.11. El siguiente criterio fundamental establece el comportamiento del nervio fibrado respecto a la homotopía de las fibras.

4.1.12 Proposición. Sean $\xi = (p : E \rightarrow B)$ y $\xi' = (p' : E' \rightarrow B)$ fibraciones, y sea $u : E \rightarrow E'$ un morfismo fibrado sobre B . Si $u : E_b \rightarrow E'_b$ es una equivalencia homotópica para cada b en B , entonces $u_* : N_f E \rightarrow N_f E'$ es una equivalencia homotópica.

Demostración. Es suficiente probar que el morfismo $u_* : \{m \mapsto N_f E_{m,n}\} \rightarrow \{m \mapsto N_f E'_{m,n}\}$ es una equivalencia para cada n (cf. 1.5.11). Caras y degeneraciones en la dirección m preservan la base de un símplex, y por lo tanto se tiene la siguiente descomposición

$$\{m \mapsto N_f E_{m,n}\} = \coprod_{y=(y_0 \rightarrow \dots \rightarrow y_n)} N_f E_y$$

y

$$\{m \mapsto N_f E'_{m,n}\} = \coprod_{y=(y_0 \rightarrow \dots \rightarrow y_n)} N_f E'_y.$$

Más aún, u_* también preserva la base de un símplex, por lo cual puede ser expresado como el coproducto de morfismos $u_* : N_f E_y \rightarrow N_f E'_y$.

Consideramos el siguiente cuadrado conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} N_f E_y & \xrightarrow{u_*} & N_f E'_y \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ N E_{y_0} & \xrightarrow{u_*} & N E'_{y_0} \end{array}$$

Los morfismos verticales son equivalencias homotópicas (cf. 4.1.10), y la flecha de abajo lo es por hipótesis. Luego, por 2-de-3, la flecha de arriba también resulta una equivalencia homotópica y el resultado sigue. \square

4.2 Nervio clivado

4.2.1. La fibración $\square_{m,n}$ admite un único clivaje, $\Sigma = \{(\text{id}, \alpha)\}$, que es cerrado. Esto implica que $\square_{m,n}$ se escinde. Equipamos a estas fibraciones con estos clivajes, obteniendo de este modo un funtor covariante $\square : \Delta \times \Delta \rightarrow \mathcal{E}sc \subset \mathcal{C}liv$.

4.2.2 **Definición.** Dado $\xi = (p : E \rightarrow B)$ una fibración con clivaje Σ , definimos el *nervio clivado de* (ξ, Σ) como el conjunto bisimplicial $N_c(\xi, \Sigma)$ cuyos (m, n) -símplices están dados por

$$N_c(\xi, \Sigma)_{m,n} = \mathcal{C}liv(\square_{m,n}, (\xi, \Sigma))$$

Definimos el *espacio clasificante clivado* $B_c(\xi, \Sigma)$ como la realización geométrica $|\text{diag}(N_c(\xi, \Sigma))|$ del nervio clivado.

4.2.3. Estas construcciones son functoriales.

$$N_c : \mathcal{C}liv \rightarrow \text{bsSet} \quad B_c : \mathcal{C}liv \rightarrow \mathcal{T}op$$

Notar que N_c es el funtor singular inducido por \square (cf. B.2.1).

4.2.4 *Notación.* Como antes, escribiremos $N_c E$ en lugar de $N_c(\xi, \Sigma)$ y $B_c E$ en lugar $B_c(\xi, \Sigma)$ haciendo abuso de notación.

4.2.5. El nervio clivado extiende el nervio usual en el sentido que se tiene un isomorfismo natural $\text{diag}(N_c(\text{id}_B)) = \text{diag}(N_c B) \cong NB$, donde $\text{id} : B \rightarrow B$ es equipado con el clivaje $\Sigma = \text{fl}(B)$.

4.2.6. Si olvidamos el clivaje, entonces podemos formar el nervio fibrado y así obtenemos una inclusión natural en bsSet , que denotaremos i .

$$i : N_c E \rightarrow N_f E$$

4.2.7 **Definición.** Sea $y : [n] \rightarrow B$ fijo. Definimos $N_c E_y$ como el conjunto simplicial de símplices de $N_c E$ con base y , de modo análogo a como se definió $N_f E_y$ (cf. 4.1.9).

4.2.8 **Lema.** Sea $\xi = (p : E \rightarrow B)$ una fibración con clivaje Σ . Si x y x' son símplices en $N_c E$ con las mismas base y mástil, entonces $x = x'$. Si Σ es cerrado, entonces para todo $y \in NB_n$ y $a \in (NE_{y_0})_m$ existe un único (m, n) -símplex $x \in N_c E$ con base y y mástil a .

Demostración. Tenemos que $(x_{i,0} \rightarrow x_{i,1}) = (x'_{i,0} \rightarrow x'_{i,1})$ pues son flechas en Σ sobre $y_0 \rightarrow y_1$ con el mismo dominio. Vemos que $(x_{i,j} \rightarrow x_{i,j+1}) = (x'_{i,j} \rightarrow x'_{i,j+1})$ repitiendo este argumento. De aquí se deduce la primera afirmación (cf. 4.1.8).

La unicidad del segundo enunciado sigue del primero. Para la existencia de un tal x se requiere que el clivaje Σ sea cerrado en orden de asegurar que las flechas $x_{i,j} \rightarrow x_{i,k}$ estén en Σ y el morfismo inducido respete el clivaje. \square

4.2.9. La siguiente proposición es una versión del criterio 4.1.12 para el nervio clivado.

4.2.10 Proposición. Sean $\xi = (p : E \rightarrow B)$ y $\xi' = (p' : E' \rightarrow B)$ fibraciones escindidas con clivajes cerrados Σ y Σ' , y sea $u : E \rightarrow E'$ un morfismo clivado sobre B . Si $u : E_b \rightarrow E'_b$ es una equivalencia homotópica para todo b en B , entonces $u_* : N_c E \rightarrow N_c E'$ es una equivalencia homotópica.

Demostración. Es análoga a la hecha para $N_f E$ (cf. 4.1.12), usando en este caso que la composición

$$N_c E_y \rightarrow N_f E_y \xrightarrow{\mu} N E_{y_0}$$

es un isomorfismo (cf. 4.2.8) y en particular una equivalencia homotópica. \square

4.2.11. El siguiente resultado prueba que el nervio clivado describe completamente el tipo homotópico del nervio fibrado (y por lo tanto de la categoría total, ver 4.3.6) cuando el clivaje considerado es cerrado.

4.2.12 Teorema. Si $\xi = (p : E \rightarrow B)$ es una fibración escindida con clivaje cerrado Σ , entonces la inclusión $i : N_c E \rightarrow N_f E$ es una equivalencia homotópica.

Demostración. Nuevamente, alcanza con demostrar (cf. 1.5.11) que para cada n la inclusión induce equivalencias homotópicas $i_* : \{m \mapsto N_c E_{m,n}\} \rightarrow \{m \mapsto N_f E_{m,n}\}$. Fijado n , el morfismo i_* es el coproducto de los morfismos

$$i_* : N_c E_y \rightarrow N_f E_y$$

donde y recorre el conjunto de n -símplices de NB . Como la composición $N_c E_y \rightarrow N_f E_y \xrightarrow{\mu} N E_{y_0}$ es un isomorfismo (cf. 4.2.8) y μ es un equivalencia (cf. 4.1.10), se concluye que i_* es una equivalencia homotópica. \square

4.2.13. Si el clivaje Σ no es cerrado, entonces $N_c E$ y $N_f E$ no necesariamente tienen el mismo tipo homotópico. A continuación damos un ejemplo en que difieren.

4.2.14 Ejemplo. Sea E la categoría obtenida del ordinal $[3]$ al invertir formalmente la flecha $2 \rightarrow 3$. E tiene objeto inicial y por lo tanto es contráctil (cf. 2.3.7). Consideraremos E como la categoría total de una fibración equipada con un clivaje Σ de modo que B_cE no sea contráctil. Como B_fE y BE siempre tienen el mismo tipo homotópico (cf. 4.3.6), concluimos que la inclusión $i : N_cE \rightarrow N_fE$ no es en este caso una equivalencia homotópica.

Sea $B = [2]$ y sea $p : E \rightarrow B$ la suryección que toma dos veces el valor 2. Claramente p es una fibración. Sea Σ el (único) clivaje normal que contiene la flecha $0 \rightarrow 3$.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{\in \Sigma} & 1 & \xrightarrow{\in \Sigma} & 2 \\ & \searrow & & & \updownarrow \\ & & & & 3 \\ & & & \swarrow & \\ & & & \in \Sigma & \end{array}$$

Si un simplex $x \in N_cE$ no está contenido en la fibra E_2 , entonces su mástil debe ser trivial. Como un simplex en N_cE queda determinado por su mástil y su base (cf. 4.1.10), se deduce que los únicos simples no degenerados de N_cE son $0 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2 \in N_cE_{0,1}$ y algunos otros incluidos en la fibra E_2 . Luego, el lazo $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow 0$ da un elemento no trivial de $\pi_1(B_cE, 0)$ y por lo tanto B_cE no es contráctil.

4.3 Relación con el nervio clásico

En esta sección probamos que se tiene una equivalencia homotópica

$$B_fE \rightarrow BE$$

de donde sigue que el nervio fibrado es un modelo alternativo para el tipo de homotopía de la categoría total.

4.3.1. Sea $\xi = (p : E \rightarrow B)$ una fibración, y sea $x = (x, y)$ un elemento de $N_fE_{n,n}$. La composición $x \circ \text{diag} : [n] \rightarrow E$, $i \mapsto x_{i,i}$ es un n -simplex de NE , al que denotaremos $k(x)$. De este modo obtenemos un morfismo simplicial (natural en ξ) y su realización geométrica

$$k : \text{diag}(N_fE) \rightarrow NE \quad k_* : B_fE \rightarrow BE$$

que permiten relacionar el nervio fibrado con el tradicional definido por Segal (cf. [Se68]).

4.3.2. Probamos que k es una equivalencia homotópica primero en el caso de fibraciones escindidas, y luego en el caso general. La siguiente proposición y su demostración pueden ser interpretadas como versiones del teorema [Th79, 1.2].

4.3.3 Proposición. Sea $\xi = (p : E \rightarrow B)$ una fibración escindida, con clivaje cerrado Σ . El morfismo $B_c E \rightarrow BE$ inducido por k es una equivalencia homotópica.

Demostración. Probaremos que $ki : \text{diag}(N_c E) \rightarrow NE$ es una equivalencia homotópica en $sSet$.

El clivaje Σ induce un morfismo muy bueno $s : E^p \rightarrow E$ (cf. 3.7.6). Por la naturalidad de k se tiene el siguiente cuadrado conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \text{diag}(N_c(E^p)) & \xrightarrow{ki} & N(E^p) \\ \downarrow s_* & & \downarrow s_* \\ \text{diag}(N_c E) & \xrightarrow{ki} & NE \end{array}$$

Como en este cuadrado las flechas verticales son equivalencias homotópicas (cf. 3.7.2, 4.2.10), por 2-de-3 la flecha de arriba es equivalencia homotópica si y sólo si la de abajo lo es.

A continuación definimos un morfismo $l : \text{diag}(N_c E^p) \rightarrow NE^p$, exhibimos una homotopía simplicial $ki \cong l$, y probamos que l es una equivalencia homotópica, lo que completa la demostración.

Un símplex $x = (x, y)$ de $N_c E_{n,n}^p$ está determinado por su mástil y su base (cf. 4.2.8), y por lo tanto puede expresarse del siguiente modo:

$$x = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n, p(x_n) \rightarrow y_0 \rightarrow y_1 \rightarrow \dots \rightarrow y_n)$$

Para $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$, tenemos que $x_{i,j} = (x_i, p(x_i) \rightarrow y_j)$, donde todas las flechas son inducidas por la secuencia de arriba. Dado $i = 0, \dots, m$ definimos $x_{i,-1}$ como el objeto $(x_i, p(x_i) \rightarrow p(x_m))$ de E^p inducido por x . Estos nuevos objetos yacen en el mástil del siguiente símplex de $N_c E_{m,n+1}^p$, que está inducido por x .

$$\tilde{x} = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_m, p(x_m) \xrightarrow{\text{id}} p(x_m) \rightarrow y_0 \rightarrow y_1 \rightarrow \dots \rightarrow y_n)$$

Usando \tilde{x} definimos $l : \text{diag}(N_c E^p) \rightarrow NE^p$ por

$$l(x) = (x_{0,-1} \rightarrow x_{1,-1} \rightarrow \dots \rightarrow x_{n,-1}).$$

Del mismo modo, la homotopía $h : \text{diag}(N_c E^p) \times I \rightarrow NE^p$ está dada por

$$h(x, t) = (x_{0,-1} \rightarrow \dots \rightarrow x_{i-1,-1} \rightarrow x_{i,i} \rightarrow \dots \rightarrow x_{n,n})$$

donde $x \in N_c E_{n,n}^p$, $t \in I_n$, $h(x, t)_j = x_{j,-1}$ si $t(j) = 0$ y $h(x, t)_j = x_{j,j}$ si $t(j) = 1$. Se verifica fácilmente que h es un morfismo, que $h(x, 0) = l(x)$ y que $h(x, 1) = ki(x)$.

Finalmente, probemos que l es una equivalencia homotópica. Para ello, consideramos NE^p como conjunto bisimplicial constante en la dirección n (i.e. $NE_{m,n}^p = NE_m^p$). El morfismo l es la diagonalización de $L : N_c E^p \rightarrow NE^p$, definido por la misma fórmula que l . La m -ésima componente $L_{m,-}$ de L puede ser identificada con el coproducto

$$\coprod_{x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_m} N(p(x_m)/B) \rightarrow \coprod_{x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_m} \text{pt}$$

que es una equivalencia homotópica porque $p(x_m)/B$ tiene objeto inicial y por lo tanto es contráctil (cf. 2.3.7). El morfismo L resulta entonces una equivalencia homotópica (cf. 1.5.11) y se concluye la demostración. \square

4.3.4 Corolario. Si $\xi = (p : E \rightarrow B)$ es una fibración escindida, entonces $k : \text{diag}(N_f E) \rightarrow NE$ es una equivalencia homotópica.

Demostración. Para verlo, basta con fijar un clivaje cerrado Σ y aplicar los resultados anteriores (cf. 4.2.12, 4.3.3). \square

4.3.5. Extendemos ahora el resultado para una fibración cualquiera $\xi = (p : E \rightarrow B)$, no necesariamente escindida.

4.3.6 Teorema. Si $\xi = (p : E \rightarrow B)$ es una fibración, entonces el morfismo $B_f E \rightarrow BE$ inducido por k es una equivalencia homotópica.

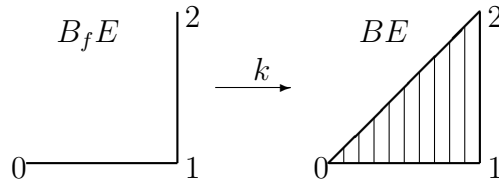
Demostración. Probaremos que $k : \text{diag}(N_f E) \rightarrow NE$ es una equivalencia homotópica en $sSet$.

Sea Σ un clivaje de ξ . El morfismo bueno $s : E^p \rightarrow E$ inducido por Σ (cf. 3.7.3) y la naturalidad de k dan lugar a un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{diag}(N_f E^p) & \xrightarrow{k} & NE^p \\ s \downarrow & & \downarrow s \\ \text{diag}(N_f E) & \xrightarrow{k} & NE \end{array}$$

Como la fibración $E^p \rightarrow B$ siempre se escinde, sigue que la flecha superior es una equivalencia homotópica (cf. 4.3.4). Las flechas verticales también son equivalencias homotópicas (cf. 3.7.2, 4.1.12) y la demostración se completa usando el axioma 2-de-3. \square

4.3.7 Ejemplo. La suryección $s : [2] \rightarrow [1]$ que toma dos veces el valor 1 es una fibración. Abajo mostramos los espacios $B_f E$ y BE en este caso particular. El morfismo k es la inclusión obvia.



Aún cuando este ejemplo es muy simple, puede ser útil para entender las diferencias entre ambas construcciones. La categoría total está completamente determinada por las flechas verticales y horizontales. Muchas de las flechas diagonales no aportan información homotópica relevante. El nervio fibrado omite estas flechas.

4.3.8. El nervio clivado es más *pequeño* que el nervio fibrado, y por lo tanto constituye una codificación más efectiva del tipo homotópico de la categoría total. Por otro lado, sólo sirve en el caso en que la fibración se escinde, mientras el nervio fibrado es útil en cualquier fibración.

4.4 El Teorema A de Quillen y su forma relativa

El Teorema A de Quillen establece condiciones suficientes sobre un functor para que sea equivalencia homotópica. Es una herramienta muy útil en homotopía de categorías. A continuación exhibimos una demostración del Teorema A y su forma relativa en términos del nervio fibrado.

4.4.1 Proposición. *Si $u : E \rightarrow E'$ es un morfismo fibrado sobre B tal que $u : E_b \rightarrow E'_b$ es una equivalencia homotópica para todo objeto b de B , entonces u es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Sigue del buen comportamiento del nervio fibrado con respecto a homotopía (cf. 4.1.12) y de la equivalencia entre el nervio fibrado y el nervio clásico (cf. 4.3.6). \square

4.4.2 Corolario (Teorema A de Quillen (versión relativa)). *Sean $u : A \rightarrow B$ y $u' : A' \rightarrow B$ categorías pequeñas sobre B . Si $w : A \rightarrow A'$ es un morfismo sobre B tal que el morfismo inducido $A/b \rightarrow A'/b$ es una equivalencia homotópica para todo b objeto de B , entonces w es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Consideramos el siguiente cuadrado conmutativo de categorías sobre B , donde E^u y $E^{u'}$ son las fibraciones asociadas a u y u' (cf. 3.6.1), y la flecha inferior es inducida por w de un modo natural.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{w} & A' \\ i \downarrow & & i \downarrow \\ E^u & \xrightarrow{w_*} & E^{u'} \end{array}$$

Como las fibras E_b^u se identifican con las fibras homotópicas A/b (cf. 3.6.8), la proposición anterior (cf. 4.4.1) afirma que el morfismo del fondo del cuadrado es una equivalencia homotópica, y como las verticales también lo son (cf. 3.6.4) el teorema vale por 2-de-3. \square

4.4.3 Corolario (Teorema A de Quillen). *Un morfismo $u : A \rightarrow B$ entre categorías pequeñas cuyas fibras homotópicas A/b son contráctiles es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Basta tomar $u' = \text{id}_B$ en la versión relativa (cf. 4.4.2). \square

4.5 Fibraciones y la construcción codiagonal

La construcción codiagonal (cf. 1.6.1) de los nervios fibrado y clivado puede ser reinterpretada en términos de funtores singulares (cf. B.2.1). En esta sección damos esas descripciones y probamos que para una fibración escindida existe un isomorfismo entre la codiagonal del nervio clivado y el nervio clásico de la categoría total.

4.5.1 Definición. Sea T_n la subcategoría plena de $[n] \times [n]$ cuyos objetos son los pares (i, j) satisfaciendo $i \leq j$. Se verifica fácilmente que la proyección $\text{pr}_2|_{T_n} : T_n \rightarrow [n]$ es una fibración. Llamamos $T : \Delta \rightarrow \mathcal{Fib}$ al funtor $[n] \mapsto T_n$.

4.5.2 Proposición. *Sea $\xi = (p : E \rightarrow B)$ una fibración. Existe un isomorfismo natural de conjuntos simpliciales*

$$(\nabla N_f E)_n \cong \mathcal{Fib}(T_n, \xi)$$

donde el lado derecho es el funtor singular inducido por T (cf. B.2.1).

4.5.3. Bajo este isomorfismo, el morfismo θ (cf. 1.6.3) se identifica con la restricción $x \mapsto x|_{T_n}$.

Demostración. Sea S el conjunto simplicial $n \mapsto \mathcal{Fib}(T_n, \xi)$. Para $k = 0, \dots, n$ sea $\alpha^k = (\alpha_0^k, \alpha_1^k) : \square_{k, n-k} \rightarrow T_n$ el morfismo fibrado satisfaciendo $\alpha_0^k(i, j) = (i, j+k)$ para todo $(i, j) \in \text{ob}(\square_{k, n-k})$. Definimos $\lambda : S \rightarrow \nabla N_f E$ enviando un n -simplex $x : T_n \rightarrow \xi$ a $\lambda(x) = (x\alpha^0, x\alpha^1, \dots, x\alpha^n)$. Se chequea fácilmente que λ está bien definido, es decir las coordenadas de $\lambda(x)$ satisfacen las condiciones de compatibilidad de la codiagonal, y que λ respeta caras y degeneraciones.

Para ver que λ es de hecho un isomorfismo, observamos que cada simplex $x \in N_f E_{m,n}$ puede ser presentado como un arreglo de $m \times n$ cuadraditos conmutativos de E

$$\begin{array}{ccc} x_{i,j} & \longrightarrow & x_{i,j+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_{i+1,j} & \longrightarrow & x_{i+1,j+1} \end{array}$$

en los cuales las flechas verticales están sobre identidades y las horizontales son cartesianas. Si $z_k \in N_f E_{k, n-k}$, $k = 0, \dots, n$, entonces la ecuación $d_0^h z_k =$

$d_{i+1}^v z_{k+1}$ dice que el arreglo de $k \times (n - k - 1)$ cuadraditos que se obtiene de z_k al borrar la primera columna es igual al arreglo que se obtiene de z_{k+1} al borrar la última fila.

Es claro a partir de estas descripciones que un simplex $x \in S_n$ se identifica con una sucesión (z_0, \dots, z_n) , $z_k \in N_f E_{k, n-k}$, bajo las condiciones de compatibilidad que impone la codiagonal. \square

4.5.4. Notar que T_n hereda un clivaje cerrado de $\square_{n,n}$ y por lo tanto T puede ser visto como un functor $\Delta \rightarrow \mathcal{E}sc \subset \mathcal{C}liv$.

4.5.5 Proposición. Sea $\xi = (p : E \rightarrow B)$ una fibración con clivaje Σ . Existe un isomorfismo canónico de conjuntos simpliciales

$$(\nabla N_c E)_n \cong \mathcal{C}liv(T_n, (\xi, \Sigma))$$

donde el lado derecho es el functor singular inducido por $T : \Delta \rightarrow \mathcal{E}sc \subset \mathcal{C}liv$ (cf. B.2.1).

4.5.6. Bajo este isomorfismo, θ se identifica con la restricción $x \mapsto x|_{T_n}$.

Demostración. La demostración es análoga a la de 4.5.2. \square

4.5.7 Definición. Si $x = (x, y) \in \mathcal{F}ib(T_n, E)$, entonces $x \circ \text{diag} : [n] \rightarrow E$ define un simplex en NE_n . Bajo nuestra identificación (cf. 4.5.2) ésto da el morfismo $\bar{k} : \nabla N_f E \rightarrow NE$, $\bar{k}(x) = x \circ \text{diag}$.

4.5.8. Dada $\xi = (p : E \rightarrow B)$ fibración equipada con un clivaje Σ , tenemos el siguiente diagrama de conjuntos simpliciales:

$$\begin{array}{ccc} \text{diag}(N_c E) & \xrightarrow{i} & \text{diag}(N_f E) \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ \nabla N_c E & \xrightarrow{i} & \nabla N_f E \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow k \\ \nearrow \bar{k} \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ NE \end{array}$$

4.5.9 Teorema. Si Σ es cerrado, entonces el morfismo $\bar{k}i : \nabla N_c E \rightarrow NE$ es un isomorfismo.

Demostración. Para ver que $\bar{k}i$ es inyectivo, consideramos un simplex $z \in NE_n$, viendo $z : [n] \rightarrow E$ como definido sobre la diagonal de $\square_{n,n}$ y notamos que la extensión $x : T_n \rightarrow E$ de z es necesariamente única: las flechas horizontales deben pertenecer al clivaje, y las verticales están unívocamente determinadas por la propiedad universal de las flechas cartesianas.

Si Σ es cerrado, entonces el único funtor $x : T_n \rightarrow E$ tal que $x \circ \text{diag} = z$ y $x_{i,j} \rightarrow x_{i,j+1} \in \Sigma$ determina un morfismo clivado $T_n \rightarrow E$ y por lo tanto un símplex $x \in (\nabla N_c E)_n$ satisfaciendo $\bar{k}i(x) = z$. Ésto prueba la suryectividad. \square

Capítulo 5

Ejemplos y aplicaciones

En este capítulo desarrollamos algunas aplicaciones de los nervios fibrado y clivado. Obtenemos demostraciones alternativas y conceptuales de famosos teoremas de Thomason y Quillen, y presentamos resultados nuevos en homotopía y homología de categorías.

