

UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA
Reunión Anual 2009 - Mar del Plata

Notas de Topología Combinatoria

NICOLÁS CAPITELLI – GABRIEL MINIAN
Departamento de Matemática
FCEyN, Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

Índice general

Introducción	3
1. Poliedros y Complejos Simpliciales	4
1.1. Preliminares	4
1.2. Complejos simpliciales	6
1.3. Realización geométrica	8
1.4. Subdivisiones	10
2. Variedades Combinatorias	19
2.1. Variedades combinatorias	19
2.2. Propiedades fundamentales	22
2.3. Pseudovariedades	25
3. Colapsabilidad	28
3.1. Colapsos simpliciales	28
3.2. Colapsabilidad en variedades combinatorias	32
4. Teoría de Morse discreta	35
4.1. Campos vectoriales combinatorios	35
4.2. Funciones de Morse combinatorias	38
4.3. Teoremas principales	42
4.4. Gradiente de una función de Morse combinatoria	44
Bibliografía	47

Introducción

Estas notas introductorias fueron pensadas a modo de guía y, en cierta medida, de complemento al curso de topología combinatoria, dictado por Gabriel Minian en la reunión anual de la UMA –Mar del Plata, Septiembre 2009. Presentamos aquí varios de los objetos y resultados básicos de esta rama de la topología. Nos concentramos principalmente en el estudio de los poliedros y complejos simpliciales, las variedades y pseudovariedades combinatorias, los colapsos simpliciales y la teoría de Morse discreta.

Los prerequisites matemáticos necesarios para entender la mayor parte de estas notas son pocos: el curso está pensado para alumnos que tienen conocimientos de álgebra lineal y geometría/análisis básico en \mathbb{R}^n .

Nicolás Capitelli – Gabriel Minian
Buenos Aires, Septiembre 2009

Capítulo 1

Poliedros y Complejos Simpliciales

1.1. Preliminares

Definición 1.1.1. Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ se dice *convexo* si para todo par de puntos $x, y \in C$, el segmento que los une $\{\lambda x + (1 - \lambda)y, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ está contenido en C .

La siguiente figura muestra ejemplos de conjuntos convexos y conjuntos que no lo son. Los conjuntos X e Y son convexos, en cambio Z y W (el borde del círculo) no lo son.

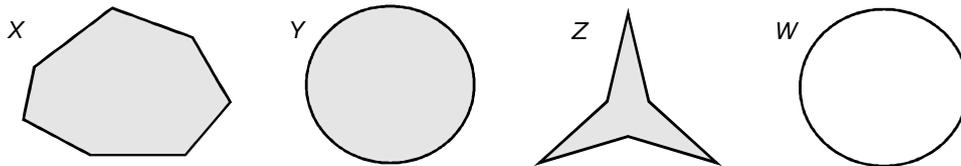


Figura 1.1: Ejemplos de conjuntos convexos y no convexos.

Definición 1.1.2. Sean $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $z \in \mathbb{R}^n$ es una *combinación convexa* de x_0, \dots, x_k si existen $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que

$$z = \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_k x_k$$

con $\lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1$.

Definición 1.1.3. La *cápsula convexa* de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas (finitas) de elementos de X .

La figura muestra algunos ejemplos de cápsulas convexas.

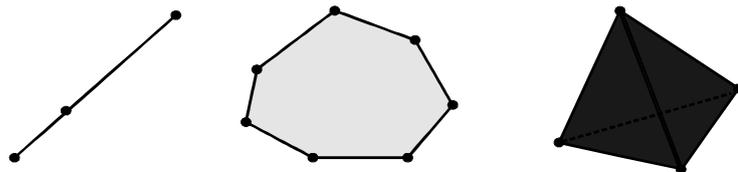


Figura 1.2: Ejemplos de cápsulas convexas.

EJERCICIO 1.1.4. Probar que la cápsula convexa de X es el mínimo conjunto convexo que contiene a X .

Definición 1.1.5. Un conjunto de puntos $\{x_0, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ se dice *afínmente independiente* si cada vez que se tiene una combinación lineal

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i x_i = 0$$

y $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 0$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$), se verifica que $\lambda_i = 0$ para todo i . De lo contrario, decimos que los puntos x_0, \dots, x_k son *afínmente dependientes*.

EJERCICIO 1.1.6. Mostrar que $\{x_0, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es afínmente independiente si, y sólo si, el conjunto $\{x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0\}$ es linealmente independiente. Observar que, en particular, si $\{x_0, \dots, x_k\}$ es afínmente independiente entonces $k \leq n$.

En otras palabras, un conjunto de $k + 1$ puntos en \mathbb{R}^n es afínmente independiente si sus puntos no están contenidos en una variedad lineal (es decir, un subespacio corrido del origen) de dimensión menor a k .

Observación 1.1.7. Si los puntos x_0, \dots, x_k son afínmente independientes, entonces todo elemento de la cápsula convexa de $\{x_0, \dots, x_k\}$ se escribe de manera única como combinación convexa de los x_i . En efecto, si

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=0}^k \lambda'_i x_i$$

entonces

$$0 = \sum_{i=0}^k (\lambda_i - \lambda'_i) x_i.$$

Como además, $\sum_{i=0}^k (\lambda_i - \lambda'_i) = \sum_{i=0}^k \lambda_i - \sum_{i=0}^k \lambda'_i = 1 - 1 = 0$, entonces $\lambda_i - \lambda'_i = 0$ para todo $i = 0, \dots, k$.

Definición 1.1.8. Un *simplex* de dimensión k o k -*simplex* es la cápsula convexa de una colección de $k + 1$ puntos afínmente independientes en algún espacio euclídeo \mathbb{R}^n ($k \leq n$). Si x_0, \dots, x_k son un conjunto de $k + 1$ puntos afínmente independientes en \mathbb{R}^n llamaremos a su cápsula convexa el k -simplex generado por $\{x_0, \dots, x_k\}$ y lo notaremos $\sigma = \langle x_0, \dots, x_k