5.1 Colímites homotópicos de categorías

El trabajo fundacional de Bousfield y Kan [BK72] establece las bases para el estudio de los límites y colímites homotópicos en $s\mathcal{S}et$. Allí se presentan las varias definiciones alternativas para este concepto, y los resultados fundamentales. Partiendo de este trabajo, Thomason describe en [Th79] los colímites homotópicos en $\mathcal{C}at$ usando la construcción de Grothendieck (cf. 3.8.1).

5.1.1 Definición. Dado $Z : I \rightarrow s\mathcal{S}et$, sea $\text{holim}_{\rightarrow}(Z)$ el conjunto bisimplicial cuyos (m, n) -símplices son

$$\text{holim}_{\rightarrow}(Z)_{m,n} = \coprod_{i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_n} Z(i_0)_m$$

donde el coproducto se toma sobre todos los símplices de dimensión n de NI , las caras y degeneraciones verticales son las de los $Z(i)$, y las caras y degeneraciones horizontales están dadas por

$$d_i^h = \begin{cases} \text{id} & i > 0 \\ Z(i_0 \rightarrow i_1) & i = 0 \end{cases} \quad s_j^h = \text{id}$$

5.1.2. La construcción $\text{holim}_{\rightarrow}(Z)$ fue introducida por Bousfield y Kan con el fin de describir colímites homotópicos en $s\mathcal{S}et$. Más precisamente, el complejo diagonal $\text{diag}(\text{holim}_{\rightarrow}(Z))$ satisface la propiedad universal que caracteriza los colímites homotópicos (cf. [BK72, XII]).

5.1.3 Teorema. Dado $F : B \rightarrow \mathcal{C}at$, existe un isomorfismo $N_c(F \rtimes B) \xrightarrow{\sim} \text{holim}_{\rightarrow}(NF)$ entre el nervio clivado de la construcción de Grothendieck sobre F y la construcción de Bousfield y Kan para el colímite homotópico de F .

Demostración. El isomorfismo $N_c(F \rtimes B) \rightarrow \text{holim}(NF)$ manda un (m, n) -simplex x de $N_c(F \rtimes B)$ al elemento a en el sumando indexado por y , donde a y y son respectivamente el mástil y la base de x . Se verifica fácilmente que éste es efectivamente un morfismo simplicial, y que es un isomorfismo (cf. 4.2.8). \square

5.1.4. Si E es una fibración, entonces uno puede definir una función $N_f E \rightarrow \text{holim}(NF)$ de un modo similar. Sin embargo, esta función no es general un morfismo simplicial porque no respeta la 0-ésima cara (en $N_f E$ el mástil se empuja según las flechas cartesianas del simplex, que no están determinadas por la base).

5.1.5 Corolario (Teorema de Thomason). *El nervio de la construcción de Grothendieck $F \rtimes B$ es un representante para el colímite homotópico de $F : B \rightarrow \text{Cat}$.*

Demostración. Es consecuencia directa del teorema anterior (cf. 5.1.3) y de la equivalencia entre el nervio clivado y el nervio clásico (cf. 4.3.3). \square

5.2 Sucesión espectral de una fibración

Un conjunto bisimplicial da lugar a un grupo abeliano bisimplicial y por lo tanto a un complejo doble. En esta sección estudiamos la sucesión espectral asociada al complejo doble inducido por el nervio fibrado. Como consecuencia del teorema principal de esta sección (cf. 5.2.3) derivamos una versión homológica del Teorema A de Quillen.

5.2.1 Definición. Dado $m \geq 0$, definimos el módulo $H_m(F) : B \rightarrow \mathcal{A}b$ como el funtor que asigna a cada $b \in B$ el grupo $H_m(E_b)$, y a cada flecha $\phi : b \rightarrow b'$ la función inducida por ϕ_* .

5.2.2. Sigue de 3.5.6 que el módulo $H_m(F)$ está bien definido y que no depende del clivaje.

5.2.3 Teorema. *Existe una sucesión espectral $\{X_{m,n}^r\}$ que converge a la homología de la categoría total E y cuya segunda hoja consiste en la homología de la base con coeficientes en la homología de las fibras.*

$$X_{m,n}^2 = H_n(B, H_m(F)) \Rightarrow H_{m+n}(E)$$

Demostración. Del conjunto bisimplicial $N_f E$ construimos el grupo abeliano libre bisimplicial $\mathbb{Z}N_f E$, y el complejo doble $C_f E$ asociado (cf. 1.8.2). Tenemos que

$$C_f E_{m,n} = \bigoplus_{y=(y_0 \rightarrow \dots \rightarrow y_n)} \mathbb{Z}[(N_f E_y)_m]$$

donde $(N_f E_y)_m$ es el conjunto de (m, n) -símplices de $N_f E$ con base y . Filtrando el complejo doble $C_f E$ en la dirección horizontal se tiene una sucesión espectral

$$H_n(H_m(C_f E)) \Rightarrow H_{m+n}(\text{Tot}(C_f E)).$$

La primer hoja de esta sucesión espectral se obtiene calculando la homología vertical (dirección m) de $C_f E$. En grado (m, n) esto da

$$H_m(C_f E)_{m,n} = \bigoplus_y H_m(N_f E_y) \cong \bigoplus_y H_m(E_{y_0}),$$

donde \cong es el isomorfismo inducido por μ (cf. 4.1.10). La segunda hoja de la sucesión espectral se obtiene calculando la homología horizontal (dirección n) de la primera. En grado (m, n) esto da $H_n H_m(C_f E) = H_n(B, H_m(F))$ (cf. 2.5.5). Finalmente, por el teorema de Eilenberg-Zilber generalizado (cf. 1.8.5) la homología del complejo total $H_{m+n}(\text{Tot}(C_f E))$ es isomorfa a la homología de la diagonal $H_{m+n}(\text{diag}(\mathbb{Z} N_f E))$, que es igual a $H_{m+n}(E)$ pues $\text{diag}(N_f E)$ y NE son homotópicos (cf. 4.3.6). \square

5.2.4. El teorema anterior admite una versión para calcular la homología de la categoría total con coeficientes en un módulo A , cuya demostración es análoga.

5.2.5. Baues y Wirsching [BW85] introducen la noción de cohomología de categorías con coeficientes en un sistema natural. Esta teoría puede entenderse como una extensión de la homología de categorías presentada aquí (cf. 2.5.4). En [PR06] se desarrolla una versión del teorema 5.2.3 para la construcción de Grothendieck de un funtor.

5.2.6 Ejemplo. Consideremos el caso en que $\xi = (p : E \rightarrow B)$ es una fibración con fibras homológicamente triviales, i.e. $H_m(E_b) = 0$ si $m > 0$ y $H_0(E_b) = \mathbb{Z}$ para todo b . Si $m > 0$ entonces los funtores $H_m(F)$ son constantes e iguales a 0, por lo que la segunda hoja de la sucesión espectral X (cf. 5.2.3) es

$$X_{m,n}^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } m > 0 \\ H_n(B) & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

Sigue que $X^\infty = X^2$ y por lo tanto la homología de E es la de B .

No es difícil verificar que $p_* : H_n(E) \rightarrow H_n(B)$ es efectivamente el isomorfismo.

5.2.7 Corolario. Si una fibración $\xi = (p : E \rightarrow B)$ es tal que sus fibras E_b son homológicamente triviales, entonces $p_* : H_n(E) \xrightarrow{\sim} H_n(B)$ es un isomorfismo para todo $n \geq 0$.

5.2.8 Corolario (Teorema A de Quillen - versión homológica). *Sea $u : A \rightarrow B$ un morfismo entre categorías pequeñas cuyas fibras homotópicas A/b son homológicamente triviales. Entonces u es una equivalencia homológica (i.e. $u_* : H_n(A) \xrightarrow{\sim} H_n(B)$ es un isomorfismo para todo $n \geq 0$).*

Demostración. Si $\pi : E^u \rightarrow B$ es la fibración asociada a u , entonces sus fibras son isomorfas a las fibras homotópicas de u (cf.3.6.8), que por hipótesis son homológicamente triviales y así concluimos que π induce isomorfismos en la homología (cf. 5.2.7). Como $u = \pi i$ y como $i : A \rightarrow E(u)$ es una equivalencia homotópica (cf. 3.6.4) el resultado queda probado. \square

5.3 Fibraciones de Quillen y el Teorema B

Es claro que las distintas fibras de una fibración de categorías no necesitan tener el mismo tipo homotópico. Por ejemplo, la construcción de Grothendieck sobre un funtor $F : B \rightarrow \mathcal{C}at$ tiene como fibras los valores de F , que son arbitrarios. Esta observación muestra que en general el morfismo $B_f E \rightarrow B_f B$ no es una fibración.

En esta sección definimos las fibraciones de Quillen, que son familias de categorías con el mismo tipo de homotopía. También discutimos la acción de monodromía y reformulamos el Teorema B (cf. [Qu73]) en términos del nervio fibrado.

5.3.1 Definición. Decimos que una fibración $\xi = (p : E \rightarrow B)$ es una *fibración de Quillen* si para cada flecha $\phi : b \rightarrow b'$ en B el funtor cambio de fibra $\phi_* : E_b \rightarrow E_{b'}$ es una equivalencia homotópica.

5.3.2. Esta definición no depende del clivaje pues distintos funtores cambio de fibra deben ser homotópicos (cf. 3.5.3).

5.3.3. En una fibración de Quillen el funtor fibra $F : B \rightarrow [Top]$, $b \mapsto BE_b$ invierte morfismos (cf. 3.5.6), y por lo tanto induce otro desde la localización

$$\pi_1(B) \rightarrow [Top].$$

Aquí $\pi_1(B)$ denota el grupoide fundamental de B , que se obtiene invirtiendo formalmente todas las flechas de B , y $[Top]$ denota la categoría de espacios topológicos y clases homotópicas de funciones continuas.

5.3.4 Definición. Decimos que $\pi_1(B) \rightarrow [Top]$ es la *acción de monodromía* de la fibración.

5.3.5 Ejemplo. (cf. [Qu73]) Si $p : E \rightarrow B$ es una fibración de Quillen cuyas fibras son categorías discretas, entonces los cambios de fibra $E_b \rightarrow E_{b'}$ deben

ser biyecciones. De aquí que una fibrición de Quillen con fibras discretas es esencialmente lo mismo que un funtor $B \rightarrow \mathcal{S}et \subset \mathcal{C}at$ que invierte morfismos, o sea un revestimiento (cf. 2.4.5). En este caso el funtor de monodromía $\pi_1(B) \rightarrow \mathcal{S}et$ describe completamente la fibrición.

5.3.6. El siguiente ejemplo muestra que aun para fibriciones de Quillen la función $B_f E \rightarrow B_f B$ puede no ser una fibrición. Sí en cambio probaremos que es una quasifibrición, noción que generaliza a la anterior.

5.3.7 Ejemplo. Sea E la subcategoría plena de $I \times I$ con objetos $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$. La segunda proyección $E \rightarrow I$ es una fibrición. Como las fibras son contráctiles, ésta es una fibrición de Quillen. A pesar de eso, el morfismo inducido entre los espacios clasificantes no es una fibrición (hay caminos en la base que no pueden ser levantados).

5.3.8 Definición. Sea Y un espacio arcoconexo. Una *quasifibrición* de espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$ es una función continua tal que para cada $y \in Y$ la inclusión $X_y \rightarrow \tilde{X}_y$ de la fibra en la fibra homotópica induce isomorfismos en los grupos de homotopía.

5.3.9. Los siguientes enunciados son equivalentes (cf. [Ha02, 4.K]):

- $f : X \rightarrow Y$ es una quasifibrición;
- $f_* : \pi_i(X, X_y, x) \rightarrow \pi_i(Y, y)$ es un isomorfismo para todo $y \in Y$, $x \in X_y$, $i \geq 0$;
- el siguiente es un cuadrado homotópicamente cartesiano

$$\begin{array}{ccc} X_y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

5.3.10. Las quasifibriciones inducen sucesiones exactas largas de grupos de homotopías,

$$\dots \xrightarrow{\partial} \pi_k(X_y, x) \rightarrow \pi_k(X, x) \xrightarrow{u_*} \pi_k(Y, y) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(X_y, x) \rightarrow \dots$$

por lo que son una herramienta útil en el cálculo de grupos de homotopía. Los siguientes criterios (cf. [Ha02, 4.K]) son de gran ayuda para probar que una función es quasifibrición.

5.3.11 Lema. Si Y es la unión de dos abiertos U, V tales que $f|_U$, $f|_V$ y $f|_{U \cap V}$ son quasifibriciones, entonces $f : X \rightarrow Y$ es una quasifibrición.

5.3.12 Lema. Sea $Y = \bigcup_n Y_n$ la unión creciente de subespacios, dotada con la topología final. Si $f|_{Y_n}$ es una quasifibración para todo n , entonces $f : X \rightarrow Y$ es una quasifibración.

5.3.13 Notación. Una *deformación* de un espacio X en un subespacio A es una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$ tal que $H_0 = \text{id}_X$, $H_t(A) \subset A$ para todo t y $H_1(X) \subset A$. Notamos $H : X \rightsquigarrow A$.

5.3.14 Lema. Sean $Y' \subset Y$, $X' \subset X$ subespacios. Sean $H : E \rightsquigarrow E'$ y $h : B \rightsquigarrow B'$ deformaciones tales que $pH = h(p \times \text{id}_I)$. Si $f : E' \rightarrow B'$ es quasifibración y $H_1 : E_b \rightarrow E_{h_1(b)}$ es una equivalencia homotópica débil para todo b , entonces f es una quasifibración.

5.3.15. Ahora sí estamos en condiciones de probar el resultado fundamental de esta sección.

5.3.16 Teorema. Sea $p : E \rightarrow B$ un morfismo entre categorías pequeñas. Si $p : E \rightarrow B$ es un fibración de Quillen, entonces el morfismo inducido $p_* : B_f E \rightarrow B_f B$ entre los espacios clasificantes fibrados es una quasifibración.

Demostración. (comparar con [Qu73, lema p.14]). Equipando a $B_f B = BB$ con la estructura celular canónica, probaremos por inducción en n que la restricción de p_* al n -esqueleto $\text{sk}_n(BB)$ es una quasifibración. Luego el resultado valdrá por el criterio 5.3.12 para quasifibraciones.

Para probar el paso inductivo escribimos $\text{sk}_n(BB)$ como la unión $U \cup V$, donde U se obtiene al remover los baricentros de las n -celdas y V es la unión de los interiores de las n -celdas, y probamos que p_* es una quasifibración cuando se restringe a los abiertos U , V y $U \cap V$ (cf. criterio 5.3.11).

Denotamos $|N_f E_y|$ por $B_f E_y$. Realizando primero en la dirección m , la restricción de p_* al interior de la n -celda indexada por $y \in NB_n$ puede identificarse con la restricción de la proyección $B_f E_y \times \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ al interior del n -simplex topológico Δ^n . Sigue de esta observación que $p_*|_V$ y $p_*|_{U \cap V}$ son quasifibraciones.

Deformamos $p_*^{-1}(U)$ en $p_*^{-1}(\text{sk}_{n-1}(B_f B))$ usando la deformación radial de Δ^n menos su baricentro en $\partial \Delta^n$, y usamos la hipótesis inductiva para concluir que $p_*|_U$ es una quasifibración (cf. criterio 5.3.14).

Debemos verificar que si la deformación lleva x en x' , entonces el morfismo $g : p_*^{-1}(x) \rightarrow p_*^{-1}(x')$ inducido por la deformación es una equivalencia homotópica débil. Sea x un punto en el interior de la n -celda indexada por $y \in NB_n$. Si la deformación radial empuja x hacia la celda abierta indexada por la cara y' de y , entonces $p_*^{-1}(x) = B_f E_y$ y $p_*^{-1}(x') = B_f E_{y'}$. Fijado un clivaje Σ , la composición (cf. 4.1.10)

$$BE_{y_0} \xrightarrow{\nu} B_f E_y \xrightarrow{g} B_f E_{y'} \xrightarrow{\mu} BE_{y'_0},$$

(con $\nu = \nu(y)$ y $\mu = \mu(y')$) es igual al funtor cambio de fibra sobre la flecha $y_0 \rightarrow y'_0$ de y (más exactamente, es la composición de los cambios de fibra dados por Σ sobre las flechas $y_i \rightarrow y_{i+1}$). Como p es una fibración de Quillen, y como ν y μ son equivalencias homotópicas, por el axioma 2-de-3 g es una equivalencia homotópica y por lo tanto el resultado. \square

5.3.17. El teorema de arriba muestra una característica interesante del nervio fibrado: manda fibraciones de Quillen en quasifibraciones. Si $BE \rightarrow BB$ lo es o no resulta poco claro, y ésta puede ser entendida como una desventaja del nervio clásico cuando se trabaja con fibraciones.

5.3.18 Corolario (Teorema B de Quillen). *Si $u : A \rightarrow B$ es un morfismo entre categorías pequeñas tal que $A/b \rightarrow A/b'$ es una equivalencia homotópica para todo $b \rightarrow b' \in \text{fl}(B)$, entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\dots \xrightarrow{\partial} \pi_k(A/b, \bar{a}) \rightarrow \pi_k(A, a) \xrightarrow{u_*} \pi_k(B, b) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(A/b, \bar{a}) \rightarrow \dots$$

donde $a \in \text{ob}(A)$, $b = u(a)$ y $\bar{a} = (a, \text{id}_b)$.

Demostración. Sea $i : A \rightarrow E^u$ el morfismo canónico, r su adjunto a izquierda y $w : A/b \rightarrow A$ el morfismo $(a, u(a) \rightarrow b) \mapsto a$. En el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A/b & \xrightarrow{w} & A & \xrightarrow{u} & B \\ \parallel & & \uparrow r & & \parallel \\ E_b^u & \xrightarrow{c} & E^u & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

el cuadrado izquierdo conmuta, y como $\pi i = u$ y r es un inverso homotópico para i el cuadrado derecho conmuta a menos de homotopía. Concluimos que los grupos de homotopía de A/b , A y B pueden ser identificados naturalmente con los aquellos de la base, la fibra y la categoría total de la fibración asociada $E^u \rightarrow B$, que es una fibración de Quillen y así el resultado sigue (cf. 5.3.16). \square

5.4 Acciones de grupos y TCP

Pensando a las categorías pequeñas como modelos combinatorios para tipos de homotopías, es natural investigar cómo es que se comportan bajo la acción de un grupo finito. En esta sección derivamos una fibración escindida a partir de una categoría pequeña equipada con la acción de un grupo, y relacionamos su nervio clivado con un *producto twistado* (TCP) en el sentido de May (cf. [May67]). También estudiamos la sucesión espectral de una fibración (cf. 5.2.3) en este caso particular.

5.4.1 Definición. Un grupo simplicial G actúa en un conjunto simplicial K (a izquierda) si es dado un morfismo simplicial $G \times K \rightarrow K$, $(g, k) \mapsto g \cdot k$ satisfaciendo $1_n \cdot k = k$ para todo $k \in K_n$ y $g_1 \cdot (g_2 \cdot k) = (g_1 g_2) \cdot k$ para todo $k \in K_n$ y $g_1, g_2 \in G_n$. Aquí 1_n denota el neutro de G_n .

5.4.2 Definición. Dados A, B conjuntos simpliciales y G un grupo simplicial que actúa en A , un *producto twistado* (TCP, twisted cartesian product) con fibra A , base B y grupo G es un conjunto simplicial $A \times_\tau B$ cuyos símplices son $(A \times_\tau B)_n = A_n \times B_n$ y cuyas caras y degeneraciones son:

$$\begin{cases} d_i(a, b) = (d_i a, d_i b), & i > 0; \\ d_0(a, b) = (\tau(b) \cdot d_0 a, d_0 b), & \tau(b) \in G; \\ s_i(a, b) = (s_i a, s_i b), & i \geq 0. \end{cases}$$

Aquí $\tau : B_n \rightarrow G_{n-1}$ es una función que debe satisfacer ciertas identidades estándar de modo que $A \times_\tau B$ resulta un conjunto simplicial. Esta función τ recibe el nombre de *función twisting*.

5.4.3. Sea G un grupo, y sea A una categoría pequeña en la que G actúa por automorfismos. Esta acción puede ser vista como un morfismo de grupos $G \rightarrow \text{Aut}(A)$, $g \mapsto u_g$, o equivalentemente, como un funtor $G \rightarrow \text{Cat}$ que manda el único objeto de G en $A \in \text{ob}(\text{Cat})$. La construcción de Grothendieck sobre este funtor es una fibración escindida $p : G \rtimes A \rightarrow G$ sobre G .

5.4.4. El grupo simplicial constante G (en el que todas las caras y las degeneraciones son la identidad) actúa en NA vía la fórmula

$$g \cdot (a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n) = (u_g(a_0) \rightarrow \cdots \rightarrow u_g(a_n)).$$

5.4.5 Proposición. La diagonal del nervio clivado $\text{diag } N_c(G \rtimes A)$ puede ser visto como un TCP entre los nervios de A y G , digamos $NA \times_\tau NG$.

Demostración. Sea $\tau : NG_n \rightarrow G_{n-1} = G$ la proyección

$$\tau(* \xrightarrow{g_1} * \xrightarrow{g_2} \cdots \xrightarrow{g_n} *) = g_1$$

y sea $NA \times_\tau NG$ el TCP con función twisting τ . Definimos

$$\varphi : \text{diag } N_c(G \rtimes A) \rightarrow NA \times_\tau NG$$

asignando a cada símplex $x \in N_c(G \rtimes A)_{n,n}$ el par (a, y) , donde a es el mástil de x y y es la base. Se verifica fácilmente que φ es de hecho un morfismo simplicial, y que es un isomorfismo sigue de que $G \rtimes A \rightarrow G$ es escindida (cf. 4.2.8). \square

5.4.6. Dado G actuando en A , la fibración $G \times A \rightarrow G$ tiene sólo una fibra, que es isomorfa a A . Luego los módulos $H_m(F)$ de la sucesión espectral dada en 5.2.3 son simplemente los grupos de homología de A equipados con la acción de G . Denotando con $A//G = G \times A$ el cociente homotópico (cf. 5.1.3) obtenemos la siguiente versión de la sucesión espectral de Eilenberg-Moore (cf. [An78, p.775]) como una aplicación de 5.2.3.

5.4.7 Proposición. *Existe una sucesión espectral $\{X_{m,n}^r\}$ que converge a la homología del cociente homotópico $A//G$ de A por la acción de G , cuya segunda hoja consiste en la homología de G con coeficientes en la homología de A .*

$$X_{m,n}^2 = H_n(G, H_m(A)) \Rightarrow H_{m+n}(A//G)$$

Capítulo 6

Subdivisión de categorías

En este capítulo presentamos la subdivisión de categorías y su rol en teoría de homotopía. La subdivisión de categorías es un análogo a la subdivisión baricéntrica de poliedros, y fue usada en trabajos de Anderson, Dwyer y Kan (cf. [An78], [DK83]). Permite reemplazar una categoría por otra localmente más simple, pero con el mismo tipo de homotopía. La subdivisión juega en cierto modo el rol de *reemplazo cofibrante* o *resolución*.

Aquí presentamos una nueva definición para la subdivisión, equivalente a las anteriores pero desde varios puntos de vista más satisfactoria. Derivamos las propiedades básicas del funtor $C \mapsto \text{Sd}(C)$ usando las herramientas de homotopía de categorías desarrolladas en los capítulos anteriores. Como aplicación, ofrecemos una demostración de la equivalencia

$$\text{Ho } \mathcal{T}op \cong \text{Ho } \mathcal{P}oset.$$

En las próximas secciones veremos aplicaciones de la subdivisión al estudio de las 2-categorías y sus espacios clasificantes. En [dH08a] fueron publicados algunos de estos resultados, no obstante la versión que aquí ofrecemos presenta mejoras sustanciales.

6.1 La categoría de símplices de C

Dada C una categoría pequeña, presentamos Δ/C la categoría de símplices de C , de la cual la subdivisión $\text{Sd}(C)$ es una variante. La construcción Δ/C fue utilizada en [Il72] para demostrar que el funtor nervio induce una equivalencia entre las categorías homotópicas $\text{Ho } \mathcal{C}at$ y $\text{Ho } s\mathcal{S}et$.

6.1.1. Recordamos que un n -símplex x de NC consiste en una tira de flechas componibles en C . Vemos a x como un funtor $[n] \rightarrow C$, donde $[n]$ denota la categoría inducida por el ordinal de $n + 1$ elementos.

6.1.2 Notación. Dado $x \in NC$, denotamos x_i al objeto $x(i)$, $x_{i,j}$ a la flecha $x(i \rightarrow j)$ y n_x a la dimensión de x .

$$x = (x_0 \xrightarrow{x_{0,1}} x_1 \xrightarrow{x_{1,2}} \dots \xrightarrow{x_{n_x-1, n_x}} x_{n_x})$$

6.1.3 Notación. Un objeto c de C induce un 0-símplex de NC , que denotaremos (c) . Del mismo modo, dada f flecha de C , denotaremos (f) al 1-símplex asociado y, en general, con (f_1, \dots, f_n) nos referiremos al único símplex $x \in NC_n$ tal que $x_{i-1,i} = f_i$.

6.1.4 Definición. Sea C una categoría pequeña. Denotamos Δ/C a la fibra a izquierda sobre C de la inclusión canónica $\Delta \rightarrow \mathcal{C}at$.

6.1.5. Los objetos de Δ/C son los símplexes de NC , y una flecha $a_* : x \rightarrow y$ en Δ/C consiste en un morfismo de orden $a : [n_x] \rightarrow [n_y]$ tal que $y \circ a = x$. Notar que hay un abuso de notación, puesto que a_* puede denotar diferentes flechas de Δ/C , dependiendo del dominio.

6.1.6. Un modo equivalente de construir Δ/C surge del isomorfismo

$$\Delta/C \cong (NC \rtimes \Delta^\circ)^\circ$$

donde $NC \rtimes \Delta^\circ$ es la construcción de Grothendieck del nervio, visto como funtor $\Delta^\circ \rightarrow \mathcal{S}et \subset \mathcal{C}at$ (ver 3.8.1).

6.1.7. Si existe una flecha $x \rightarrow y$ en Δ/C , entonces la sucesión $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n_x}$ se obtiene de $y_0 \rightarrow y_1 \rightarrow \dots \rightarrow y_{n_y}$ componiendo algunas flechas, olvidando otras e insertando algunas identidades (x es una degeneración de una cara de y).

6.1.8 Definición. Un morfismo $a_* : x \rightarrow y$ en Δ/C se dirá *surjectivo* (resp. *inyectivo*) si a lo es.

6.2 Los funtores sup e ínf

El funtor sup relaciona de un modo natural una categoría pequeña C con su categoría de símplexes. En [Il72] puede encontrarse otra demostración de 6.2.4 usando homología con coeficientes locales.

6.2.1 Definición. El funtor $\text{sup} : \Delta/C \rightarrow C$ asigna a cada símplex $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n_x}$ su último elemento x_{n_x} , y a cada flecha $a_* : x \rightarrow y$ la flecha $y_{a(n_x), n_y}$ que resulta de componer las flechas que aparecen en y desde $y_{a(n_x)} = x_{n_x}$ hasta y_{n_y} .

En forma análoga se define el funtor $\text{ínf} : (\Delta/C) \rightarrow C^\circ$.

6.2.2. Los funtores sup, ínf establecen transformaciones naturales

$$\text{sup} : \Delta/(-) \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}at} \quad \text{ínf} : \Delta/(-) \Rightarrow (-)^\circ$$

6.2.3. Se tiene un isomorfismo $\Delta/C \xrightarrow{\sim} \Delta/(C^\circ)$, que manda un objeto $x : [n_x] \rightarrow C$ en $x^\circ : [n_x]^\circ = [n_x] \rightarrow C^\circ$, y un morfismo $a_* : x \rightarrow y$ en $(a^\circ)_* : x^\circ \rightarrow y^\circ$, con $a^\circ : [n_x] \rightarrow [n_y]$ dado por $a^\circ(i) = n_y - a(n_x - i)$. Bajo este isomorfismo, inf_C se identifica con sup_{C° .

$$\begin{array}{ccc} \Delta/C & \xrightarrow{\sim} & \Delta/(C^\circ) \\ & \searrow \text{inf}_C & \swarrow \text{sup}_{C^\circ} \\ & & C^\circ \end{array}$$

6.2.4 Teorema. *Los funtores $\text{sup} : \Delta/C \rightarrow C$ y $\text{inf} : (\Delta/C) \rightarrow C^\circ$ son equivalencias homotópicas.*

Demostración. Probaremos que sup es una equivalencia homotópica. El resultado para inf sigue de la observación anterior (6.2.3). Por el Teorema A (cf. 4.4.3), para probar que sup es una equivalencia homotópica basta con verificar que dado $c \in C_0$ la fibra homotópica $(\Delta/C)/c$ es contráctil.

Llamamos $i : (\Delta/C)_c \rightarrow (\Delta/C)/c$ a la inclusión usual. Definiremos un funtor $r : (\Delta/C)/c \rightarrow (\Delta/C)_c$ y transformaciones naturales

$$\eta : \text{id}_{(\Delta/C)/c} \Rightarrow ir \quad \epsilon : \text{cte} \Rightarrow ir$$

con $\text{cte}(x, f) = (c, \text{id}_c)$ el funtor constante. Como una transformación natural da lugar a una homotopía (cf. 2.3.5), concluimos que la identidad de $(\Delta/C)/c$ es homotópica a una constante y por lo tanto el resultado.

Dado (x, f) un objeto de $(\Delta/C)/c$, tenemos que $x = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{n_x})$ es un objeto en Δ/C y $f : x_{n_x} \rightarrow c$ es un morfismo en C . Definimos $r(x, f)$ como el símplex que resulta de extender x usando f :

$$r(x, f) = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{n_x} \xrightarrow{f} c).$$

Dado $a_* : (x, f) \rightarrow (y, g)$, definimos $r(a_*) : r(x, f) \rightarrow r(y, g)$ como el morfismo de Δ/C inducido por el morfismo de orden a' :

$$a' : [n_x + 1] \rightarrow [n_y + 1] \quad a'(j) = \begin{cases} a(j) & j \leq n_x \\ n_y + 1 & j = n_x + 1 \end{cases}.$$

Finalmente, η está inducida por la inclusión $\delta_{n_x+1} : [n_x] \rightarrow [n_x + 1]$ cuya imagen no contiene a $n_x + 1$, y ϵ por la inclusión $[0] \rightarrow [n_x + 1]$ cuya imagen es $n_x + 1$. \square

6.2.5. Es interesante notar que el funtor sup no es en general una prefibración. De hecho, si $f : c \rightarrow c'$ es una flecha no trivial de C entonces no hay ninguna flecha cartesiana sobre f , como veremos a continuación (recordar 3.1.5):

$$\begin{array}{ccc} & & y' \\ & \nearrow^{d_* a_* = d'_* a_*} & \\ x & \xrightarrow{a_*} & y \\ & & \uparrow d_* \uparrow d'_* \\ & & y' \\ c & \xrightarrow{f} & c' \end{array}$$

Dada $a_* : x \rightarrow y$ sobre f , como $\text{sup}(a_*) = f \neq \text{id}$ entonces $a(n_x) < n_y$. Luego si y' es la degeneración de y que repite el último elemento, entonces las inclusiones $d, d' : [n_y] \rightarrow [n_y + 1]$ que saltean respectivamente los elementos $n_y, n_y + 1$ inducen morfismos $d_*, d'_* : y \rightarrow y'$ tales que $\text{sup}(d_*) = \text{sup}(d'_*)$ y $d_* a_* = d'_* a_*$. Así se concluye que a_* no puede ser cartesiana.

6.3 La subdivisión de una categoría

Aquí presentamos una construcción alternativa y equivalente a las anteriores, pero que consideramos más interesante, ya que da una descripción completa de las flechas en $\text{Sd}(C)$.

6.3.1 Definición. Sea \sim la relación en $\text{fl}(\Delta/C)$ definida como sigue. Dados $a_*, b_* : x \rightarrow y$ morfismos en Δ/C ,

$$a_* \sim b_* \iff y_{m(i), M(i)} = \text{id} \forall i$$

donde $m(i) = \min\{a(i), b(i)\}$ y $M(i) = \max\{a(i), b(i)\}$.

Si $a_* \sim b_*$ entonces decimos que a_* y b_* son *equivalentes*.

6.3.2. Se verifica fácilmente que la relación \sim es de equivalencia, y es compatible con la composición en el sentido que $a_* \sim b_*$ y $a'_* \sim b'_*$ implican $a'_* a_* \sim b'_* b_*$.

6.3.3 Proposición. \sim es la relación de equivalencia generada por la siguiente relación elemental: dados $a_*, b_* : x \rightarrow y$,

$$a_* \approx b_* \iff \exists i_0 \text{ tal que } \begin{cases} a(i) = b(i) & i \neq i_0 \\ y_{a(i_0), b(i_0)} = \text{id} \end{cases}$$

Demostración. Claramente \sim es una relación de equivalencia que contiene a \approx . Probemos ahora que \sim está contenida en \approx' , la relación de equivalencia generada por \approx .

Supongamos primero que $a_* \sim b_* : x \rightarrow y$, con $a, b : [n_x] \rightarrow [n_y]$ tales que $a(i) \leq b(i)$ para todo i . Luego, definiendo $c_k : [n_x] \rightarrow [n_y]$ como

$$c_k(i) = \begin{cases} a(i) & i < k \\ b(i) & i \geq k \end{cases}$$

tenemos que $(c_k)_* : x \rightarrow y$ es una flecha de Δ/C para todo k , $(c_{n_x+1})_* = a_*$, $(c_0)_* = b_*$ y $(c_k)_* \approx (c_{k-1})_*$. De todo esto se concluye que $a_* \sim' b_*$.

Supongamos ahora que $a_* \sim b_* : x \rightarrow y$ son cualesquiera. Llamamos $m(i) = \min(a(i), b(i))$ y $M(i) = \max(a(i), b(i))$. Así se tiene $m, M : [n_x] \rightarrow [n_y]$. Además claramente vale

$$m_* \sim a_* \sim b_* \sim M_*$$

Por lo probado antes se tiene $m_* \sim' a_*$ y $m_* \sim' b_*$, de donde $a_* \sim' b_*$. \square

6.3.4 Definición. Con $[\Delta/C]$ denotamos la categoría cociente, con los mismos objetos que Δ/C y flechas las clases de equivalencia determinadas por \sim . La *subdivisión de C* , denotada $\text{Sd}(C)$, es la subcategoría plena de $[\Delta/C]$ cuyos objetos son los símlices no degenerados.

6.3.5. Podemos describir la situación con el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} & \Delta/C & \\ & \downarrow & \\ \text{Sd}(C) & \longrightarrow & [\Delta/C] \end{array}$$

donde $i = i_C : \text{Sd}(C) \rightarrow \Delta/C$ es la inclusión y $\Delta/C \rightarrow [\Delta/C]$ es la identidad en los objetos y manda una flecha $a_* : x \rightarrow y$ a su clase $[a_*]$ bajo \sim .

6.3.6 Ejemplo. Si C es la categoría $0 \xrightleftharpoons[g]{f} 1$, entonces la subcategoría plena de Δ/C generada por los símlices no degenerados es

$$\begin{array}{ccc} (0) & \longrightarrow & (f) \\ & \searrow & \nearrow \\ & & (g) \\ (1) & \longrightarrow & (g) \end{array}$$

donde f y g denotan las flechas no triviales de C . Esta subcategoría coincide con $\text{Sd}(C)$, pues como los hom tienen un solo elemento la relación \sim resulta trivial. El espacio clasificante $B(\text{Sd}(C))$ es la esfera S^1 .

6.3.7 Ejemplo. Si C es el grupoides simplemente conexo con dos objetos $f : 0 \rightrightarrows 1 : g$, entonces NC tiene dos símplices no degenerados en cada dimensión q : a saber (f, g, f, \dots) y (g, f, g, \dots) . Si $q < p$, entonces se tienen varias flechas en Δ/C entre un q -símplex y un p -símplex, pero como C no tiene isomorfismos no triviales, fácilmente se comprueba que cualesquiera dos de ellas son equivalentes. Luego, $\text{Sd}(C)$ es el poset representado por

$$\begin{array}{ccccccc}
 (0) & \longrightarrow & (f) & \longrightarrow & (f, g) & \longrightarrow & \dots \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \\
 & & & & & & \\
 (1) & \longrightarrow & (g) & \longrightarrow & (g, f) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

$\text{Sd}(C)$ es el colímite de sus subcategorías $\text{Sd}(C)_{\leq n}$ formadas por los símplices de dimensión $\leq n$. Como $B(\text{Sd}(C)_{\leq n}) = S^n$ y como B conmuta con colímites filtrantes (cf. 2.3.9), concluimos que $B(\text{Sd}(C))$ es homeomorfo a la esfera infinita S^∞ (y por lo tanto contráctil, como BC).

6.3.8. En trabajos de Anderson [An78] y Dwyer-Kan [DK83] se presenta la subdivisión por una propiedad universal, pero no se da una construcción explícita. En [dH08a] se prueba que la subdivisión tiene por objetos los símplices no degenerados de NC , y por flechas *clases* de flechas de Δ/C , pero se da una descripción indirecta de la relación \sim . Desde este punto de vista, la presentación dada aquí es más completa. La equivalencia con la primera definición se verá en 6.4.3. La equivalencia con la dada en [dH08a] sigue por transitividad, aunque también puede probarse directamente.

6.4 Suryecciones y subdivisión

Probamos aquí que $[\Delta/C]$ es equivalente a $S^{-1}(\Delta/C)$, la localización de Δ/C por el conjunto S de suryecciones.

6.4.1. Observar que si hay una suryección $a_* : x \rightarrow y$ en Δ/C , entonces x es una degeneración de y .

6.4.2 Proposición. Una suryección $a_* : x \rightarrow y$ en Δ/C induce un isomorfismo $[a_*] : x \rightarrow y$ en $[\Delta/C]$.

Demostración. Sea $b : [n_y] \rightarrow [n_x]$ la sección para a dada por $b(j) = \min\{i : a(i) = j\}$. Entonces $y = yab = xb$, es decir $b_* : y \rightarrow x$ está bien definido. Como $ab = \text{id}$ se tiene $a_*b_* = \text{id}$. Además, dado $i \in [n_x]$ la flecha $x_{ba(i),i}$ es igual a $y_{aba(i),a(i)} = y_{a(i),a(i)}$, de donde $b_*a_* \sim \text{id}$. \square

6.4.3 Proposición. Si $\Delta/C \rightarrow D$ es un funtor que manda suryecciones en isomorfismos, entonces se factoriza como $\Delta/C \rightarrow [\Delta/C] \rightarrow D$ de forma única. Así, $[\Delta/C]$ resulta la localización de Δ/C por las suryecciones.

Demostración. Si existe, esta factorización es única porque $\Delta/C \rightarrow [\Delta/C]$ es suryectivo tanto en objetos como en flechas. Sea $u : \Delta/C \rightarrow D$ un funtor que invierte suryecciones. Basta ver que si $a_* \approx b_* : x \rightarrow y$, entonces $u(a_*) = u(b_*)$ (cf. 6.3.3). Tenemos $a, b : [n_x] \rightarrow [n_y]$, $a(i) = b(i)$ para todo $i \neq i_0$, $a(i_0) \leq b(i_0)$. Sea

$$c : [n_x + 1] \rightarrow [n_y] \quad c(i) = \begin{cases} a(i) & i \leq i_0 \\ b(i-1) & i > i_0 \end{cases}$$

Tenemos el siguiente diagrama en Δ/C :

$$\begin{array}{ccc} & x\sigma_{i_0} & \\ & \nearrow c_* & \\ (\sigma_{i_0})_* & \begin{array}{c} \uparrow (\delta_{i_0})_* \\ \uparrow (\delta_{i_0+1})_* \\ x \end{array} & \searrow a_* \\ & \xrightarrow{a_*} & y \\ & \xrightarrow{b_*} & \end{array} \quad \begin{array}{l} a_* = c_* \circ (\delta_{i_0+1})_* \\ b_* = c_* \circ (\delta_{i_0})_* \end{array}$$

Como $\sigma_{i_0} : [n_x + 1] \rightarrow [n_x]$ satisface $\sigma_{i_0}\delta_{i_0} = \text{id}_{[n_x]} = \sigma_{i_0}\delta_{i_0+1}$ sigue que tanto $u((\delta_{i_0+1})_*)$ como $u((\delta_{i_0})_*)$ son inversas a derecha de una flecha inversible, y por ende son iguales.

$$u(a_*) = u(c_*)u((\delta_{i_0+1})_*) = u(c_*)u((\sigma_{i_0})_*^{-1}) = u(c_*)u((\delta_{i_0})_*) = u(b_*)$$

□

6.4.4. El resultado anterior prueba que la definición de subdivisión dada aquí es equivalente a aquellas de [An78, DK83, dH08a].

6.5 Subdivisión y posets

Al subdividir dos veces una categoría se obtiene un poset. Esta propiedad establece un fuerte vínculo entre la teoría de homotopía de categorías y la de posets.

6.5.1. Sea $[a_*] : x \rightarrow y$ una flecha en $\text{Sd}(C)$, con $a : [n_x] \rightarrow [n_y]$. Entonces $x = y \circ a$. Como x es un símplex no degenerado de NC , a debe ser inyectiva. Luego $n_x \leq n_y$, y vale la igualdad si y sólo si $a = \text{id}_{[n_x]} = \text{id}_{[n_y]}$.

6.5.2 Lema. *En $\text{Sd}(C)$ los únicos isomorfismos son las identidades.*

Demostración. Si $[a_*] : x \rightarrow y$ es una flecha en $\text{Sd}(C)$ entonces $n_x \leq n_y$. Si además $[a_*]$ es inversible entonces hay una flecha $y \rightarrow x$ en $\text{Sd}(C)$ y por lo tanto $n_y \leq n_x$. El resultado se concluye por 6.5.1. □

6.5.3 Lema. *En $\text{Sd}(C)$ los únicos endomorfismos son las identidades.*

Demostración. Inmediato a partir de la observación 6.5.1. □

6.5.4 Teorema. $\text{Sd}(C)$ es un poset si y sólo si los únicos endomorfismos de C son las identidades.

Demostración. Una categoría pequeña es un poset si satisface

- (i) no tiene flechas paralelas y
- (ii) no tiene dos objetos distintos e isomorfos.

Por lo tanto (cf. 6.5.2), basta con demostrar que $\text{Sd}(C)$ no tiene flechas paralelas si y sólo si los únicos endomorfismos de C son las identidades.

Si C no tiene endomorfismos no triviales, entonces dos morfismos paralelos a_*, b_* en Δ/C son necesariamente equivalentes, tal como se deduce de nuestra definición (cf. 6.3.1, notar que $x_{m(i),M(i)}$ debe ser una identidad). Por otro lado, si $f : c \rightarrow c$ es un endomorfismo no trivial de C , entonces las dos inclusiones $[0] \rightrightarrows [1]$ en Δ inducen morfismos paralelos $(c) \rightrightarrows (f)$ en Δ/C que no son equivalentes. \square

6.5.5 Corolario. $\text{Sd}^2(C)$ es un poset para toda categoría pequeña C .

Demostración. Es inmediato a partir de los resultados 6.5.3 y 6.5.4. \square

6.6 Funtorialidad de la subdivisión

Mostramos a continuación cómo se define la subdivisión de un morfismo de categorías pequeñas. Esta construcción, que puede resultar algo indirecta, establece la funtorialidad de la subdivisión.

6.6.1 Notación. Si x es un simplex de NC , entonces denotamos por $r(x)$ su forma normal (cf. 1.2.4) y por α_x la suryección tal que $x = r(x) \circ \alpha_x$ en NC .

6.6.2. Pensando x como una tira de flechas, $r(x)$ es simplemente la tira que se obtiene al suprimir las identidades, y α_x es la única suryección satisfaciendo $\alpha_x(i-1) = \alpha_x(i) \iff f_i = \text{id}$.

6.6.3. Con las notaciones de arriba, $r(x)$ es un simplex no degenerado de NC , y $(\alpha_x)_* : x \rightarrow r(x)$ es una suryección en Δ/C y por lo tanto un isomorfismo en $[\Delta/C]$ (cf. 6.4.2). Luego todo objeto de $[\Delta/C]$ es isomorfo a uno de $\text{Sd}(C)$, de donde la inclusión $i : \text{Sd}(C) \rightarrow [\Delta/C]$ es, además de plenamente fiel, esencialmente suryectiva y por lo tanto una equivalencia de categorías.

6.6.4 Definición. Llamamos $r = r_C : [\Delta/C] \rightarrow \text{Sd}(C)$ al funtor que manda un objeto x a su forma normal $r(x)$, y una flecha $[a_*] : x \rightarrow y$ a la composición $[(\alpha_y)_*][a_*][(\alpha_x)_*]^{-1}$.

6.6.5. El morfismo r_C es un quasi inverso para la inclusión. Es claro que $r_C i_C = \text{id}_{\text{Sd}(C)}$. Además los morfismos $[(\alpha_x)_*] : x \rightarrow r(x)$ determinan un isomorfismo natural $i_C r_C \cong \text{id}_{[\Delta/C]}$.

6.6.6 Proposición. *La asignación $C \mapsto \text{Sd}(C)$ es funtorial.*

$$\text{Sd} : \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{C}at$$

Demostración. Un morfismo entre categorías pequeñas $u : C \rightarrow D$ induce uno nuevo $u_* : \Delta/C \rightarrow \Delta/D$ dado por $x \mapsto u \circ x$. Este functor claramente preserva equivalencias (cf. 6.3.1), y por lo tanto induce un functor $[u_*] : [\Delta/C] \rightarrow [\Delta/D]$. Notar que no necesariamente $[u_*]$ lleva $\text{Sd}(C)$ en $\text{Sd}(D)$. Luego definimos $\text{Sd}(u)$ como la composición $r_D \circ [u_*] \circ i_C$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Sd}(C) & \xrightarrow{i_C} & [\Delta/C] \\ \text{Sd}(u) \downarrow & & \downarrow [u_*] \\ \text{Sd}(D) & \xleftarrow{r_D} & [\Delta/D] \end{array}$$

Para probar que esta construcción es efectivamente funtorial, debemos verificar que preserva identidades y composiciones. Lo primero vale porque $\text{Sd}(\text{id}) = r_C [\text{id}_*] i_C = r_C i_C = \text{id}_{\text{Sd}(C)}$. Sobre lo segundo, si $u : C \rightarrow D$ y $v : D \rightarrow E$ entonces el isomorfismo natural $\alpha : \text{id} \cong i_D r_D$ induce otro

$$\text{Sd}(vu) = r_E [(vu)_*] i_C = r_E [v_*] [u_*] i_C \cong r_E [v_*] i_D r_D [u_*] i_C = \text{Sd}(v) \text{Sd}(u)$$

entre funtores $\text{Sd}(C) \rightarrow \text{Sd}(E)$. Como en $\text{Sd}(E)$ los únicos isomorfismos son las identidades (cf. 6.5.2), el isomorfismo natural $\text{Sd}(vu) \cong \text{Sd}(v) \text{Sd}(u)$ debe ser la identidad, y así resulta $\text{Sd}(vu) = \text{Sd}(v) \text{Sd}(u)$. \square

6.6.7. Identificando $\mathcal{P}oset$ con una subcategoría plena de $\mathcal{C}at$ a partir del functor $\mathcal{P}oset \rightarrow \mathcal{C}at$ (cf. 1.3.3), el functor Sd^2 se factoriza del siguiente modo:

$$\text{Sd}^2 : \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{P}oset \subset \mathcal{C}at$$

Esto se deduce de los resultados 6.5.5 y 6.6.6.

6.7 El functor de aumentación $\epsilon : \text{Sd}(C) \rightarrow C$

6.7.1. El functor $\text{sup} : \Delta/C \rightarrow C$ iguala morfismos equivalentes, pues si $a_* \sim b_* : x \rightarrow y$ en Δ/C , suponiendo $a(n_x) \leq b(n_y)$ resulta

$$\text{sup}(a_*) = y_{a(n_x), n_y} = y_{b(n_x), n_y} \circ y_{a(n_x), b(n_x)} = y_{b(n_x), n_y} = \text{sup}(b_*).$$

Por lo tanto se tiene un nuevo funtor $[\text{sup}] : [\Delta/C] \rightarrow C$.

$$\begin{array}{ccc} & \Delta/C & \\ & \downarrow & \searrow^{\text{sup}} \\ \text{Sd}(C) & \xrightarrow{i} & [\Delta/C] \xrightarrow{[\text{sup}]} C \end{array}$$

6.7.2 Definición. Llamamos $\epsilon = \epsilon_C : \text{Sd}(C) \rightarrow C$ a la composición $[\text{sup}] \circ i$.

6.7.3. Pensando $\text{Sd}(C)$ como una *resolución* o *reemplazo cofibrante* de C , el funtor ϵ desempeña el rol de *augmentación*.

6.7.4 Lema. *El funtor ϵ_C es natural en C .*

$$\epsilon : \text{Sd} \Rightarrow \text{id}_{\text{Cat}}$$

Demostración. Dado $u : C \rightarrow D$ en Cat , se tiene el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sd}(C) & \xrightarrow{i_C} & [\Delta/C] & \xrightarrow{[\text{sup}]} & C \\ \text{Sd}(u) \downarrow & \cong & [u_*] \downarrow & & u \downarrow \\ \text{Sd}(D) & \xrightarrow{i_D} & [\Delta/D] & \xrightarrow{[\text{sup}]} & D \end{array}$$

Claramente sup es natural, y por lo tanto $[\text{sup}]$ también lo es. Luego, el cuadrado derecho conmuta. El cuadrado izquierdo no conmuta, pero existe un isomorfismo natural $[u_*]i_C \Rightarrow i_D \text{Sd}(u)$ que consiste de la suryección (cf. 6.6.1):

$$\alpha_{ux} : ux \Rightarrow i_D r_D(ux) \quad x \in \text{Sd}(C)_0$$

Finalmente, como sup manda suryecciones en identidades, el isomorfismo natural $[u_*]i_C \Rightarrow i_D \text{Sd}(u)$ induce una identidad de funtores

$$[\text{sup}][u_*]i_C = [\text{sup}]i_D \text{Sd}(u)$$

por lo cual el cuadrado exterior conmuta y el lema sigue. \square

6.7.5. A continuación probaremos que $\epsilon : \text{Sd}(C) \rightarrow C$ es una equivalencia homotópica usando el Teorema A. En efecto, si bien sup no es una prefibración (ver 6.2.5), tanto $[\text{sup}]$ como ϵ sí lo son, y tienen además fibras contráctiles.

6.7.6 Proposición. *El funtor $\epsilon : \text{Sd}(C) \rightarrow C$ es una prefibración.*

Demostración. Dado x un objeto de la subdivisión y $f : \epsilon(x) = x_{n_x} \rightarrow c$ una flecha en C , debemos mostrar que existe una flecha cartesiana sobre f con dominio x . El caso en que $f = \text{id}_c$ se resuelve fácilmente. Asumamos entonces que $f \neq \text{id}_c$.

A partir de x y f definimos $\tilde{x} = (x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{n_x} \xrightarrow{f} c)$ el símplex que resulta de extender x con f , y $[d_*] : x \rightarrow \tilde{x}$ donde $d : [n_x] \rightarrow [n_x + 1]$ es la inclusión ($d = \delta_{n_x+1}$). Afirmamos que $[d_*]$ es una flecha cartesiana.

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ \forall g \nearrow & \uparrow & \exists! h \\ x & \xrightarrow{[d_*]} & \tilde{x} \end{array}$$

En efecto, dada $g = [a_*] : x \rightarrow y$ una flecha sobre f , fácilmente se verifica que $g = h \circ [d_*]$ con $h = [b_*]$ el morfismo dado por

$$b : [n_x + 1] \rightarrow [n_y] \quad b(i) = \begin{cases} a(i) & i \neq n_x + 1 \\ n_y & i = n_x + 1 \end{cases},$$

y que $\epsilon(h) = \text{id}_c$. Para la unicidad, suponemos que $[c_*] : \tilde{x} \rightarrow y$ es tal que $[a_*] = [c_*][d_*]$ y $\epsilon([c_*]) = \text{id}$, y probamos que $b_* \sim c_*$ (recordar 6.3.1):

- Si $i \leq n_x$ y $b(i) \leq c(i)$ entonces $y_{b(i),c(i)} = y_{bd(i),cd(i)} = y_{a(i),cd(i)} = \text{id}$; similarmente si $b(i) \geq c(i)$.
- $y_{c(n_x+1),b(n_x+1)} = y_{c(n_x+1),n_y} = \epsilon([c_*]) = \text{id}$.

□

6.7.7. La demostración de que $[\text{sup}]$ es una prefibración es análoga. En general, ni ϵ ni $[\text{sup}]$ son fibraciones. Esto se debe a que las flechas cartesianas no triviales incrementan la dimensión estrictamente en 1, y por lo tanto la composición de dos de ellas no puede ser cartesiana.

6.7.8 Teorema. *El funtor $\epsilon : \text{Sd}(C) \rightarrow C$ es una equivalencia homotópica.*

6.7.9. Este resultado sugiere considerar $\text{Sd}(C)$ como un modelo alternativo para el tipo homotópico de BC , que es de algún modo localmente más simple que C .

Demostración. Aplicaremos el Teorema A (cf. 4.4.3). Como ϵ es prefibración (cf. 6.7.6), basta con probar que sus fibras son contráctiles. Dado c objeto de C , probaremos que la fibra $\text{Sd}(C)_c$ tiene objeto inicial (cf. 2.3.7).

El objeto inicial será (c) , el 0-símplex inducido. Si x es un objeto cualquiera de $\text{Sd}(C)_c$, entonces la última inclusión $d : [0] \rightarrow [n_x]$ induce una flecha $[d_*] : (c) \rightarrow x$ en $\text{Sd}(C)_c$. Además cualquier flecha $[d'_*] : (c) \rightarrow x$ en la fibra satisface $x_{d'(0),d(0)} = x_{d'(0),n_x} = \epsilon([d']) = \text{id}$ y por lo tanto $[d_*] = [d'_*]$. \square

6.7.10 Corolario. $\text{Sd} : \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$ preserva equivalencias homotópicas.

Demostración. Si $u : C \rightarrow D$ es una equivalencia homotópica en Cat , entonces por el teorema anterior (cf. 6.7.8), el cuadrado siguiente y el axioma 2-de-3 $\text{Sd}(u)$ también lo es.

$$\begin{array}{ccc} \text{Sd}(C) & \xrightarrow{\epsilon_C} & C \\ \text{Sd}(u) \downarrow & & \downarrow u \\ \text{Sd}(D) & \xrightarrow{\epsilon_D} & D \end{array}$$

\square

6.7.11. Se tienen construcciones y resultados análogos a los anteriores, considerando el functor $\text{ínf} : \Delta/C \rightarrow C^\circ$ en lugar de $\text{sup} : \Delta/C \rightarrow C$. ínf iguala morfismos equivalentes, por lo tanto pasa al cociente como $[\text{ínf}] : \Delta/C \rightarrow C^\circ$ e induce un morfismo $\epsilon' : \text{Sd}(C) \rightarrow C^\circ$, que es natural en C . Si bien ínf no es una prefibración, sí lo es ϵ' . Además las fibras son contráctiles, de donde ϵ' es equivalencia homotópica.

6.8 Aplicación: La categoría homotópica de posets

En esta sección definiremos la categoría HoPoset , y probaremos que la inclusión $\text{Poset} \rightarrow \text{Cat}$ induce una equivalencia a nivel homotópico. De aquí se deduce que Poset es equivalente a HoTop , la categoría homotópica clásica, y que los posets sirven como modelos de tipos de homotopía.

6.8.1. La inclusión $i : \text{Poset} \rightarrow \text{Cat}$ (cf. 1.3.3) admite un adjunto a derecha $p : \text{Cat} \rightarrow \text{Poset}$, que asigna a cada categoría C el poset asociado al preorden definido en los objetos de C usando la regla

$$c \leq c' \iff C(c, c') \neq \emptyset$$

La inclusión $\text{Poset} \rightarrow \text{Cat}$ permite pensar a Poset como una subcategoría plena reflexiva de Cat . De este modo Poset obtiene una noción de equivalencia homotópica restringido aquella de Cat .

6.8.2 Definición. Decimos que $f : P \rightarrow Q$ en Poset es una *equivalencia homotópica* si f lo es en Cat . La *categoría homotópica de Poset*, denotada HoPoset , es la localización de Poset por las equivalencias homotópicas.

6.8.3. El adjunto a la inclusión $p : \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{P}oset$ no es satisfactoria con respecto a la homotopía. Si bien $pi(P) = P$, la composición ip no preserva los tipos homotópicos. Por ejemplo, si G es un grupo visto como categoría con un solo objeto, entonces BG es un $K(G, 1)$ y $B(ip(G)) = pt$. Construimos a continuación un inverso homotópico para i .

6.8.4 Teorema. *La inclusión $i : \mathcal{P}oset \rightarrow \mathcal{C}at$ induce una equivalencia entre las categorías homotópicas.*

$$\mathrm{Ho} \mathcal{P}oset \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ho} \mathcal{C}at$$

Demostración. En virtud de la proposición A.2.7 es suficiente exhibir un funtor $r : \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{P}oset$ y una equivalencia homotópica natural $\alpha : ir \Rightarrow \mathrm{id}$. Como funtor r tomamos la doble subdivisión (cf. 6.6.7).

$$\mathrm{Sd}^2 : \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{P}oset$$

Como transformación natural $\alpha : \mathrm{Sd}^2 \Rightarrow \mathrm{id}$ tomamos la composición

$$\mathrm{Sd}^2(C) \xrightarrow{\epsilon_{\mathrm{Sd}(C)}} \mathrm{Sd}(C) \xrightarrow{\epsilon_C} C$$

que es una equivalencia homotópica (cf. 6.7.8). □

Capítulo 7

2-Categorías

Las 2-categorías fueron introducidas por Ehresmann en la década del 60. En este capítulo repasamos las definiciones y propiedades básicas de 2-categorías. También describimos dos nociones de morfismos entre ellas, los 2-funtores y los funtores laxos. Nuestras referencias en el tema son [KeS74, Bo94].

Luego discutimos análogos a la fibra homotópica en este contexto. Por último, introducimos una construcción original que asocia a cada categoría C una 2-categoría \tilde{C} con la siguiente propiedad universal: para toda 2-categoría D se tiene una biyección natural

$$\mathcal{Lax}(C, D) \cong 2\mathcal{Cat}(\tilde{C}, D)$$

En esta construcción se usarán los resultados obtenidos en §6.

7.1 Definiciones y ejemplos

Repasamos a continuación las definiciones básicas y damos ejemplos de 2-categorías grandes y pequeñas.

7.1.1 Definición. Una *2-categoría* C es una categoría enriquecida sobre \mathcal{Cat} . Consiste en los siguientes datos:

- i) un conjunto o clase de objetos C_0 ;
- ii) para cada par $c, c' \in C_0$ una categoría pequeña $C(c, c')$;
- iii) para cada $c \in C_0$ una flecha *identidad* $\text{id}_c \in C(c, c)_0$;
- iv) dados $c, c', c'' \in C_0$ un functor de *composición*

$$\circ : C(c, c') \times C(c', c'') \rightarrow C(c, c'').$$

Estos datos deben satisfacer los siguientes axiomas:

- A) (neutro) las flechas id_c son neutros de \circ a izquierda y a derecha;

B) (asociatividad) dados $c, c', c'', c''' \in C_0$, se tiene un diagrama conmutativo en Cat :

$$\begin{array}{ccc}
 & C(c, c') \times C(c', c'') \times C(c'', c''') & \\
 \text{id} \times \circ \swarrow & & \searrow \circ \times \text{id} \\
 C(c, c') \times C(c', c''') & & C(c, c'') \times C(c'', c''') \\
 \circ \searrow & & \swarrow \circ \\
 & C(c, c''') &
 \end{array}$$

7.1.2. Los objetos de $C(c, c')$ son las flechas $f : c \rightarrow c'$, y las flechas de $C(c, c')$ reciben el nombre de 2-celdas, y se visualizan del siguiente modo:

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 c & \xrightarrow{\quad} & c' \\
 & \Downarrow \alpha & \\
 & g &
 \end{array}$$

Una 2-categoría tiene tres niveles de estructura. Denotamos C_0, C_1 y C_2 a los conjuntos (o clases) de objetos, flechas y 2-celdas de C respectivamente.

7.1.3. Notar que a partir de la definición se deducen dos operaciones parciales definidas en C_2 :

- La composición *horizontal* \circ es aquella dada por los funtores de composición de la 2-categoría

$$c \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \Downarrow \alpha \end{array} c' \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \Downarrow \alpha' \end{array} c'' \rightsquigarrow c \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \Downarrow \alpha' \circ \alpha \end{array} c''$$

- La composición *vertical* \bullet es aquella dada por la composición en las categorías $C(c, c')$

$$c \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{\quad} \\ \Downarrow \beta \end{array} c' \rightsquigarrow c \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \Downarrow \beta \bullet \alpha \end{array} c'$$

Se deduce de la functorialidad de la composición (cf. 7.1.1.iv) que estas operaciones son mutuamente distributivas: $(\beta' \bullet \alpha') \circ (\beta \bullet \alpha) = (\beta' \circ \beta) \bullet (\alpha' \circ \alpha)$.

7.1.4 *Notación.* Cuando escribamos $f \circ \alpha$ nos referiremos a la composición de α con la 2-celda identidad id_f , y análogamente para $\alpha \circ f$.

7.1.5 Ejemplo. El ejemplo paradigmático de 2-categoría es Cat , cuyos objetos son las categorías pequeñas, sus flechas son los funtores y sus 2-celdas son las transformaciones naturales.

7.1.6 Ejemplo. Otro ejemplo importante es $\mathcal{T}op$. Sus objetos son los espacios topológicos, sus flechas las funciones continuas, y sus 2-celdas son las *clases homotópicas de* homotopías. Dadas $H_1 : f \cong g : X \rightarrow Y$ y $H_2 : g \cong h : X \rightarrow Y$ homotopías, se define la composición $H_2 \bullet H_1 : f \cong h : X \rightarrow Y$ como

$$(H_2 \bullet H_1)(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t) & t \leq 1/2 \\ H_2(x, 2t - 1) & t \geq 1/2 \end{cases}$$

El problema con esta composición vertical es que no es asociativa, es decir $(H_3 \bullet H_2) \bullet H_1 \neq H_3 \bullet (H_2 \bullet H_1)$. Sin embargo, estas dos homotopías son *homotópicas* como funciones $X \times I \rightarrow Y$ (relativamente a $X \times \partial I$). La operación \bullet respeta clases homotópicas, induciendo una estructura de grupoide en $\mathcal{T}op(X, Y)$, y por lo tanto una estructura de 2-categoría en $\mathcal{T}op$ en la que toda 2-celda es inversible.

7.1.7. Diremos que una 2-categoría es *pequeña* si C_0 es un conjunto, es decir un objeto de $\mathcal{S}et$. Los ejemplos $\mathcal{C}at$ y $\mathcal{T}op$ no son pequeños. Como nuestro interés radica en los espacios clasificantes y sus tipos homotópicos usualmente trabajaremos con 2-categorías pequeñas.

7.1.8 Ejemplo. Una categoría C puede ser vista como una 2-categoría cuyas únicas 2-celdas son las identidades.

7.1.9 Ejemplo. Las categorías monoidales (estrictas, cf. 9.5.1) pueden ser vistas como 2-categorías con un solo objeto. Concretamente, si (M, \otimes) es una categoría monoidal, entonces se tiene una 2-categoría \dot{M} con $\dot{M}_0 = *$, $\dot{M}(*, *) = M$ y composición horizontal dada por \otimes .

7.1.10. Toda 2-categoría C tiene una categoría subyacente UC , con los mismos objetos y flechas que la anterior. Luego una 2-categoría resulta una categoría equipada con estructura adicional.

7.1.11. Tanto las flechas como las 2-celdas tienen direcciones. Las siguientes construcciones invierten el sentido de éstas.

- Si C es una 2-categoría, se define la 2-categoría *opuesta* C° como aquella con los mismos objetos que C , con $C^\circ(c, c') = C(c', c)$.
- Si C es una 2-categoría, definimos C'' como la 2-categoría que se obtiene a partir de C invirtiendo la dirección de las 2-celdas. Más precisamente, $C'_0 = C_0$ y $C''(x, y) = C(x, y)^\circ$.

En ambos casos identidades y composiciones son las inducidas por las de C . Valen las siguientes igualdades:

$$C''' = C \quad C^{\circ\circ} = C \quad C'^{\circ} = C^{\circ'}$$

7.2 2-Funtores

Los 2-funtores son asignaciones entre los objetos, las flechas y las 2-celdas que preservan toda la estructura. Si bien resultan algo rígidos, constituyen la noción más básica de morfismo entre 2-categorías.

7.2.1 Definición. Dadas C, D 2-categorías, un 2-functor $u : C \rightarrow D$ es un morfismo de categorías enriquecidas sobre $\mathcal{C}at$. Consiste en los siguientes datos:

- i) una asignación $u : C_0 \rightarrow D_0$ entre los objetos;
- ii) para cada par $c, c' \in C_0$ un functor $u : C(c, c') \rightarrow D(u(c), u(c'))$.

Estos datos deben respetar la composición y las identidades. Más precisamente,

- A) $u(\text{id}_c) = \text{id}_{u(c)}$ para todo c ;
- B) el siguiente diagrama de $\mathcal{C}at$ conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C(c, c') \times C(c', c'') & \xrightarrow{\circ} & C(c, c'') \\ \downarrow u \times u & & \downarrow u \\ D(u(c), u(c')) \times D(u(c'), u(c'')) & \xrightarrow{\circ} & D(u(c), u(c'')) \end{array}$$

7.2.2 Notación. Las 2-categorías pequeñas y los 2-funtores forman una categoría, que denotaremos $2\mathcal{C}at$.

7.2.3. Con estas definiciones, las construcciones de inclusión (cf. 7.1.8) y olvido (cf. 7.1.10) resultan functoriales

$$\iota : \mathcal{C}at \rightarrow 2\mathcal{C}at \quad U : 2\mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{C}at$$

El functor de inclusión es adjunto a izquierda del olvido, es decir $\iota \dashv U$. Además ι es plenamente fiel.

7.2.4 Ejemplo. Sea C una 2-categoría y sea $c \in C_0$ un objeto. Se define $h^c : C^\circ \rightarrow \mathcal{C}at$, el 2-functor *representado por c* , mediante las siguientes fórmulas:

- i) dado $c' \in C_0$, $h^c(c') = C(c', c)$;
- ii) dados $c', c'' \in C_0$, el functor

$$h^c : C^\circ(c', c'') = C(c'', c') \rightarrow \mathcal{C}at(C(c', c), C(c'', c))$$

es el asociado a la composición vía la ley exponencial: $h^c(\alpha)(\beta) = \alpha \circ \beta$.

7.2.5 Ejemplo. El hecho de que transformaciones naturales entre categorías pequeñas dan lugar a homotopías al aplicar el functor *espacio clasificante* permite pensar a este functor como un 2-functor $\mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{T}op$ (cf. 2.3.5).

7.2.6. Las construcciones $C \mapsto C^\circ$ y $C \mapsto C'$ son functoriales.

$$(-)^\circ : 2\mathcal{C}at \rightarrow 2\mathcal{C}at \quad (-)' : 2\mathcal{C}at \rightarrow 2\mathcal{C}at$$

7.3 Funtores laxos

La conmutatividad en la condición 7.2.1.B implica la igualdad entre dos funtores. Uno puede relajar esta condición requiriendo la existencia de un isomorfismo natural, o simplemente la existencia de una transformación natural. Estas transformaciones naturales deberán satisfacer ciertos *axiomas de coherencia*. La experiencia ha demostrado que estas *nociones laxas* emergen naturalmente, e incluso suelen ser más convenientes que los 2-funtores.

7.3.1 Definición. Un *functor laxo* (normal) entre 2-categorías $u : C \rightsquigarrow D$ consiste en:

- i) una asignación $u : C_0 \rightarrow D_0$ entre los objetos;
- ii) para cada par de objetos $c, c' \in C_0$ un funtor $u : C(c, c') \rightarrow D(u(c), u(c'))$;
- iii) para cada par de flechas componibles $f : c \rightarrow c', g : c' \rightarrow c''$ en C una 2-celda estructural $u_{g,f} : u(gf) \Rightarrow u(g)u(f) \in D_2$.

Los datos de arriba deben satisfacer lo siguiente:

- A) (normalidad) $u(\text{id}_c) = \text{id}_{u(c)}$ para todo $c \in C_0$ y $u_{\text{id},f} = \text{id} = u_{f,\text{id}}$ para toda $f \in C_1$;
- B) dados $c, c', c'' \in C_0$, las 2-celdas estructurales determinan una transformación natural

$$\begin{array}{ccc}
 C(c, c') \times C(c', c'') & \xrightarrow{\circ} & C(c, c'') \\
 \downarrow u \times u & \Leftarrow & \downarrow u \\
 D(u(c), u(c')) \times D(u(c'), u(c'')) & \xrightarrow{\circ} & D(u(c), u(c''))
 \end{array}$$

En ecuaciones, ésto significa que para todo $a : f \Rightarrow f' : c \rightarrow c'$ y $b : g \Rightarrow g' : c' \rightarrow c''$ vale

$$(u(b) \circ u(a)) \bullet u_{g,f} = u_{g',f'} \bullet u(b \circ a)$$

- C) para toda tira de flechas componibles $c \xrightarrow{f} c' \xrightarrow{g} c'' \xrightarrow{h} c'''$ en C se tiene la siguiente igualdad de 2-celdas $u(hgf) \Rightarrow u(h)u(g)u(f)$,

$$(u_{h,g} \circ u(f)) \bullet u_{hg,f} = (u(h) \circ u_{g,f}) \bullet u_{h,gf}$$

7.3.2. Un funtor laxo con 2-celdas estructurales triviales es un 2-functor tal como se definió arriba. La noción de funtor laxo extiende por lo tanto aquella de 2-functor.

7.3.3. La condición C) implica que para toda tira de flechas componibles se tiene una única 2-celda estructural

$$u_{f_d, \dots, f_1} : u(f_d \dots f_1) \Rightarrow u(f_d) \dots u(f_1)$$

7.3.4. Si C es una categoría vista como 2-categoría del modo usual (cf. 7.1.8), un funtor laxo $u : C \rightsquigarrow D$ toma una forma particularmente simple. Porque C no tiene 2-celdas, la condición B) se verifica automáticamente. Si tanto C como D son categoría, un funtor laxo $u : C \rightsquigarrow D$ es lo mismo que un morfismo en Cat .

7.3.5 Ejemplo. Dada B una categoría pequeña, un funtor laxo $B \rightsquigarrow Cat$ es esencialmente lo mismo que una prefibración $E \rightarrow B$ con un clivaje distinguido. Esta correspondencia está dada por la construcción de Grothendieck (cf. 3.8.4).

7.3.6. Si $u : C \rightsquigarrow D$ y $v : D \rightsquigarrow E$ son dos funtores laxos, entonces la *composición* $vu : C \rightsquigarrow E$ se define mediante los siguientes datos.

- i) en los objetos $vu : C_0 \rightarrow E_0$ es la composición obvia;
- ii) para cada par $c, c' \in C_0$ el funtor $vu : C(c, c') \rightarrow E(vu(c), vu(c'))$ es la composición de los funtores $u : C(c, c') \rightarrow D(u(c), u(c'))$ y $v : D(u(c), u(c')) \rightarrow E(vu(c), vu(c'))$;
- iii) las 2-celdas estructurales de vu están dadas por

$$(vu)_{g,f} = v_{u(g), u(f)} \bullet v(u_{g,f}).$$

Se verifica fácilmente que estos datos satisfacen los axiomas de un funtor laxo.

7.3.7. Las 2-categorías pequeñas junto con los funtores laxos conforman una categoría, que denotaremos \mathcal{Lax} . Tenemos de este modo una inclusión

$$2Cat \subset \mathcal{Lax}.$$

7.3.8 Definición. Un *pseudofunctor* $u : C \rightsquigarrow D$ es un funtor laxo para el cual las 2-celdas estructurales son isomorfismos.

7.3.9 Ejemplo. Bajo la correspondencia 7.3.5, el funtor laxo $B \rightsquigarrow Cat$ es un pseudofunctor si y sólo si $E \rightarrow B$ es una fibración.

7.3.10. La construcción $C \mapsto C^\circ$ es functorial respecto a los funtores laxos.

$$(-)^\circ : \mathcal{Lax} \rightarrow \mathcal{Lax}$$

Sin embargo, la construcción $C \mapsto C'$ no lo es. En efecto, un funtor laxo $u : C \rightsquigarrow D$ induce una asignación $u' : C' \rightsquigarrow D'$ en la que las 2-celdas estructurales van en la dirección opuesta, lo que comúnmente se llama *functor oplaxo*. Las nociones de funtor laxo y oplaxo son completamente análogas, y muchas veces es necesario combinar ambos conceptos.

7.4 Fibras homotópicas

En [Gra80] se introduce la siguiente construcción para 2-funtores, que extiende la fibra homotópica de categorías (cf. 3.1.2). En esta sección proponemos una variante de esta construcción para funtores laxos.

7.4.1 Definición. Dado $u : C \rightarrow D$ un 2-functor, y dado $d \in D_0$, llamamos *fibra homotópica* de u sobre d a la 2-categoría $u//d$ determinada por los siguientes datos.

1. los objetos de $u//d$ son los pares $(c, \phi) \in C_0 \times D_1$ tales que $\phi : u(c) \rightarrow d$;

$$(c, \phi) \quad u(c) \xrightarrow{\phi} d$$

2. las flechas $(c, \phi) \rightarrow (c', \phi')$ en $u//d$ son los pares $(f, \alpha) \in C_1 \times D_2$ tales que $f : c \rightarrow c'$ y $\alpha : \phi' u(f) \Rightarrow \phi$;

$$\begin{array}{ccc} (c, \phi) & & u(c) \\ \downarrow (f, \alpha) & & \downarrow u(f) \quad \nearrow \phi \\ (c', \phi') & & u(c') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & d \\ & \nearrow \alpha & \\ & \searrow \phi' & \end{array}$$

3. Las 2-celdas $\beta : (f, \alpha) \Rightarrow (f', \alpha')$ son 2-celdas $\beta : f \Rightarrow f'$ de C tales que $\alpha' \bullet (\phi' \circ u(\beta)) = \alpha$;

$$\begin{array}{ccc} (c, \phi) & & u(c) \\ \downarrow (f, \alpha) \quad \begin{array}{c} \rightrightarrows \\ \beta \end{array} \quad \downarrow (f', \alpha') & & \downarrow u(f) \quad \begin{array}{c} \rightrightarrows \\ u(\beta) \end{array} \quad \downarrow u(f') \\ (c', \phi') & & u(c') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & d \\ & \nearrow \alpha & \\ & \searrow \phi' & \end{array}$$

4. la composición \circ está dada por $(g, \beta) \circ (f, \alpha) = (gf, \alpha \bullet (\beta \circ u(f)))$;
5. la composición \bullet es aquella de C .

7.4.2 Notación. Haciendo abuso de notación, escribiremos $C//d$ en lugar de $u//d$ cuando no haya lugar a equivocaciones.

7.4.3. Dado $u : C \rightarrow D$ un functor entre categorías y $d \in D_0$, podemos considerar u como un 2-functor (cf. 7.2.3) y construir la fibra homotópica $C//d$. Lo que se obtiene en este caso es una categoría isomorfa a C/d , la fibra homotópica tal como fue definida en 3.1.2.

7.4.4. La fibra homotópica de un 2-functor admite la siguiente variante. Si $u : C \rightsquigarrow D$ y $d \in D_0$, entonces la categoría $(C'//d)'$ es muy similar a $C//d$: tiene los mismos objetos, pero una flecha $(c, \phi) \rightarrow (c', \phi')$ en $(C'//d)'$ es un par $(f, \alpha) \in C_1 \times D_2$ tal que $f : c \rightarrow c'$ y $\alpha : \phi \Rightarrow \phi' u(f)$.

$$\begin{array}{ccc}
 (c, \phi) & & u(c) \\
 (f, \alpha) \downarrow & & \downarrow u(f) \quad \searrow \phi \\
 (c', \phi') & & u(c') \quad \nearrow \phi'
 \end{array}$$

La composición y demás datos de $(C'//d)'$ son similares a los de $C//d$. Veremos que al tomar espacios clasificantes el dar vuelta el sentido de las 2-celdas no cambia el tipo homotópico, de donde podremos usar alternativamente cualquiera de las dos construcciones.

7.4.5. En el próximo capítulo ofrecemos una versión novedosa del Teorema A de Quillen para funtores laxos. Con tal fin es que introducimos la siguiente construcción de fibras homotópicas de funtores laxos. Desarrollaremos aplicaciones del Teorema A laxo en el capítulo 9.

7.4.6 Definición. Sea $u : C \rightsquigarrow D$ un funtor laxo, y $d \in D_0$. Entonces la *fibra homotópica* $u//d$ es la 2-categoría con objetos, flechas y 2-celdas definidos como en 7.4.1, pero con la siguiente composición horizontal:

$$(g, \beta) \circ (f, \alpha) = (gf, \alpha \bullet (\beta \circ u(f)) \bullet (\phi'' \circ u_{g,f}))$$

$$\begin{array}{ccc}
 (c, \phi) & & u(c) \\
 (f, \alpha) \downarrow & & \downarrow u(f) \quad \searrow \phi \\
 (c', \phi') & & u(c') \quad \nearrow \phi' \\
 (g, \beta) \downarrow & & \downarrow u(g) \quad \searrow \phi'' \\
 (c'', \phi'') & & u(c'')
 \end{array}$$

7.4.7. Como ya es usual, escribiremos $C//d$ en lugar de $u//d$ cuando no haya lugar a confusión. Notar que si C es una categoría entonces $C//d$ también es una categoría, en el sentido que las únicas 2-celdas son las identidades (cf. 7.1.8). Este caso particular es el que usaremos más adelante.

7.5 La construcción \tilde{C}

Dada $C \in \mathcal{Cat}$, en el próximo capítulo trabajaremos con la 2-categoría \tilde{C} que tiene como objetos aquellos de C , como flechas las tiras formales de flechas

componibles y como 2-celdas las maneras de obtener una tira a partir de otra. En esta sección describimos con precisión \tilde{C} usando subdivisión de categorías, y probamos la propiedad universal que satisface esta construcción.

7.5.1 Definición. Sea C una categoría pequeña. Dados $c, c' \in C_0$, definimos $\tilde{C}(c, c')$ como la fibra del funtor $\epsilon' \times \epsilon : \text{Sd}(C) \rightarrow C^o \times C$ sobre el objeto (c, c') (ver 6.7).

7.5.2. En otras palabras, $\tilde{C}(c, c')$ es la subcategoría (no plena) de $\text{Sd}(C)$ formada por las tiras de flechas componibles $x : [n] \rightarrow C$ que empiezan en c y terminan en c' , y por los morfismos $[a_*]$ que preservan el primero y el último elemento.

7.5.3. Si $[a_*] : x \rightarrow y$ es una flecha de $\tilde{C}(c, c')$ con $n_x > 0$, entonces $y_{0,a(0)} = \text{id}$ y $y_{a(n_x),n_y} = \text{id}$ y por lo tanto $a_* \sim a'_*$ con

$$a' : [n_x] \rightarrow [n_y] \quad a'(i) = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ a(i) & 0 < i < n_x \\ n_y & i = n_x \end{cases}$$

Luego toda flecha $[a_*] : x \rightarrow y$ en $\tilde{C}(c, c')$ está representada por un morfismo de orden a que es inyectivo (cf. 6.5.1) y preserva los extremos. En el caso $n_x = 0$ sólo podemos asumir $a(0) = 0$.

7.5.4 Definición. Dados $a : [p] \rightarrow [p']$ y $b : [q] \rightarrow [q']$, definimos $a \triangleleft b : [p+q] \rightarrow [p' + q']$ via

$$(a \triangleleft b)(i) = \begin{cases} a(i) & i \leq p \\ b(i - p) + p' & i > p \end{cases}$$

7.5.5. Fácilmente se verifican las siguientes propiedades.

- a) $\text{id}_{[p]} \triangleleft \text{id}_{[q]} = \text{id}_{[p+q]}$;
- b) $(a' \triangleleft b')(a \triangleleft b) = (a'a) \triangleleft (b'b)$ si $b(i) > 0$ para todo $i > 0$;
- c) $(a \triangleleft b) \triangleleft c = a \triangleleft (b \triangleleft c)$;
- d) $a \triangleleft \text{id}_{[0]} = a$; $\text{id}_{[0]} \triangleleft a = a$ si $a(0) = 0$.

7.5.6 Definición. Dados $x, y, z \in C_0$, definimos el funtor de yuxtaposición

$$\odot : \tilde{C}(c, c') \times \tilde{C}(c', c'') \rightarrow \tilde{C}(c, c'')$$

vía las siguientes fórmulas:

- en los objetos, $(x, y) \mapsto y \odot x : [n_x + n_y] \rightarrow C$ es la tira de flechas que se obtiene identificando el último objeto de x con el primero de y .

$$(c \rightarrow \dots \rightarrow c', c' \rightarrow \dots \rightarrow c'') \mapsto (c \rightarrow \dots \rightarrow c' \rightarrow \dots \rightarrow c'')$$

- en las flechas está dado por $([a_*], [b_*]) \mapsto [b_*] \odot [a_*] = [(a \triangleleft b)_*]$

7.5.7. Para la buena definición, debemos verificar que si $a_* \sim a'_*$ y $b_* \sim b'_*$, entonces $(a \triangleleft b)_* \sim (a' \triangleleft b')_*$. Esto es inmediato a partir de la descripción que tenemos de las flechas en la subdivisión (cf. 6.3.1). Resta probar que \odot es un functor. Claramente preserva identidades (cf. 7.5.5.a). Con respecto a la composición debemos ver que

$$([b'_*] \odot [a'_*]) \circ ([b_*] \odot [a_*]) = ([b'_*] \circ [b_*]) \odot ([a'_*] \circ [a_*])$$

Esto sigue de cómo se componen las flechas en $\text{Sd}(C)$, nuestras observaciones acerca del operador \triangleleft (cf. 7.5.5.b) y el hecho de que toda flecha de $\text{Sd}(C)$ está representada por un morfismo de orden inyectivo.

7.5.8 Definición. Definimos la 2-categoría \tilde{C} por los siguientes datos:

- los objetos de \tilde{C} son los mismos que los de C (i.e. $\tilde{C}_0 = C_0$);
- para cada par $c, c' \in \tilde{C}_0$ la categoría $\tilde{C}(c, c')$ es la definida arriba;
- la identidad $\text{id}_c \in \tilde{C}(c, c)$ es (c) ;
- dados $c, c', c'' \in \tilde{C}$, el functor de composición $\odot : \tilde{C}(c, c') \times \tilde{C}(c', c'') \rightarrow \tilde{C}(c, c'')$ es el descrito arriba (cf. 7.5.6).

7.5.9. Se satisfacen los axiomas de una 2-categoría (cf. 7.1.1). El axioma B) (asociatividad) se deduce directamente de 7.5.5.c. Para probar el axioma A) (unidad) observamos (cf. 7.5.3) que una flecha $[a_*] : x \rightarrow y$ siempre puede ser representada por un morfismo $a : [n_x] \rightarrow [n_y]$ tal que $a(0) = 0$, y luego aplicamos 7.5.5.d.

7.5.10 Definición. Definimos $\eta : C \rightsquigarrow \tilde{C}$ como el functor laxo dado por los siguientes datos (recordar las notaciones de 6.1.3 y el functor r de 6.6.4):

- en los objetos, $\eta : C_0 \rightarrow \tilde{C}_0 = C_0$ es la identidad;
- la función $\eta : C(c, c') \rightarrow \tilde{C}(c, c')_0$ manda una flecha f en $r((f))$. Si f no es una identidad entonces $\eta(f) = (f)$ es el simplex de dimensión 1 inducido por f , y si $c = c'$ y $f = \text{id}$ entonces $\eta(f) = \text{id}$;

iii) dadas $f : c \rightarrow c'$ y $g : c' \rightarrow c''$ flechas componibles, tenemos

$$\eta(gf) = r((gf))$$

$$\eta(g)\eta(f) = r((g)) \odot r((f)) = r((f, g))$$

y la 2-celda estructural asociada es

$$\eta_{g,f} = r((\delta_1)_*) : r((gf)) \Rightarrow r((f, g))$$

donde $\delta_1 : [1] \rightarrow [2]$.

7.5.11. Chequeamos que los datos de arriba satisfacen los axiomas correspondientes (cf. 7.3.4).

A) (normalidad) es claro que $\eta(\text{id}_c) = \text{id}_c$ para todo $c \in C_0$ y que $\eta_{\text{id},f} = \text{id} = \eta_{f,\text{id}}$ para toda $f \in C_1$, puesto que r lo que hace es borrar las identidades;

B) dado $c \xrightarrow{f} c' \xrightarrow{g} c'' \xrightarrow{h} c'''$ en C , tanto $(\eta_{h,g} \circ \eta(f)) \bullet \eta_{hg,f}$ como $(\eta(h) \circ \eta_{g,f}) \bullet \eta_{h,gf}$ consisten en el morfismo

$$r(a_*) : r(c \rightarrow c''') \rightarrow r(c \rightarrow c' \rightarrow c'' \rightarrow c''')$$

donde $a : [1] \rightarrow [3]$ es la inyección evidente.

7.5.12. Si D es una 2-categoría pequeña y $u : \tilde{C} \rightarrow D$ es un 2-functor, entonces componiendo con η se tiene un functor laxo $u\eta : C \rightsquigarrow D$. Queda definida entonces una función $2\mathcal{C}at(\tilde{C}, D) \rightarrow \mathcal{L}ax(C, D)$, $u \mapsto u\eta$.

7.5.13 Teorema. *La función $2\mathcal{C}at(\tilde{C}, D) \rightarrow \mathcal{L}ax(C, D)$ es una biyección.*

$$\begin{array}{ccc} C & \rightsquigarrow & \tilde{C} \\ & \searrow & \downarrow \exists! u \\ & \forall v & D \end{array}$$

Demostración. Para ver que es inyectiva debemos probar que u queda completamente determinado por $u\eta$. Es claro que en los objetos esto vale, es decir $u = u\eta : C_0 \rightarrow D_0$. Si (f_1, \dots, f_d) es una flecha en \tilde{C} , entonces $(f_1, \dots, f_d) = \eta(f_d)\eta(f_{d-1}) \dots \eta(f_1)$ y por lo tanto

$$u(f_1, \dots, f_d) = u(\eta(f_d)\eta(f_{d-1}) \dots \eta(f_1)) = u\eta(f_d)u\eta(f_{d-1}) \dots u\eta(f_1),$$

de donde el valor de u en las flechas también queda determinado por $u\eta$. Por último, sea

$$[a_*] : x \Rightarrow y : c \rightarrow c'$$

una 2-celda de \tilde{C} y probemos que $u([a_*])$ está determinado por el funtor laxo $u\eta$. Lo probaremos asumiendo $n_x > 0$, siendo el caso $n_x = 0$ similar. Podemos tomar a inyectivo y que preserve los extremos (cf. 7.5.3). Si $a = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_k}$ es la expresión de a como composición de inyecciones elementales, entonces $[a_*] = \alpha_1 \bullet \dots \bullet \alpha_k$ donde

$$\alpha_j = r[(\delta_{i_j})_*] : r(y\delta_{i_1} \dots \delta_{i_j}) \Rightarrow r(y\delta_{i_1} \dots \delta_{i_{j-1}})$$

De la igualdad $\delta_i = \text{id}_{[i-1]} \triangleleft \delta_1 \triangleleft \text{id}_{[n_x-i]}$, donde $\delta_1 : [1] \rightarrow [2]$, sigue que cada celda $r[(\delta_i)_*]$ puede escribirse como la composición horizontal $[\text{id}] \odot r[(\delta_1)_*] \odot [\text{id}]$. Como u es un 2-functor debe preservar identidades y composiciones, por lo que sólo resta determinar el valor de $r[(\delta_1)_*] : r(gf) \rightarrow r(g, f)$, el cual es la 2-celda estructural de la composición $(u\eta)_{g,f}$. Esto prueba la inyectividad.

Para la suryectividad, hay que ver que todo funtor laxo $v : C \rightsquigarrow D$ puede obtenerse como $u\eta$ para algún u . Dado v , definimos u por:

- en los objetos, dado $c \in \tilde{C}_0 = C_0$, $u(c) = v(c)$;
- en las flechas, dada $(f_1, \dots, f_d) \in \tilde{C}(c, c')_0$ definimos

$$u(f_1, \dots, f_d) = v(f_d) \dots v(f_1);$$

- dada $[a_*] : x \Rightarrow y : c \rightarrow c'$, con $a : [n_x] \rightarrow [n_y]$, definimos

$$u([a_*]) = \alpha_{n_x} \circ \dots \circ \alpha_1$$

donde $\alpha_i : x_{i-1,i} \Rightarrow y_{a(i)-1,a(i)} y_{a(i)-2,a(i)-1} \dots y_{a(i-1),a(i-1)+1}$ es la 2-celda estructural dada por u (cf. 7.3.3).

Se verifica que u es un 2-functor y que $u\eta = v$. □

7.5.14. El funtor laxo η tiene un inverso a izquierda $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$, que es un 2-functor (o funtor laxo con $\alpha = \text{id}$). En los objetos, π es la identidad. Dados $c, c' \in C_0$, el funtor $\pi : \tilde{C}(c, c') \rightarrow C(c, c')$ manda una tira x a su composición total (notar que π manda cada componente conexa de $\tilde{C}(c, c')$ en un punto).

Este π es el u que corresponde a $v = \text{id}_C$ (cf. 7.5.13).

Capítulo 8

Tipo homotópico de una 2-categoría

En este capítulo estudiaremos dos construcciones que asocian un espacio a una 2-categoría pequeña. Ambas extienden la noción de espacio clasificante de categorías. También veremos que estas dos nociones están relacionadas por una equivalencia homotópica natural, lo que reafirma que éste debe ser el tipo homotópico de una 2-categoría. Luego exponemos una versión del Teorema A de Quillen para 2-funtores. La referencia para estos resultados es [BC03].

Al final del capítulo, desarrollamos una versión del Teorema A para funtores laxos, partiendo del trabajo de Bullejos-Cegarra y usando las herramientas desarrolladas en los capítulos anteriores. Además de su interés en sí, este resultado será utilizado más adelante para caracterizar el espacio de lazos de una 2-categoría.

8.1 El 2-nervio

Recordamos que si C es una categoría, entonces NC es un conjunto simplicial. Los n -símplices de NC son las tiras de n -flechas componibles. Luego vale

$$NC_n = \coprod_{c_0, \dots, c_n} C(c_0, c_1) \times \cdots \times C(c_{n-1}, c_n)$$

Esta misma fórmula, aplicada a 2-categorías, da la siguiente definición.

8.1.1 Definición. Dada C una 2-categoría, el *nervio* $\underline{NC} : \Delta^\circ \rightarrow \mathcal{Cat}$ es la categoría simplicial definida por:

$$\underline{NC}_n = \coprod_{c_0, \dots, c_n} C(c_0, c_1) \times \cdots \times C(c_{n-1}, c_n),$$

donde \times y \sqcup son el producto y el coproducto de \mathcal{Cat} , y donde las caras y degeneraciones están dadas del modo usual: si $x : [n] \rightarrow C$ es un objeto de \underline{NC}_n , entonces $d_i(x) = x \circ \delta_i$ y $s_j(x) = x \circ \sigma_j$.

8.1.2. La construcción $C \mapsto \underline{NC}$ es claramente funtorial.

$$\underline{N} : 2\mathcal{Cat} \rightarrow s\mathcal{Cat}$$

8.1.3 Notación. De aquí en más usaremos la siguiente notación

$$C(c_0, \dots, c_n) := C(c_0, c_1) \times \dots \times C(c_{n-1}, c_n)$$

8.1.4 Definición. Definimos el 2-nervio de C como el conjunto bisimplicial N_2C dado por

$$(N_2C)_{m,n} = N(\underline{NC}_m)_n$$

8.1.5. Observamos que N_2C está asociado vía la ley exponencial (cf. 1.5.3) a la composición $N \circ \underline{NC} : \Delta^\circ \rightarrow sSet$.

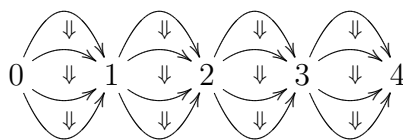
8.1.6. Dado s en $(N_2C)_{m,n}$, visualizamos s como un reticulado de 2-celdas de C , tal como muestra el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 c_0 & \longrightarrow & c_1 & \longrightarrow & c_2 & & c_{n-1} & \longrightarrow & c_n \\
 \parallel & & \Downarrow \alpha_{1,1} & \parallel & \Downarrow \alpha_{1,2} & \parallel & \dots & \parallel & \Downarrow \alpha_{1,n} & \parallel \\
 c_0 & \longrightarrow & c_1 & \longrightarrow & c_2 & & c_{n-1} & \longrightarrow & c_n \\
 \parallel & & \Downarrow \alpha_{2,1} & \parallel & \Downarrow \alpha_{2,2} & \parallel & \dots & \parallel & \Downarrow \alpha_{2,n} & \parallel \\
 c_0 & \longrightarrow & c_1 & \longrightarrow & c_2 & & c_{n-1} & \longrightarrow & c_n \\
 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \\
 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \\
 c_0 & \longrightarrow & c_1 & \longrightarrow & c_2 & & c_{n-1} & \longrightarrow & c_n \\
 \parallel & & \Downarrow \alpha_{m,1} & \parallel & \Downarrow \alpha_{m,2} & \parallel & \dots & \parallel & \Downarrow \alpha_{m,n} & \parallel \\
 c_0 & \longrightarrow & c_1 & \longrightarrow & c_2 & & c_{n-1} & \longrightarrow & c_n
 \end{array}$$

8.1.7. Llamamos $\theta_{m,n}$ a la 2-categoría con objetos $\{0, 1, \dots, n\}$, con flechas dadas por

$$\theta_{m,n}(i, j) = \begin{cases} \emptyset & i > j \\ \text{pt} & i = j \\ [m] & i + 1 = j \\ \theta_{m,n}(i, i + 1, \dots, j) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y con la composición $\theta_{m,n}(i, j) \times \theta_{m,n}(j, k) \rightarrow \theta_{m,n}(i, k)$ definida como el isomorfismo canónico. A modo de ejemplo dibujamos $\theta_{3,4}$.



Esta construcción es funtorial, dando $\theta : \Delta \times \Delta \rightarrow 2Cat$. Se tiene un isomorfismo natural

$$N_2(C)_{m,n} = 2Cat(\theta_{m,n}, C)$$

y por lo tanto N_2 es el funtor singular inducido por θ (cf. B.2.1).

8.1.8 Definición. El 2-espacio clasificante B_2C de C se define como la realización geométrica del 2-nervio $|\text{diag}(N_2C)|$.

8.1.9. Estas construcciones son functoriales.

$$N_2 : 2\text{Cat} \rightarrow \text{bsSet} \quad B_2 : 2\text{Cat} \rightarrow \text{Top}$$

8.1.10. Una 2-categoría C , que es una categoría enriquecida sobre Cat , induce una categoría enriquecida sobre Top , aplicando el funtor espacio clasificante en los hom. Esta categoría enriquecida sobre Top puede ser vista como una categoría topológica cuyo espacio de objetos es discreto. Tiene sentido considerar el espacio clasificante de esta categoría topológica (cf. [Se68]), y asociar de este modo un espacio topológico a C (cf. [BC03]). Se verifica fácilmente que este espacio es homeomorfo a B_2C , tal como fue definido arriba (cf. 1.5.8).

8.1.11. Esta noción extiende la de espacio clasificante usual, en el sentido que si C es una 1-categoría entonces se tiene un homeomorfismo $BC \cong B_2C$ natural en C (cf. 7.1.8).

8.1.12. Si M una categoría monoidal, vista como una 2-categoría con un solo objeto (cf. 7.1.9), Entonces B_2M es el espacio clasificante del monoide topológico BM .

8.1.13. Los espacios B_2C , $B_2(C')$ y $B_2(C^\circ)$ son homeomorfos, tal como se deduce del homeomorfismo natural $B(C(c, c')) \cong B(C'(c, c'))$ visto en 2.2.9.

8.2 Equivalencias homotópicas

De modo análogo a lo hecho con categorías (cf. 2), en esta sección introducimos las siguientes nociones homotópicas en 2Cat usando el funtor B_2 .

8.2.1 Definición. $u : C \rightarrow D$ en 2Cat es una *equivalencia homotópica* si N_2u lo es en bsSet , o equivalentemente si B_2u lo es en Top .

8.2.2 Definición. Una 2-categoría pequeña C se dice *contráctil* si B_2C lo es.

8.2.3 Definición. Decimos que el 2-functor $u : C \rightarrow D$ es una *equivalencia homotópica local* si $u_* : C(c, c') \rightarrow D(u(c), u(c'))$ es una equivalencia homotópica de categorías para todo $c, c' \in C_0$.

8.2.4. El siguiente es un criterio de tipo local para comprobar que un 2-functor es una equivalencia homotópica.

8.2.5 Proposición. Si un 2-functor $u : C \rightarrow D$ es una *equivalencia homotópica local* y una *biyección en los objetos*, entonces u es una *equivalencia homotópica*.

Demostración. Resulta que $C(c_0, \dots, c_n) \rightarrow D(u(c_0), \dots, u(c_n))$ es equivalencia homotópica por ser producto de equivalencias homotópicas. Luego, como u es una biyección en los objetos el morfismo

$$\underline{NC}_n \rightarrow \underline{ND}_n$$

también es equivalencia homotópica. Así $u_* : N_2C \rightarrow N_2D$ es un morfismo de conjuntos bisimpliciales que es equivalencia homotópica grado a grado, y por lo tanto es equivalencia homotópica (cf. 1.5.11). \square

8.2.6. De la naturalidad de los homeomorfismos $B_2C \cong B_2C' \cong B_2C^\circ$ sigue que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $u : C \rightarrow D$ es una equivalencia homotópica;
- $u' : C' \rightarrow D'$ es una equivalencia homotópica;
- $u^\circ : C^\circ \rightarrow D^\circ$ es una equivalencia homotópica.

8.3 El nervio geométrico

Duskin y Street, entre otros, estudiaron un modo natural de asociar un conjunto simplicial N_gC una 2-categoría C . En esta sección describiremos esta construcción, a la que llamaremos *nervio geométrico*, siguiendo la terminología de [BC03]. El nervio geométrico describe completamente la estructura de C . Por otro lado, es difícil de explicitar incluso en ejemplos chicos.

8.3.1 Definición. Llamamos g al funtor covariante que resulta de la composición siguiente.

$$\Delta \rightarrow \mathcal{Cat} \rightarrow 2\mathcal{Cat} \rightarrow \mathcal{Lax}$$

Definimos el *nervio geométrico* de C como el conjunto simplicial N_gC cuyos p -símplices están dados por

$$(N_gC)_n = \mathcal{Lax}(g[n], C)$$

En otras palabras, N_g es el funtor singular inducido por g (cf. B.2.1).

8.3.2. Los 0-símplices de N_gC son los objetos de C , los 1-símplices son las flechas y los 2-símplices son los diagramas en C de la forma

$$\begin{array}{ccc} x_0 & \xrightarrow{\quad} & x_2 \\ & \searrow & \nearrow \\ & x_1 & \end{array}$$

Los 3-símplices pueden visualizarse como tetraedros con un objeto en cada vértice, una flecha en cada arista y una 2-celda en cada cara, de modo que se satisfacen ciertas ecuaciones.

8.3.3 Definición. Denotamos por $B_g C$ a la realización geométrica del nervio geométrico $|N_g C|$.

8.3.4. Las construcciones de arriba son functoriales respecto a los funtores laxos.

$$N_g : \mathcal{Lax} \rightarrow sSet \quad B_g : \mathcal{Lax} \rightarrow Top$$

8.3.5. El nervio geométrico extiende al nervio usual, en el sentido que se tiene un isomorfismo natural $NC \cong N_g(C)$ para $C \in \mathcal{Cat}$.

8.3.6. Los espacios $B_g C$ y $B_g C^\circ$ son homeomorfos naturalmente. Sin embargo, no es cierto a priori que $B_g C$ sea homeomorfo a $B_g C'$. Esto se debe a que al aplicar la construcción $(-)'$ a un funtor laxo $[n] \rightarrow C$ no se obtiene un funtor laxo (cf. 7.3.10).

8.4 Equivalencia entre ambas construcciones

Hasta aquí hemos asociado a una 2-categoría C dos espacios topológicos, $B_2 C$ y $B_g C$. A continuación damos una demostración de que ambos espacios son homotópicamente equivalentes. Esta equivalencia es el resultado fundamental de [BC03]. Nuestra demostración es una versión de la presentada allí. Como corolario de este resultado, las nociones homotópicas que inducen N_2 y N_g sobre los 2-funtores coinciden.

8.4.1. Recordemos que un funtor laxo $x : [n] \rightsquigarrow C$ consiste en objetos x_i , flechas $x_{i,j} : x_i \rightarrow x_j$ y 2-celdas $x_{i,j,k} : x_{i,k} \rightrightarrows x_{j,k} x_{i,j}$ satisfaciendo $x_{i,i} = 1_{x_i}$, $x_{i,j,j} = 1_{x_{i,j}} = x_{i,i,j}$ y $(x_{k,l} \circ x_{i,j,k}) \bullet x_{i,k,l} = (x_{j,k,l} \circ x_{i,j}) \bullet x_{i,j,l}$.

8.4.2 Definición. Dados c_0, \dots, c_n objetos de C , denotamos $\hat{C}(c_0, \dots, c_n)$ a la categoría definida como sigue:

1. los objetos de $\hat{C}(c_0, \dots, c_n)$ son los funtores laxos $x : [n] \rightsquigarrow C$ tales que $x(i) = c_i$;
2. una flecha $\alpha : x \rightarrow y$ en $\hat{C}(c_0, \dots, c_p)$ es una familia $\alpha_{i,j} : x_{i,j} \rightrightarrows y_{i,j}$ de 2-celdas de C tales que

$$(\alpha_{j,k} \circ \alpha_{i,j}) \bullet x_{i,j,k} = y_{i,j,k} \bullet \alpha_{i,k} \quad \alpha_{i,i} = \text{id}$$

8.4.3. Observamos que $C(c_0, \dots, c_n)$ es la subcategoría plena de $\hat{C}(c_0, \dots, c_n)$ formada por los verdaderos funtores $[n] \rightarrow C$.

8.4.4 Proposición. La inclusión $i : C(c_0, \dots, c_n) \rightarrow \hat{C}(c_0, \dots, c_n)$ es una equivalencia homotópica.

Demostración. Basta definir $r : \hat{C}(c_0, \dots, c_n) \rightarrow C(c_0, \dots, c_n)$ adjunto para la inclusión (cf. 2.3.6). Dado $x \in \hat{C}(c_0, \dots, c_n)$, definimos $r(x)$ como el funtor $[n] \rightarrow C$ dado por la tira de flechas componibles $(x_{0,1}, x_{1,2}, \dots, x_{n-1,n})$. Esta construcción es funtorial. Observemos que una flecha $x \rightarrow iy$ consiste en 2-celdas $\alpha_{i,j}$ tales que

$$(\alpha_{j,k} \circ \alpha_{i,j}) \bullet x_{i,j,k} = \alpha_{i,k}$$

por lo que sólo es necesario definir las 2-celdas $\alpha_{i,i+1}$, o sea dar un morfismo $rx \rightarrow y$. Esto prueba que $r \dashv i$. \square

8.4.5 Definición. Sea $\underline{N}_g C$ la categoría simplicial definida por

$$\underline{N}_g C_n = \coprod_{c_0, \dots, c_n} \hat{C}(c_0, \dots, c_n)$$

con caras y degeneraciones usuales: si $x : [n] \rightsquigarrow C$ es un objeto de $\underline{N}_g C_n$, entonces $d_i(x) = x \circ \delta_i$ y $s_j(x) = x \circ \sigma_j$.

8.4.6. Se tiene una inclusión de categorías simpliciales

$$\underline{N}C \rightarrow \underline{N}_g C$$

8.4.7 Proposición. $\underline{N}C \rightarrow \underline{N}_g C$ induce una equivalencia homotópica de conjuntos bisimpliciales $N_2 C = N \underline{N}C \rightarrow N \underline{N}_g C$.

Demostración. Basta ver que es una equivalencia grado a grado (cf. 1.5.11). En grado n el morfismo es el inducido por la inclusión

$$\coprod_{c_0, \dots, c_n} C(c_0, \dots, c_n) \rightarrow \coprod_{c_0, \dots, c_n} \hat{C}(c_0, \dots, c_n)$$

Como cada funtor $C(c_0, \dots, c_n) \rightarrow \hat{C}(c_0, \dots, c_n)$ es una equivalencia homotópica (cf. 8.4.4), el resultado queda probado. \square

8.4.8 *Notación.* Denotamos K_m al conjunto simplicial $\{n \mapsto \underline{N}_g C_{m,n}\}$. Un símplex de K_m es una tira de flechas componibles $x^0 \rightarrow \dots \rightarrow x^m$ en alguna de las categorías $\hat{C}(c_0, \dots, c_n)$. En particular, $K_0 = N_g C$.

8.4.9 Teorema. Dada C una 2-categoría, se tiene una equivalencia homotópica $B_2 C \cong B_g C$ natural.

Demostración. Tenemos las siguientes inclusiones en $sCat$

$$\underline{N}C \rightarrow \underline{N}_g C \leftarrow N_g C,$$

donde vemos a $N_g C$ como una categoría simplicial discreta. Vimos que la inclusión $N_2 C = \underline{N} \underline{N} C \rightarrow \underline{N} \underline{N}_g C$ es una equivalencia homotópica (cf. 8.4.7). Basta con probar entonces que $\underline{N}_g C \leftarrow N_g C$ también lo es. Veremos que es una equivalencia homotópica grado a grado (cf. 1.5.11). En grado m la inclusión consiste en el siguiente morfismo simplicial.

$$K_0 \rightarrow K_m$$

$$x \mapsto (x \xrightarrow{\text{id}} x \xrightarrow{\text{id}} \dots \xrightarrow{\text{id}} x)$$

Basta ver que el siguiente es una equivalencia homotópica, puesto que los anteriores se obtienen como composición de algunos de estos.

$$\phi : K_{m-1} \rightarrow K_m$$

$$(x^0 \rightarrow x^1 \rightarrow \dots \rightarrow x^{m-1}) \mapsto (x^0 \xrightarrow{\text{id}} x^0 \rightarrow x^1 \rightarrow \dots \rightarrow x^{m-1})$$

Consideramos el siguiente morfismo simplicial

$$\psi : K_m \rightarrow K_{m-1}$$

$$(x^0 \rightarrow x^1 \rightarrow \dots \rightarrow x^m) \mapsto (x^1 \rightarrow \dots \rightarrow x^m)$$

Es claro que $\psi\phi = \text{id}$. Además, existe un morfismo

$$h : K_m \times I \rightarrow K_m$$

$$((x^0 \xrightarrow{\alpha} x^1 \rightarrow \dots \rightarrow x^m), t) \mapsto ((x^0)^t \xrightarrow{\alpha^t} x^1 \rightarrow \dots \rightarrow x^m)$$

(ver a continuación) que resulta una homotopía simplicial entre $\phi\psi$ y id . Concluimos que ϕ y ψ son inversas homotópicas, y el resultado sigue. \square

8.4.10 Notación. En la homotopía simplicial definida arriba, $(x^0)^t \xrightarrow{\alpha^t} x^1$ es la flecha asociada a $x^0 \xrightarrow{\alpha} x^1$ a través del siguiente procedimiento. Si $\alpha : x \rightarrow y$ es una flecha de $\hat{C}(c_0, \dots, c_n)$ y $t : [n] \rightarrow [1]$, entonces con $\alpha^t : x^t \rightarrow y$ denotamos la siguiente flecha de $\hat{C}(c_0, \dots, c_n)$. El objeto $x^t : [n] \rightsquigarrow C$ está dado por

- $(x^t)_i = c_i$;
- $(x^t)_{i,j} = \begin{cases} x_{i,j} & t(i) = 0 \\ y_{i,j} & t(i) = 1 \end{cases}$;
- $(x^t)_{i,j,k} = \begin{cases} x_{i,j,k} & t(j) = 0 \\ (\alpha_{j,k} \circ x_{i,j}) \bullet x_{i,j,k} & t(i) = 0, t(j) = 1 \\ y_{i,j,k} & t(i) = 1 \end{cases}$

y la flecha $\alpha^t : x^t \rightarrow y$ está dada por

- $\alpha_{i,j}^t : (x^t)_{i,j} \Rightarrow y_{i,j}$ es la 2-celda de C siguiente

$$\alpha_{i,j}^t = \begin{cases} \alpha_{i,j} & t(i) = 0 \\ \text{id} & t(i) = 1 \end{cases}$$

Se verifica fácilmente que x^t y α^t están bien definidos (cf. 8.4.1, 8.4.2).

8.4.11 Corolario. $u : C \rightarrow D$ es una equivalencia homotópica si y sólo si $u_* : B_g C \rightarrow B_g D$ lo es.

8.5 Teorema A para 2-funtores

En esta sección enunciamos y demostramos una versión del Teorema A para 2-funtores (cf. [BC03]). Introducimos primero algunas construcciones y resultados auxiliares que necesitaremos.

8.5.1 Definición. Dado $u : C \rightarrow D$ un 2-functor, definimos un conjunto bisimplicial S^u por

$$S_{m,n} = \{(x, z) : x : [m] \rightsquigarrow C, z : [m+n+1] \rightsquigarrow D, ux = zd\}$$

Aquí $d : [m] \rightarrow [m+n+1]$ denota la inclusión. Las caras y degeneraciones de S^u se definen del modo obvio:

$$\begin{aligned} d_i^h(x, z) &= (x, d_{i+m+1}z) & d_i^v(x, z) &= (d_i x, d_i z) \\ s_j^h(x, z) &= (x, s_{j+m+1}z) & s_j^v(x, z) &= (s_j x, s_j z) \end{aligned}$$

8.5.2. La aplicación $\phi^u : S^u \rightarrow N_g C$, $\phi(x, z) = x$, es un morfismo en $bs\mathcal{S}et$, donde vemos a $N_g C$ como un conjunto bisimplicial constante en la dirección n (horizontal).

8.5.3. La aplicación $\psi^u : S^u \rightarrow N_g D$, $\psi(x, z) = d_0^{m+1}z$, es un morfismo en $bs\mathcal{S}et$, donde vemos a $N_g D$ como un conjunto bisimplicial constante en la dirección m (vertical).

8.5.4 Proposición. $\text{diag}(\phi^u) : \text{diag}(S^u) \rightarrow N_g C$ es una equivalencia homotópica.

Demostración. Basta ver que es una equivalencia homotópica grado a grado (cf. 1.5.11). Fijado m , veremos que el morfismo

$$\phi_* : \{n \mapsto S_{m,n}^u\} \rightarrow \{n \mapsto N_g C_m\}$$

es una equivalencia. Como el lado derecho es un conjunto simplicial discreto, debemos ver que la fibra de cada punto es contráctil. Sea $x \in \{n \mapsto N_g C_m\}$, $x : [m] \rightsquigarrow C$. Afirmamos que la fibra sobre x se contrae al punto $(x, u_*(x) \circ s)$, donde $s : [m+n+1] \rightarrow [m]$ está dado por $s(i) = \min(i, m)$. En efecto, una homotopía simplicial está dada por la fórmula

$$h((x, z), t) = (x, z \circ a_t)$$

$$\text{con } a_t : [m+n+1] \rightarrow [m+n+1], a_t(i) = \begin{cases} i & i \leq m \\ m & i > m, t(i) = 0 \\ i & i > m, t(i) = 1 \end{cases} \quad \square$$

8.5.5 Proposición. *Si la fibra homotópica $C'//d$ es contráctil para todo $d \in D_0$, entonces $\text{diag}(\psi^u) : \text{diag}(S^u) \rightarrow N_g D$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Nuevamente, basta ver que es una equivalencia homotópica grado a grado (cf. 1.5.11). Fijado m , el morfismo

$$\psi_* : \{m \mapsto S_{m,n}^u\} \rightarrow \{m \mapsto N_g D_n\}$$

es una equivalencia. Al igual que en la proposición anterior, el lado derecho es un conjunto simplicial discreto, concentremonos pues en ver que la fibra de cada punto es contráctil. Sea $y \in \{m \mapsto N_g D_n\}$, $y : [n] \rightsquigarrow D$. Llamemos $K(y)$ a la fibra sobre y .

$$K(y) = \{(x, z) : x : [m] \rightsquigarrow C, z : [m+n+1] \rightsquigarrow D, ux = zd, y = zd'\}$$

Este es un conjunto simplicial (caras y degeneraciones en la dirección m). Aquí $d' : [m] \rightarrow [m+n+1]$ está dado por $d'(i) = i + m + 1$.

Afirmamos que $K(y)$ es homotópico a $K(d_n y)$. Definimos un par de morfismos simpliciales $\alpha : K(y) \rightarrow K(d_n y)$, $\beta : K(d_n y) \rightarrow K(y)$ y homotopías simpliciales $\alpha\beta \cong \text{id}$ y $\beta\alpha \cong \text{id}$. El primero está dado por $\alpha(x, z) = (x, d_{m+n+1} z)$. El segundo está dado por $\beta(x, z) = (x, z')$, donde $z' : [m+n] \rightsquigarrow C$ satisface

$$z'_i = \begin{cases} z_i & i \leq m+n \\ y_n & i = m+n+1 \end{cases}$$

$$z'_{i,j} = \begin{cases} z_{i,j} & j \leq m+n \\ y_{n-1,n} z_{i,m+n} & j = m+n+1 \end{cases}$$

$$z'_{i,j,k} = \begin{cases} z_{i,j,k} & k \leq m+n \\ y_{n-1,n} z_{i,j,n} & k = m+n+1 \end{cases}$$

Iterando el razonamiento, concluimos que $K(y)$ tiene el tipo de homotopía que $K(d)$ para algún $d \in D_0$. Dado $d \in D_0$, es fácil ver que $K(d)$ es isomorfo a $N_g((C'//d)')$. Por hipótesis $C'//d$ es contráctil, luego también lo es $(C'//d)'$ (cf. 8.1.13), y por la equivalencia entre el 2-nervio y el nervio geométrico (cf. 8.4.9) sigue que $K(d)$ es contráctil y queda probado el teorema. \square

8.5.6 Corolario. *Si la fibra homotópica $C//d$ es contráctil para todo $d \in D_0$, entonces $\text{diag}(\psi^u) : \text{diag}(S^u) \rightarrow N_g D$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Si $C//d = C''//d$ es contráctil para todo d , entonces por la proposición anterior u' es una equivalencia homotópica, y luego también lo es u (cf. 8.1.13). \square

8.5.7 Teorema (Teorema A para 2-funtores). *Sea $u : C \rightarrow D$ un 2-functor. Si $C//d$ es contráctil para todo $d \in D_0$, entonces u es una equivalencia homotópica.*

Demostración. (cf. [BC03]) Consideramos el siguiente diagrama conmutativo en $s\text{Set}$.

$$\begin{array}{ccc} N_g D & \xleftarrow{\text{diag}(\psi^u)} \text{diag}(S^u) \xrightarrow{\text{diag}(\phi^u)} & N_g C \\ \parallel & \downarrow \gamma & \downarrow u_* \\ N_g D & \xleftarrow{\text{diag}(\psi^{\text{id}})} \text{diag}(S^{\text{id}}) \xrightarrow{\text{diag}(\phi^{\text{id}})} & N_g D \end{array}$$

donde γ es el morfismo dado por $(x, y) \mapsto (u(x), y)$. Vimos antes que los morfismos horizontales son equivalencias homotópicas (cf. 8.5.4, 8.5.5). Se tiene por 2-de-3 que u_* también lo es y el teorema queda demostrado. \square

8.6 Teorema A para funtores laxos

Probaremos una versión del Teorema A para funtores laxos, usando nuestra construcción para la fibra homotópica de un functor laxo (cf. 7.4.6), y nuestra construcción \tilde{C} .

8.6.1 Proposición. *Sea C una categoría. El functor laxo $\eta : C \rightsquigarrow \tilde{C}$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Por 2-de-3, basta con mostrar que la inversa $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ es una equivalencia homotópica (cf. 7.5.14). Si $f : c \rightarrow c' \in C_1$ y $x \in \tilde{C}(c, c')$, entonces existe a lo sumo una flecha $(f) = \eta(f) \rightarrow x$ en $\tilde{C}(c, c')$, y existe si y sólo si $\pi(x) = f$. Luego se tiene una adjunción $\eta \dashv \pi$ entre $\tilde{C}(c, c')$ y la categoría discreta $C(c, c')$. El functor $\tilde{C}(c, c') \rightarrow C(c, c')$ es una equivalencia homotópica porque admite un adjunto (cf. 2.3.6). Luego π es una equivalencia homotópica local, y como es una biyección en los objetos se concluye el resultado (cf. 8.2.5). \square

8.6.2 Teorema (Teorema A para funtores laxos). *Sea C una categoría, D una 2-categoría y $u : C \rightsquigarrow D$ un functor laxo. Si $C//d$ es contráctil para todo $d \in D_0$, entonces u es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Consideramos el siguiente diagrama (cf. 7.5.13).

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\eta} & \tilde{C} \\ & \searrow u & \downarrow v \\ & & D \end{array}$$

Acabamos de ver que el functor laxo η es una equivalencia homotópica (cf. 8.6.1). Por 2-de-3, es suficiente mostrar que el 2-functor $v : \tilde{C} \rightarrow D$ es una equivalencia homotópica. Para ello usaremos el Teorema A para 2-funtores (cf. 8.5.7). Verificamos que $\tilde{C}//d$ es contráctil para todo $d \in D_0$.

Dado $d \in D_0$, el functor $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ induce otro $\pi//d : \tilde{C}//d \rightarrow C//d$. Veremos que este functor es una equivalencia homotópica, de donde se concluye que $\tilde{C}//d$ es contráctil y queda probado el teorema.

Como hemos descrito antes, los objetos de $C//d$ y los de $\tilde{C}//d$ son los pares $(c, \phi) \in C_0 \times D_1$ tales que $\phi : u(c) \rightarrow d$,

$$(c, \phi) \quad u(c) \xrightarrow{\phi} d$$

Para ver que $\pi//d$ es una equivalencia homotópica, como induce una biyección en los objetos basta probar que es una equivalencia homotópica local (cf. 8.2.5). Fijados $(c, \phi), (c', \phi') \in (C//d)_0 = (\tilde{C}//d)_0$, si $(f, \alpha) : (c, \phi) \rightarrow (c', \phi')$ es una flecha en $(C//d)$ y (x, β) es otra, entonces existe a lo sumo una 2-celda $\eta(f, \alpha) \rightarrow (x, \beta)$, y existe si y sólo si $\pi(x) = f$ y $\alpha = \beta \bullet (\phi' \circ u_x)$. Luego se tiene una adjunción $\eta \dashv \pi$ y listo. \square

Capítulo 9

Espacio de lazos de una 2-categoría

En este capítulo caracterizamos el espacio de lazos de una 2-categoría satisfaciendo ciertas condiciones. Primero estudiamos la categoría de símplices $\Delta//C$ de una 2-categoría C , y probamos que tiene el mismo tipo de homotopía que C . Ésto nos dará una construcción natural que asocia a toda 2-categoría una categoría con el mismo tipo de homotopía. En segundo lugar definimos a partir del funtor de Yoneda un funtor laxo $L : \Delta//C \rightarrow \mathcal{C}at$, los caminos con un extremo libre. Por último, probamos que la construcción de Grothendieck sobre L es una fibración de Quillen con categoría total contráctil, de donde deducimos la caracterización del espacio de lazos.

Como aplicación del teorema anterior, derivaremos la condición necesaria y suficiente para *dehopear* una categoría monoidal. Los resultados de esta sección aparecerán en [dH09].

9.1 La categoría $\Delta//C$

En esta sección introducimos la categoría de símplices de una 2-categoría, extendiendo la construcción de 6.1. De todas las definiciones alternativas que hemos visto, aquella que nos permitirá una buena generalización es la vista en 6.1.6.

9.1.1 Definición. Sea C una 2-categoría pequeña. Definimos $\Delta//C$, la *categoría de símplices* de C , como la categoría $(\underline{NC} \rtimes \Delta^\circ)^\circ$, donde $\underline{NC} \rtimes \Delta^\circ$ es la construcción de Grothendieck del funtor nervio $\underline{NC} : \Delta^\circ \rightarrow \mathcal{C}at$ (cf. 8.1.1).

9.1.2. Los objetos de $\Delta//C$ son los pares (n_x, x) , con $x : [n_x] \rightarrow C$ un funtor. Esquemáticamente, pensamos a los objetos de $\Delta//C$ como tiras de flechas componibles

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{n_x}$$

En otras palabras, los objetos son los símplices de NC , el nervio de la categoría subyacente a C .

9.1.3. Una flecha $(n_x, x) \rightarrow (n_y, y)$ en $\Delta//C$ consiste en un par (ξ, α) con $\xi : [n_x] \rightarrow [n_y]$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_x})$ tal que $\alpha_i : y(\xi(i-1) \rightarrow \xi(i)) \Rightarrow x(i-1 \rightarrow i)$

es una 2-celda en C . Esquemáticamente, se tiene el 2-diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 x_0 & \longrightarrow & x_1 & \longrightarrow & x_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & x_{n_x} \\
 \parallel & & \uparrow & & \parallel & & \uparrow & & \parallel & & \cdots & & \parallel \\
 y_0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & y_{\xi_0} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & y_{\xi_1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & y_{\xi_2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & y_{\xi_{n_x}} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & y_{n_y}
 \end{array}$$

Esta visualización puede ayudar a comprender cómo es que se componen las flechas en $\Delta//C$. Si $(\xi, \alpha) : (n_x, x) \rightarrow (n_y, y)$ y $(\eta, \beta) : (n_y, y) \rightarrow (n_z, z)$, entonces $(\eta, \beta) \circ (\xi, \alpha) = (\eta\xi, \gamma)$ con $\gamma_i = \alpha_i \bullet (\beta_{\xi_i} \circ \cdots \circ \beta_{\xi_{(i-1)+1}})$.

9.1.4. Si C es una categoría, vista como 2-categoría del modo usual (cf. 7.1.8), entonces $\Delta//C = \Delta/C$, es decir uno recupera la construcción de 6.1.

9.1.5. Veremos más adelante que los espacios clasificantes de $\Delta//C$ y C son homotópicos. Luego la construcción $C \mapsto \Delta//C$ reemplaza una 2-categoría por una categoría preservando el tipo de homotopía.

9.1.6 Definición. La construcción $\Delta//C$ admite la siguiente variación. Definimos la *categoría de simplices geométrica* ${}^g\Delta//C$ como la categoría $(\underline{N}_g C \rtimes \Delta^\circ)^\circ$ donde $\underline{N}_g C \rtimes \Delta^\circ$ es la construcción de Grothendieck del funtor $\underline{N}_g C : \Delta^\circ \rightarrow \mathcal{Cat}$ (cf. 8.4.5).

9.1.7. La inclusión de categorías simpliciales $\underline{N}_2 C \rightarrow \underline{N}_g C$ (cf. 8.4.6) es una equivalencia homotópica fibra a fibra, y por lo tanto induce una equivalencia homotópica en \mathcal{Cat} al aplicar la construcción de Grothendieck (cf. 4.4.1)

$$\Delta//C \rightarrow {}^g\Delta//C$$

9.2 El funtor $\text{sup} : \Delta//C \rightsquigarrow C$

9.2.1 Definición. Definimos el funtor laxo $\text{sup} : \Delta//C \rightsquigarrow C$ mediante las siguientes fórmulas:

- i) en los objetos se tiene $\text{sup}(n_x, x) = x_{n_x}$;
- ii) dada $(\xi, \alpha) : (n_x, x) \rightarrow (n_y, y)$ flecha en $\Delta//C$, $\text{sup}(\xi, \alpha) = y(\xi(n_x) \rightarrow n_y)$;
- iii) dadas $(\xi, \alpha) : (n_x, x) \rightarrow (n_y, y)$ y $(\eta, \beta) : (n_y, y) \rightarrow (n_z, z)$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \text{sup}((\eta, \beta) \circ (\xi, \alpha)) &= z(\eta\xi(n_x) \rightarrow n_z), \\
 \text{sup}(\eta, \beta) \circ \text{sup}(\xi, \alpha) &= z(\eta(n_y) \rightarrow n_z) \circ y(\xi(n_x) \rightarrow n_y)
 \end{aligned}$$

y la 2-celda estructural $\text{sup}_{(\eta, \beta), (\xi, \alpha)}$ está dada por

$$\text{sup}_{(\eta, \beta), (\xi, \alpha)} = z(\eta(n_y) \rightarrow n_z) \circ \beta_{n_y} \circ \beta_{n_y-1} \circ \cdots \circ \beta_{\xi(n_x)+1}$$

Se verifica fácilmente que sup cumple el axioma de normalidad A). El B) se satisface automáticamente porque $\Delta//C \in \text{Cat}$. Para el axioma C) hay que usar la funtorialidad de la composición.

9.2.2. En forma análoga se define el functor laxo $\text{inf} : (\Delta//C)^\circ \rightsquigarrow C$.

9.2.3. Los funtores sup e inf definidos en esta sección son las extensiones naturales de aquellos definidos para categorías (cf. 6.2).

9.2.4 Teorema. *El functor $\text{sup} : \Delta//C \rightsquigarrow C$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. La demostración es una adaptación de la hecha en el caso de categorías (cf. 6.2.4). Usando nuestra versión del Teorema A para funtores laxos (cf. 8.6.2), debemos mostrar que las fibras homotópicas $(\Delta//C)//c$ (cf. 7.4.6) son contráctiles.

Dado $c \in C_0$, llamamos $i : (\Delta//C)_c \rightarrow (\Delta//C)//c$ a la inclusión de la fibra en la fibra homotópica. Definiremos un functor $r : (\Delta//C)//c \rightarrow (\Delta//C)_c$ y transformaciones naturales $\eta : \text{id}_{(\Delta//C)//c} \Rightarrow ir$ y $\epsilon : \text{cte} \Rightarrow ir$, con $\text{cte}(x, f) = (c, \text{id}_c)$ el functor constante, de donde concluiremos que tanto $(\Delta//C)//c$ como $(\Delta//C)_c$ son contráctiles (cf. 2.3.5, 2.3.8).

Dado (x, f) un objeto de $(\Delta//C)//c$, tenemos que $x = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n_x})$ es un objeto en $\Delta//C$ y $f : x_{n_x} \rightarrow c$ es un morfismo en C . Definimos $r(x, f)$ como el simplex de NC que resulta de extender x usando f .

$$r(x, f) = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n_x} \xrightarrow{f} c)$$

Una flecha $(x, f) \rightarrow (y, g)$ de $(\Delta//C)//c$ consiste en un triple $((\xi, \alpha), \beta)$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} x_0 & \longrightarrow & x_1 & \longrightarrow & x_2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & x_{n_x} & \xrightarrow{f} & c \\ \parallel & & \uparrow \alpha_1 & & \parallel & & \uparrow \alpha_2 & & \parallel & & \dots & & \parallel & & \uparrow \beta & & \parallel \\ y_0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & y_{\xi_0} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & y_{\xi_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & y_{\xi_2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & y_{\xi_{n_x}} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & y_{n_y} & \xrightarrow{g} & c \end{array}$$

Definimos $r((\xi, \alpha), \beta) : r(x, f) \rightarrow r(y, g)$ como el morfismo (ξ', α') de $\Delta//C$ donde:

$$\xi' : [n_x + 1] \rightarrow [n_y + 1] \quad \xi'(j) = \begin{cases} \xi(j) & j \leq n_x \\ n_y + 1 & j = n_x + 1 \end{cases}$$

y

$$\alpha'_j = \begin{cases} \alpha_j & j \leq n_x \\ \beta & j = n_x + 1 \end{cases}$$

Finalmente, la transformación natural η está inducida por la inclusión $[n_x] \rightarrow [n_x + 1]$ cuya imagen no contiene a $n_x + 1$, y la transformación natural ϵ por la inclusión $[0] \rightarrow [n_x + 1]$ cuya imagen es $n_x + 1$. \square

9.2.5. El funtor laxo $\text{sup} : \Delta // C \rightsquigarrow C$ admite una extensión natural

$$\begin{array}{ccc} \Delta // C & \xrightarrow{\text{sup}} & C \\ \downarrow & \nearrow \text{s\bar{u}p} & \\ {}^g\Delta // C & & \end{array}$$

definida como sigue:

- un objeto de ${}^g\Delta // C$ consiste en par (n_x, x) con $x : [n]_x \rightsquigarrow C$. Se define $\text{s\bar{u}p}(n_x, x) = x(n_x)$;
- una flecha $(n_x, x) \rightarrow (n_y, y)$ de ${}^g\Delta // C$ es un par (ξ, α) con $\xi : [n_x] \rightarrow [n_y]$ y $\alpha_{i,j} : y_{\xi i, \xi j} \Rightarrow x_{i,j}$ una familia de 2-celdas compatibles (cf. 8.4.2). Se define $\text{s\bar{u}p}(\xi, \alpha) = y_{\eta n_x, n_y}$;
- dadas $(n_x, x) \xrightarrow{(\xi, \alpha)} (n_y, y) \xrightarrow{(\eta, \beta)} (n_z, z)$ flechas componibles en ${}^g\Delta // C$, la 2-celda estructural asociada es

$$(z_{\eta(n_y), n_z} \circ \beta_{\eta \xi(n_x), \eta(n_y)}) \bullet z_{\eta \xi(n_x), \eta(n_y), n_z}$$

El siguiente corolario resulta del axioma 2-de-3 (cf. 9.1.7, 9.2.4)

9.2.6 Corolario. *El funtor laxo $\text{s\bar{u}p} : {}^g\Delta // C \rightarrow C$ es una equivalencia homotópica.*

9.3 La categoría $\text{Ho } \mathcal{Lax}$

En esta sección probamos que la categoría homotópica de 2-categorías y funtores laxos es equivalente a $\text{Ho } \mathcal{Top}$. En otras palabras, las 2-categorías y los funtores laxos son buenos modelos para los tipos de homotopía.

9.3.1 Definición. Decimos que un funtor laxo $u : C \rightsquigarrow D$ es una *equivalencia homotópica* si $B_g u : B_g C \rightarrow B_g D$ es una equivalencia homotópica de espacios topológicos.

9.3.2. Esta definición de equivalencias homotópicas aplicada a 2-funtores $u : C \rightarrow D$ coincide con la introducida antes (cf. 8.4.11).

9.3.3. Las equivalencias homotópicas en \mathcal{Lax} forman una clase saturada (cf. A.2.1).

9.3.4 Definición. Definimos $\text{Ho } \mathcal{Lax}$ como la localización de \mathcal{Lax} por las equivalencias homotópicas.

9.3.5 Teorema. *La inclusión $i : \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{L}ax$ induce una equivalencia de categorías entre las categorías homotópicas.*

$$\mathrm{Ho} \mathcal{C}at \cong \mathrm{Ho} \mathcal{L}ax$$

9.3.6. Sigue de este teorema que la categoría $\mathrm{Ho} \mathcal{L}ax$ es equivalente a la categoría homotópica usual $\mathrm{Ho} \mathcal{T}op$. Esta equivalencia pueden interpretarse del siguiente modo: las 2-categorías, junto con los funtores laxos, resultan un contexto válidos para hacer teoría de homotopía.

Demostración. La inclusión $i : \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{L}ax$ es plenamente fiel (cf. 7.3.4), luego podemos aplicar la proposición A.2.7. La retracción módulo homotopía $r : \mathcal{L}ax \rightarrow \mathcal{C}at$ es el functor que asigna a una 2-categoría C su categoría de sumplices geométrica ${}^g\Delta//C$.

$$r : \mathcal{L}ax \rightarrow \mathcal{C}at \quad C \mapsto {}^g\Delta//C$$

La equivalencia homotópica natural $\alpha : ir \Rightarrow \mathrm{id}$ está dada por el functor laxo $\mathrm{s}\bar{u}\bar{p}$ descrito arriba (cf. 9.2.6). \square

9.3.7. La categoría $\mathrm{Ho} 2\mathcal{C}at$ también resulta equivalente a la categoría homotópica usual (cf. A.3.5), por lo que desde el punto de vista homotópico da lo mismo trabajar con 2-funtores que con funtores laxos.

9.4 Espacio de lazos de una 2-categoría

En esta sección caracterizamos el espacio de lazos de una 2-categoría bajo ciertas condiciones. Este teorema extiende en un sentido los resultados de Segal y Thomason sobre espacios de lazos inducidos por categorías monoidales (ver por ejemplo [Se74]).

9.4.1 *Notación.* Denotaremos con C una 2-categoría pequeña y con c un objeto de C .

9.4.2 Definición. Definimos el *functor de caminos* $L : (\Delta//C)^\circ \rightarrow \mathcal{C}at$ como el functor laxo que resulta de la composición $h^c \circ \mathrm{sup}^\circ : \Delta//C^\circ \rightsquigarrow C^\circ \rightarrow \mathcal{C}at$ (cf. 7.2.4, 9.2.1).

9.4.3. Esta composición es un 2-functor laxo, y por tanto tiene sentido considerar la construcción de Grothendieck $L \rtimes \Delta//C \rightarrow \Delta//C$ (cf. 3.8.4).

9.4.4 Definición. La *categoría de caminos* $E = L \rtimes \Delta//C$ es la construcción de Grothendieck del functor de caminos.

9.4.5. Es fácil ver que E es isomorfa a $((\Delta//C)//c)^\circ$, la categoría opuesta a la fibra homotópica de sup . Sigue de aquí que E es una categoría contráctil (ver demostración de 9.2.4).

9.4.6. Como las 2-celdas estructurales de L no son necesariamente isomorfismos, en general $E \rightarrow \Delta//C$ es una prefibración y no una fibración.

9.4.7 Definición. Decimos que C, c satisface la *condición de Quillen* si para toda $f : c' \rightarrow c''$ el funtor $f^* : C(c'', c) \rightarrow C(c', c)$ es una equivalencia homotópica en \mathcal{Cat} .

9.4.8 Proposición. *Sea C, c conexa que satisface la condición de Quillen. Entonces para todo $c' \in C_0$ existe $f : c' \rightarrow c \in C_1$ flecha que los une.*

Demostración. Fijo $c \in C_0$, el conjunto $\{c' : C(c', c) \neq \emptyset\}$ es siempre un ideal a derecha. Como C satisface la condición de Quillen, éste también es un ideal a izquierda. Como C es conexa, este conjunto es necesariamente igual a C_0 . \square

9.4.9 Teorema. *Sea C, c conexa que satisface la condición de Quillen. Entonces $C(c, c)$ tiene el tipo de homotopía del espacio de lazos de C con punto base c .*

$$B(C(c, c)) \cong \Omega B_2 C$$

Demostración. Consideramos la prefibración $E \rightarrow \Delta//C$ construida arriba. Como el par C, c es de Quillen, resulta que el funtor de caminos manda toda flecha de $\Delta//C$ a una equivalencia homotópica de \mathcal{Cat} , de donde los cambios de base de $E \rightarrow \Delta//C$ son equivalencias homotópicas y ésta es una fibración de Quillen. El teorema 5.3.16 nos asegura que $B_f E \rightarrow B\Delta//C$ es una quasi-fibración de espacios topológicos. Como el espacio total $B_f E$ es contráctil, se concluye que la fibra $(B_f E)_c = B(C(c, c))$ tiene el tipo de homotopía débil del espacio de lazos de la base $\Omega B_2 C$. El resultado sigue de aquí. \square

9.4.10 Ejemplo. Sólo algunas 1-categorías satisfacen la condición de Quillen. Pero entre ellas podemos nombrar una familia interesante: los grupoides. El tipo homotópico de un grupoide es un $K(G, 1)$, donde G es el grupo de automorfismos de un punto. En este caso, las componentes del espacio de lazos son contráctiles y ΩG tiene por lo tanto el tipo de homotopía de un conjunto discreto.

9.5 Caso de una categoría monoidal estricta

Una 2-categoría con un solo objeto es lo mismo que una categoría monoidal estricta. El tipo homotópico de esta 2-categoría es el que en trabajos de May,

Segal y Thomason (cf. [May72, Se74, Th79]) es llamado el *espacio clasificante de la categoría monoidal (estricta)*. El espacio de lazos es en este caso el espacio clasificante usual de la categoría, sin tener en consideración la estructura monoidal. En esta sección derivamos la condición de *delooping* clásica del teorema 9.4.9.

9.5.1 Definición. Una *categoría monoidal (estricta)* (M, \otimes) es un objeto monoide en $\mathcal{C}at$. Consiste en una categoría pequeña M junto con un morfismo $\otimes : M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \mapsto x \otimes y$, y un objeto 1 de M satisfaciendo las siguientes identidades naturales.

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z) \quad x \otimes 1 = x = 1 \otimes x.$$

9.5.2. El conjunto bisimplicial inducido por la resolución $\text{bar } \bar{M} \in s\mathcal{C}at$ (cf. 1.3.8) coincide con el 2-nervio $N_2 \bar{M}$, donde vemos a M como una 2-categoría con un solo objeto (cf. 7.1.9).

9.5.3. El espacio clasificante BM de una categoría monoidal M es de un modo natural un monoide topológico (cf. 2.3.4), y por lo tanto un H -espacio. A continuación derivamos una condición necesaria y suficiente para que este H -espacio sea deloopeable.

9.5.4 Proposición. Sea (M, \otimes) una categoría monoidal. Son equivalentes:

- a) el monoide topológico BM admite un inverso salvo homotopía;
- b) los funtores de traslación $r_x : M \rightarrow M$, $y \mapsto y \otimes x$ son equivalencias homotópicas;
- c) los funtores de traslación $l_x : M \rightarrow M$, $y \mapsto x \otimes y$ son equivalencias homotópicas;
- d) $\pi_0(BM)$ es un grupo con la multiplicación inducida por \otimes .

Demostración. Claramente $a) \Rightarrow b)$, $a) \Rightarrow c)$ y $a) \Rightarrow d)$. Que $d) \Rightarrow a)$ puede verse en [Se74]. Probaremos que $b) \Rightarrow a)$, que es análogo a $c) \Rightarrow a)$.

Vemos $(\otimes, \text{pr}_2) : M \times M \rightarrow M \times M$ como un morfismo sobre M .

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{(\otimes, \text{pr}_2)} & M \times M \\ & \searrow \text{pr}_2 & \swarrow \text{pr}_2 \\ & & M \end{array}$$

Si x es un objeto de la base, entonces el morfismo inducido entre las fibras se identifica con r_x , que es una equivalencia homotópica por hipótesis. Luego, como

las proyecciones son prefibraciones, se tiene que (\otimes, pr_2) induce equivalencias homotópicas entre las fibras homotópicas, y por el Teorema A en su versión relativa (\otimes, pr_2) es una equivalencia homotópica (cf. 4.4.2). De aquí se concluye con un argumento categórico: si $(v_1, v_2) : BM \times BM \rightarrow BM \times BM$ es un inverso para la equivalencia homotópica $B(\otimes, \text{pr}_2)$, entonces $v_2 = \text{pr}_2$ y el inverso salvo homotopía del monoide BM es la composición

$$BM \xrightarrow{\text{cte}_1 \times \text{id}} BM \times BM \xrightarrow{v_1} BM$$

□

9.5.5 Proposición. *Sea M, \otimes una categoría monoidal. El espacio BM es deloopeable si y sólo si el monoide topológico inducido (BM, \otimes) admite un inverso salvo homotopía.*

Demostración. Si BM es deloopeable entonces admite un inverso salvo homotopía porque todo espacio de lazos lo admite. Recíprocamente, si BM admite un inverso salvo homotopía entonces por la proposición anterior los funtores $M \rightarrow M$, $y \times y \times x$ son equivalencias homotópicas. Luego M , visto como 2-categoría como un solo objeto, satisface la condición de Quillen (cf. 9.4.7) y por el teorema 9.4.9 se tiene una equivalencia homotópica

$$BM \cong \Omega B_2 M$$

de donde BM es deloopeable.

□

Apéndice A

Categorías homotópicas

Las categorías homotópicas son el análogo no abeliano de las categorías derivadas. Se obtienen por medio de la localización de categorías, construcción análoga a la localización de anillos. El ejemplo paradigmático es la categoría homotópica de espacios $\text{Ho } \mathcal{T}op$, la cual puede ser considerada el objeto de estudio de la topología algebraica. Aquí damos un breve repaso de los conceptos fundamentales, y mencionamos los principales ejemplos.

A.1 Localización de categorías

La localización de categorías es una extensión del concepto de localización, clásico en el contexto de anillos. La referencia fundacional es [GZ67]. Exposiciones más actuales pueden encontrarse en [Bo94], [GM96] y [KaS06].

A.1.1 Definición. Si M es una categoría y W es una familia de flechas en M , la *localización de M por W* es una categoría $M[W^{-1}]$ junto con un funtor $\gamma : M \rightarrow M[W^{-1}]$, llamado *funtor de localización*, que hace inversibles todas las flechas en W y que es universal para esta propiedad. Más precisamente, se tiene

- $\gamma(f)$ es isomorfismo para todo $f \in W$;
- si $F : M \rightarrow N$ es un funtor tal que $F(f)$ es isomorfismo para todo $f \in W$, entonces existe un único funtor $\bar{F} : M[W^{-1}] \rightarrow N$ tal que $\bar{F} \circ \gamma = F$.

A.1.2. Dados M y W , uno construye la localización $M[W^{-1}]$ con los mismos objetos que M , con flechas generadas por aquellas de M y por inversas formales de las que están en W , módulo las relaciones evidentes.

$$\begin{array}{l} \text{generadores} \\ \text{relaciones} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} a_f : x \rightarrow y & f \in M(x, y) \\ b_f : y \rightarrow x & f \in M(x, y) \cap W \\ a_g a_f = a_{gf} & f, g \in \text{fl}(M) \\ a_{\text{id}_x} = \text{id}_x & x \in \text{ob}(M) \\ a_f b_f = \text{id}, b_f a_f = \text{id} & f \in W \end{array} \right.$$

A.1.3. Usando la descripción dada arriba es fácil probar el siguiente resultado.

A.1.4 Lema. Sea $\gamma : M \rightarrow M[W^{-1}]$ el funtor de localización. Dados $F, G : M[W^{-1}] \rightarrow N$ la composición con γ establece una biyección

$$\text{hom}(F, G) \xrightarrow{\sim} \text{hom}(F\gamma, G\gamma)$$

entre las transformaciones naturales $F \Rightarrow G$ y las $F\gamma \Rightarrow G\gamma$.

A.1.5. Como acabamos de ver siempre existe la localización, aunque en la construcción anterior la colección de flechas $x \rightarrow y$ entre dos objetos de la localización $M[W^{-1}]$ puede dejar de ser un conjunto, y aparecer eventualmente problemas conjuntistas (cf. [Bo94, Vol.1, V]). No profundizaremos en esta cuestión. El modo de evitar esta complicación es apelando a construcciones alternativas de $M[W^{-1}]$ cuando sea posible (e.g. cálculo de fracciones, categorías de modelos) o simplemente expandiendo el universo base.

A.1.6. El funtor de localización γ no es en general ni pleno ni fiel. Por un lado, se están agregando inversas formales que pueden no estar en la imagen de γ . Por el otro, tienen lugar identificaciones que hacen colapsar ciertas flechas.

A.1.7 *Notación.* Cuando M es una categoría equipada con nociones homotópicas (e.g. categorías de modelos, categorías simpliciales, categorías con cilindros) y W es la clase de equivalencias homotópicas o equivalencias débiles, la localización de M por W recibe el nombre de *categoría homotópica* de M , y se denota por $\text{Ho } M$.

A.1.8 Ejemplo. El ejemplo paradigmático es el de espacios topológicos y equivalencias homotópicas débiles. La categoría homotópica $\text{Ho } \mathcal{T}op$ es la localización de $\mathcal{T}op$ por las equivalencias homotópicas débiles. Concretamente, $\text{Ho } \mathcal{T}op = \mathcal{T}op[W^{-1}]$ con

$$W = \{f : X \rightarrow Y \mid f_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x)) \text{ es un isomorfismo } \forall n \forall x\}.$$

A.2 Clases saturadas

En esta sección presentamos un resultado que nos será de utilidad a la hora de encontrar modelos para tipos de homotopía (categorías equivalentes a $\text{Ho } \mathcal{T}op$). En orden de desarrollar este resultado restringimos nuestro interés a los pares (M, W) con M una categoría y W una clase de flechas *saturada*. Siguiendo la notación de arriba, $\text{Ho } M$ denotará la localización $M[W^{-1}]$.

A.2.1 Definición. Una clase de flechas $W \subset \text{fl}(M)$ es *saturada* si satisface:

- i) las identidades están en W ($\text{id}(M) \subset W$);

- ii) en un triángulo conmutativo, si dos de las flechas están en W entonces la tercera también (axioma 2-de-3); y
- iii) si $ri = 1$ y $ir \in W$, entonces $i, r \in W$.

A.2.2. Sigue de la definición que una clase saturada debe contener los isomorfismos. Los isomorfismos conforman la clase saturada más chica, y el conjunto de todas las flechas es la clase saturada más grande.

A.2.3 Ejemplo. Las equivalencias homotópicas débiles son una clase saturada en $\mathcal{T}op$.

A.2.4. Si $F : M \rightarrow M'$ es un funtor y $W' \subset \text{fl}(M')$ es saturada, entonces $W = F^{-1}(W')$ es saturada. Remarcamos dos instancias de esta construcción:

- Todo funtor $F : M \rightarrow N$ induce una clase saturada canónica W_F , a saber

$$W_F = \{f \in \text{fl}(M) : F(f) \text{ es un isomorfismo}\}$$

- Si $i : S \rightarrow M$ es una inclusión plenamente fiel y W es una clase saturada en M , denotamos $W|_S = i^{-1}(W)$ a la clase saturada inducida en S .

A.2.5 Ejemplo. A partir de la observación anterior se tiene que las equivalencias homotópicas en $sSet$, $bsSet$, Cat , $Poset$, $2Cat$, $\mathcal{L}ax$ son todas clases saturadas.

A.2.6. Al invertir flechas más objetos se vuelven isomorfos. Suele ocurrir que la categoría homotópica $\text{Ho } M$ puede ser descrita por una clase de objetos distinguidos. Tales son los casos de los CW -complejos en $\mathcal{T}op$, los complejos de Kan en $sSet$ y, más en general, los objetos fibrantes y cofibrantes en una categoría de modelos cualquiera. La siguiente proposición permite identificar una tal clase de objetos distinguidos en un contexto muy general.

A.2.7 Proposición. *Sea M una categoría, $W \subset \text{fl}(M)$ saturada y S una subcategoría plena de M , con $i : S \rightarrow M$ la inclusión. Si existen $r : M \rightarrow S$ y $\alpha : ir \Rightarrow \text{id}_M$ tal que $\alpha_x \in W$ para todo x , entonces el funtor*

$$\bar{i} : \text{Ho } S \rightarrow \text{Ho } M$$

es una equivalencia de categorías, con quasi-inversa inducida por r .

Demostración. (cf. [Mal05, pág. 61]) Sigue del siguiente cuadrado y del axioma 2-de-3 que $r(f) \in W|_S$ para todo $f \in W$.

$$\begin{array}{ccc} ir(x) & \xrightarrow{i(f)} & ir(y) \\ \alpha_x \downarrow & & \downarrow \alpha_y \\ x & \xrightarrow{f} & y \end{array}$$

Luego r también pasa a la categoría homotópica induciendo un funtor

$$\bar{r} : \text{Ho } M \rightarrow \text{Ho } S$$

La transformación natural $\alpha : ir \Rightarrow \text{id}_M$ induce un isomorfismo natural $\gamma_M \circ \alpha : \gamma_M ir \Rightarrow \gamma_M$ al componer con γ_M . Éste, a su vez, induce otro $\bar{\alpha} : \bar{i}\bar{r} \Rightarrow \text{id}_{\text{Ho } M}$ (cf. A.1.4), pues por la propiedad universal $\bar{i}\bar{r}$ es el único funtor que factoriza $\gamma_M ir$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{ir} & M \\ \gamma_M \downarrow & & \downarrow \gamma_M \\ \text{Ho } M & \xrightarrow{\bar{i}\bar{r}} & \text{Ho } M \end{array}$$

Para probar que $\bar{r}\bar{i}$ es isomorfo naturalmente a $\text{id}_{\text{Ho } S}$ se razona del mismo modo, considerando la transformación natural $\epsilon : ir \Rightarrow \text{id}_S$ inducida por α (ver demostración de 2.3.8). \square

A.3 Modelos para tipos de homotopía

Gran parte de la topología algebraica se centra en el estudio de la categoría homotópica $\text{Ho } \mathcal{T}op$ por medio de invariantes discretos. Desde este punto de vista es muy interesante dar presentaciones alternativas a esta categoría. En esta sección repasamos algunas de ellas.

A.3.1 Ejemplo. La categoría homotópica $\text{Ho } \mathcal{T}op$ es equivalente a aquella de CW -complejos y clases homotópicas de funciones continuas.

Este resultado se prueba en dos etapas. Una aproximación celular funtorial (e.g. $X \mapsto |S(X)|$) prueba que $\text{Ho } \mathcal{T}op \cong \text{Ho } CW$ (cf. A.2.7). Luego, el Teorema de Whitehead afirma que una equivalencia homotópica débil entre CW -complejos es lo mismo que una equivalencia homotópica, de donde es fácil probar que la localización $\text{Ho } CW$ consiste en tomar clases homotópicas de funciones continuas.

A.3.2 Ejemplo. La adjunción $|\cdot| \dashv S$ entre espacios y conjuntos simpliciales induce una equivalencia entre las categorías homotópicas.

$$\text{Ho } sSet \cong \text{Ho } \mathcal{T}op$$

La demostración de este resultado es uno de los objetivos centrales de [GZ67], en donde lo presentan como *la descripción combinatoria de los espacios topológicos*.

Esta equivalencia es el ejemplo paradigmático de *equivalencia de Quillen* entre categorías de modelos. En el trabajo fundacional [Qu67] puede encontrarse otra demostración.

A.3.3 Ejemplo. Quillen probó (cf. [II72]) la equivalencia

$$\mathrm{Ho} \mathcal{C}at \cong \mathrm{Ho} s\mathcal{S}et$$

de donde se deduce que las categorías pequeñas también son modelos para tipos de homotopía. Este resultado se obtiene de A.2.7, tomando como inclusión plenamente fiel al funtor nervio, y como funtor de regularización r a la asignación $X \mapsto \Delta/X$.

Thomason probó que $\mathcal{C}at$ admite una estructura de modelos ([Th80]), donde las equivalencias débiles son nuestras equivalencias homotópicas. Sigue del trabajo de Thomason que la equivalencia $\mathrm{Ho} \mathcal{C}at \cong \mathrm{Ho} s\mathcal{S}et$ también puede ser deducida de una equivalencia de Quillen.

A.3.4 Ejemplo. En el manuscrito [Gr83] Grothendieck introduce las nociones de *categoría test* y *functor test*. Dada A una categoría pequeña, el funtor canónico $A \rightarrow \mathcal{C}at$, $a \mapsto A/a$ induce por extensión de Kan (cf. B.2.5) otro $\mathcal{S}et^{A^\circ} \rightarrow \mathcal{C}at$, $F \mapsto A/F$. Se dice que A es una categoría test (débil) si el funtor $F \mapsto A/F$ induce una equivalencia

$$\mathrm{Ho} \mathcal{S}et^{A^\circ} \cong \mathrm{Ho} \mathcal{C}at,$$

donde las equivalencias homotópicas en $\mathcal{S}et^{A^\circ}$ son aquellas levantadas desde $\mathcal{C}at$ (cf. A.2.4).

El ejemplo paradigmático de categoría test es Δ , y de functor test es la inclusión $\Delta \rightarrow \mathcal{C}at$. Esta teoría fue desarrollada posteriormente por Maltsiniotis y Cisinski (ver por ejemplo [Mal05]).

A.3.5 Ejemplo. El último ejemplo al que hacemos referencia es $2\mathcal{C}at$. En [WHPT07] se establece una estructura de modelos en $2\mathcal{C}at$, con equivalencias débiles inducidas por el 2-espacio clasificante. En particular, este trabajo prueba la equivalencia

$$\mathrm{Ho} s\mathcal{S}et \cong \mathrm{Ho} 2\mathcal{C}at.$$

A.3.6. En esta tesis se presentan dos nuevos modelos para tipos de homotopía. El primero es el de posets, con las equivalencias homotópicas inducidas por la inclusión $\mathcal{P}oset \rightarrow \mathcal{C}at$ (cf. 6.8.4). El segundo es el de 2-categorías pequeñas y funtores laxos entre ellas, con equivalencias homotópicas inducidas por el nervio geométrico $2\mathcal{C}at \rightarrow s\mathcal{S}et$ (cf. 9.3.5).

Apéndice B

Categorías de prehaces

Los prehaces son las *representaciones* de una categoría pequeña. Conforman un topos en el sentido de Grothendieck, y fueron intensamente estudiados en la literatura. Por ejemplo, los prehaces definidos sobre Δ son los conjuntos simpliciales. A continuación damos una revisión a algunos conceptos fundamentales.

B.1 Prehaces y el Lema de Yoneda

B.1.1 Notación. Dada C una categoría pequeña, denotamos por $\mathcal{S}et^{C^\circ}$ la categoría de funtores $C^\circ \rightarrow \mathcal{S}et$. Los objetos de $\mathcal{S}et^{C^\circ}$ son comúnmente llamados *prehaces sobre C* , o alternativamente, *C -conjuntos*.

B.1.2. Un prehaz F puede ser pensado como un graduado por los objetos de C , y equipado con ciertos morfismos estructurales. Siguiendo este punto de vista, decimos que $x \in F(c)$ es un elemento de tipo c de F .

B.1.3 Ejemplo. Cuando $C = \Delta$ se tiene $\mathcal{S}et^{\Delta^\circ} = s\mathcal{S}et$.

B.1.4 Definición. Si c es un objeto de C , entonces $C(-, c) \in \mathcal{S}et^{C^\circ}$ es el *functor representado por c* , que asigna a cada objeto d de C el conjunto de morfismos de $C(d, c)$, y a cada morfismo f la función $f^* : g \mapsto gf$.

El *functor de Yoneda* $h : C \rightarrow \mathcal{S}et^{C^\circ}$ está definido por $h(c) = C(-, c)$ y $h(f) = f^* = \{g \mapsto gf\}$.

B.1.5 Notación. Dado $F \in \mathcal{S}et^{C^\circ}$, denotamos C/F a la fibra homotópica de h sobre F . Tiene por objetos los pares (c, x) con $c \in C$ y $x \in F(c)$, y hay una flecha $g_* : (c, x) \rightarrow (d, y)$ en C/F por cada flecha $g : c \rightarrow d$ satisfaciendo $F(g)(y) = x$.

B.1.6 Proposición (Lema de Yoneda). Sean $F \in \mathcal{S}et^{C^\circ}$ y $c \in C$. La aplicación natural que asigna a cada transformación natural $\eta : C(-, c) \Rightarrow F$ el elemento $\eta_c(\text{id}_c)$ induce una biyección

$$\mathcal{S}et^{C^\circ}(C(-, c), F) \rightarrow F(c)$$

Demostración. Una transformación natural $\eta : C(-, c) \Rightarrow F$ queda completamente determinada por $\eta_c(\text{id}_c)$, en efecto

$$\eta_d(f) = \eta_d(f^*(\text{id}_c)) = f^*(\eta_c(\text{id}_c)), \quad f : d \rightarrow c.$$

Además, dado cualquier elemento $x \in F(c)$, la fórmula

$$\eta_d(f) = f^*(x), \quad f : d \rightarrow c$$

define una transformación natural válida. \square

B.1.7. El prehaz $C(-, c)$ clasifica elementos de tipo c . Esta simple observación arroja las siguientes consecuencias.

B.1.8 Corolario. *La inclusión de Yoneda es plenamente fiel.*

B.1.9 Corolario. *Los prehaces representables $\{C(-, c)\}_{c \in \text{ob}(C)}$ forman un conjunto de generadores de Set^{C° .*

Demostración. Si $\alpha, \beta : F \Rightarrow G$ son morfismos de prehaces distintos entre sí, entonces existen un objeto c y un elemento $x \in F(c)$ tales que $\alpha_c(x) \neq \beta_c(x)$. Luego $\alpha\eta_x \neq \beta\eta_x$, donde $\eta_x : C(-, c) \rightarrow F$ es el morfismo asociado a x . \square

B.1.10. La categoría de prehaces Set^{C° es completa y cocompleta. Los límites y colímites se calculan lugar a lugar.

Concretamente, si D es una categoría de índices y $X : D \rightarrow \text{Set}^{C^\circ}$, $i \mapsto X^i$, es un diagrama, entonces definiendo $X^\infty(c) = \varinjlim_i X^i(c)$ y tomando los morfismos $X^\infty(d) \rightarrow X^\infty(c)$ inducidos en el colímite por cada flecha $c \rightarrow d$ en C , se construye un prehaz X^∞ . Es fácil ver que este prehaz satisface la propiedad universal del colímite.

La construcción para límites es análoga.

B.1.11 Proposición (Lema de Yoneda II). *Todo prehaz es colímite de representables. Más precisamente, si $C/F \rightarrow \text{Set}^{C^\circ}$ es el funtor $(c, x) \mapsto C(-, c)$, entonces*

$$\varinjlim_{C/F} C(-, c) = F$$

B.2 Funtores singulares y extensión de Kan

El lema de Yoneda permite identificar un objeto $c \in C$ con el prehaz que representa $C(-, c) \in \text{Set}^{C^\circ}$. Luego un modo de describir un objeto C (aunque por cierto no muy eficiente) es a través del funtor $C(-, c) : C^\circ \rightarrow \text{Set}$. Esta información es en general redundante y uno se limita a conocer cómo se comporta $C(-, c)$ para cierta subcategoría $A \subset C$. Éste es el espíritu de los funtores singulares.

B.2.1 Definición. Sea D una categoría, y sea $\varphi : C \rightarrow D$ un funtor. El funtor singular inducido por φ es $\psi : D \rightarrow \mathcal{S}et^{C^\circ}$ dado por $\psi(W) = D(\varphi(-), W)$.

B.2.2 Ejemplo. Ejemplos de este funtor son el funtor singular (el cual motiva el nombre), el nervio de una categoría, los nervios fibrado y clivado para categorías fibradas, el 2-nervio y el nervio geométrico para 2-categorías, etcétera.

B.2.3. Dados D y $\varphi : C \rightarrow D$, el funtor singular inducido ψ preserva límites.

$$\varprojlim_i D(\varphi(-), d_i) \cong D(\varphi(-), \varprojlim_i d_i)$$

B.2.4. El funtor de Yoneda $h : C \rightarrow \mathcal{S}et^{C^{op}}$ permite embeber C dentro de una categoría cocompleta. Además de ser una cocompletación de C , $\mathcal{S}et^{C^{op}}$ es *universal*, en el sentido que se detalla a continuación.

B.2.5 Proposición (Extensión de Kan). *Sea D una categoría cocompleta, y sea $\varphi : C \rightarrow D$ un funtor. Pensando φ como definido sobre los representables, existe una única extensión cocontinua (salvo isomorfismo) $\phi : \mathcal{S}et^{C^\circ} \rightarrow D$.*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{h} & \mathcal{S}et^{C^\circ} \\ & \searrow \varphi & \downarrow \phi \\ & & D \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \psi \\ \downarrow \psi \end{array}$$

Además $\phi \dashv \psi$, donde ψ es el funtor singular inducido por φ .

Demostración. Definimos $\phi(F) = \varinjlim_{C/F} \varphi(c)$. Un morfismo de prehaces $\alpha : F \Rightarrow G$ induce un funtor $C/F \rightarrow C/G$ y éste un morfismo $\alpha_* : \phi(F) \rightarrow \phi(G)$. La functorialidad de esta construcción se deduce de la propiedad universal de los colímites. Por supuesto, como un colímite está definido a menos de isomorfismo canónico, ϕ también está caracterizado a menos de isomorfismo canónico.

Para la adjunción $\phi \dashv \psi$, notar que una flecha $\phi(F) \rightarrow d$ consiste en una familia de flechas compatibles $\varphi(c) \rightarrow d$ indexada por C/F . Una flecha $\varphi(c) \rightarrow d$ es un elemento de tipo c del prehaz $\psi(d)$, luego por el lema de Yoneda (cf. B.1.6) esta flecha equivale a un morfismo de prehaces $C(-, c) \rightarrow \psi(d)$. Sigue por la compatibilidad entre estas flechas que el dato $\phi(F) \rightarrow d$ es equivalente a $F \rightarrow \psi(d)$ lo que concluye la demostración. \square

B.2.6 Notación. El funtor ϕ es la *extensión de Kan* del funtor φ .

B.2.7 Corolario. *Si $\phi, \phi' : \mathcal{S}et^{C^\circ} \rightarrow D$ son funtores cocontinuos que coinciden en los representables, entonces se tiene un isomorfismo natural $\phi \cong \phi'$.*

B.3 Ejemplos y aplicaciones

B.3.1 Ejemplo. Un functor $\varphi : \Delta \rightarrow D$ es un *modelo para símplices* en la categoría D . Dado φ un modelo para símplices en una categoría D , la extensión de Kan ϕ es la φ -realización, y su adjunto a derecha ψ es el functor φ -singular.

- Cuando $D = \mathcal{T}op$, $\varphi([n])$ es el n -símplex topológico Δ^n ,

$$\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0, \sum_i x_i = 1\}$$

y φ se define en las flechas en la forma canónica, entonces $\phi = |\cdot|$ es el functor realización geométrica, y $\psi = S$ es el functor singular.

- Cuando $D = \mathcal{C}at$ y $\varphi([n]) = [n]$ visto como categoría, entonces $\phi = c$ es el functor realización categórica, y $\psi = N$ es el functor nervio.

B.3.2 Ejemplo. La ley exponencial en conjuntos

$$\mathcal{S}et(A \times X, B) \cong \mathcal{S}et(A, B^X)$$

implica que el functor $\mathcal{S}et \rightarrow \mathcal{S}et, A \mapsto A \times X$ preserva colímites. Dado X conjunto simplicial, como los colímites y los productos en $s\mathcal{S}et$ se calculan lugar a lugar, tenemos que el functor $s\mathcal{S}et \rightarrow s\mathcal{S}et, K \mapsto K \times X$ también preserva colímites. Luego este functor es la extensión de Kan del functor $\Delta \rightarrow s\mathcal{S}et, [n] \mapsto \Delta[n] \times X$, y por lo tanto admite un adjunto como adjunto a derecha al functor singular $s\mathcal{S}et \rightarrow s\mathcal{S}et, L \mapsto L^X$. De este modo pueden construirse hom internos en $s\mathcal{S}et$. Notar que por construcción del functor singular los n -símplices de L^X están dados por

$$(L^X)_n = s\mathcal{S}et(\Delta[n] \times X, L).$$

Se ve a partir de esta fórmula que los vértices son los morfismos simpliciales $X \rightarrow L$, las aristas las homotopías simpliciales $X \times I \rightarrow L$, etcétera.

Bibliografía

- [AM66] M. Artin, B. Mazur. *On the Van Kampen theorem*.
Topology 5 (1966), 179–189.
- [An78] D. Anderson. *Fibrations and geometric realizations*.
Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), 765–788.
- [BC03] M. Bullejos, A.M. Cegarra. *On the geometry of 2-categories and their classifying spaces*.
K-Theory 29 (2003), 211–229.
- [BK72] A.K. Bousfield, D.M. Kan. *Homotopy Limits, Completions and Localizations*.
Lecture Notes in Mathematics 304. Springer (1972).
- [Bo94] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra (Vol. 1 y 2)*.
Cambridge University Press (1994).
- [BW85] H.J. Baues, G. Wirsching. *Cohomology of small categories*.
J. Pure Appl. Algebra 38 (1985), 187–211.
- [CR05] A.M. Cegarra, J. Remedios. *The relationship between the diagonal and the bar constructions on a bisimplicial set*.
Topology and its App 153 (2005), 21–51.
- [dH08a] M. del Hoyo. *On the subdivision of small categories*.
Topology and its App 155 (2008), 1189–1200.
- [dH08b] M. del Hoyo. *On the homotopy type of a cofibred category*.
Cahiers Topologie Géom. Différentielle, en prensa.
- [dH09] M. del Hoyo. *On the loop space of a 2-category*.
Trabajo en preparación.
- [DK83] W. Dwyer, D. Kan. *Function complexes for diagrams of simplicial sets*.
Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 45 (1983), 139–147.
- [Ev75] M. Evrard. *Fibrations de petites catégories*.
Bull. Soc. Math. France 103 (1975), 241–265.
- [FL81] R. Fritsch, D. Latch. *Homotopy Inverses for Nerve*.
Mathematische Zeitschrift 177 (1981), 147–179.

- [GJ99] P. Goerss, J. Jardine. *Simplicial homotopy theory*.
Progress in Math 174. Birkhäuser (1999).
- [GM96] S. Gelfand, Y. Manin. *Methods of Homological Algebra*.
Springer-Verlag (1996).
- [Gr71] A. Grothendieck. *Revetements etales et groupe fondamental (SGA 1)*.
Lecture Notes in Mathematics 224 (1971), Springer.
- [Gr83] A. Grothendieck. *Pursuing Stacks*.
Manuscript (1983).
- [Gra80] J. Gray. *Closed categories, lax limits and homotopy limits*.
J. Pure Appl. Algebra 24 (1980), 127-158.
- [GZ67] P. Gabriel, M. Zisman. *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*.
Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35. Springer
(1967).
- [Ha02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*.
Cambridge University Press (2002).
- [He92] M. Heggie. *Homotopy cofibrations in Cat*.
Cahiers Topologie Geom Diff 33 (1992), 291–313.
- [Ho99] M. Hovey. *Model categories*.
Mathematical Surveys and Monographs 63, Am. Math. Soc. (1999).
- [Ill72] L. Illusie. *Complexe cotangente et déformations II*.
Lecture Notes in Mathematics 283, Springer (1972).
- [KaS06] M. Kashiwara, P. Schapira. *Categories and sheaves*.
Springer-Verlag (2006).
- [KeS74] G.M. Kelly, R. Street. *Review of the elements of 2-categories*.
Proc. Sydney Category Theory Seminar 1972/73, Lecture Notes in
Math. 420, Springer (1974) 75-103.
- [Mal05] G. Maltsiniotis. *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*
Astérisque, 301 (2005).
- [May67] J. P. May. *Simplicial objects in algebraic topology*.
Van Nostrand Company Inc. (1967).
- [May72] J. P. May. *The geometry of iterated loop spaces*.
Lecture Notes in Mathematics 271. Springer (1972).

- [McL98] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician (2nd ed.)*. Graduate Text in Math. 5. Springer (1998).
- [Mil56] J. Milnor. *Construction of universal bundles I*. Annals of Mathematics 63 (1956), 272–284.
- [Min02] E. G. Minian. *Cat as a lambda-cofibration category*. J. Pure Appl. Algebra 167 (2002), 301–314.
- [Min05] G. Minian. *Numerably Contractible Categories*. K-Theory 36 (2005), 209–222.
- [PR06] T. Pirashvili, M.J. Redondo. *Cohomology of the Grothendieck construction*. Manuscripta Math. 120 (2006), 151–162.
- [Qu67] D. Quillen. *Homotopical Algebra*. Lecture Notes in Math. 43, Springer (1967).
- [Qu73] D. Quillen. *Higher Algebraic K-Theory I*. Lecture Notes in Math. 341, Springer (1973), p. 85–147.
- [Se51] J.P. Serre. *Homologie singulière des espaces fibrés. Applications*. Ann. of Math. 54, (1951). 425–505.
- [Se68] G. Segal. *Classifying spaces and spectral sequences*. Publ. Math. I.H.E.S. 34 (1968), 105–112.
- [Se74] G. Segal. *Categories and cohomology theories*. Topology 13 (1974), 293–312.
- [Sp66] E. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer-Verlag (1966).
- [Th79] R. W. Thomason. *Homotopy colimits in the category of small categories*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 85 (1979), 91–109.
- [Th80] R. W. Thomason. *Cat as a closed model category*. Cahiers Topologie Géom. Différentielle 21 (1980), 305–324.
- [WHPT07] K. Worytkiewicz, K. Hess, P. Parent, A. Tonks. *A model structure à la Thomason on 2-Cat*. J. Pure Appl. Algebra 208 (2007) 205–236.
- [We94] C. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press (1994).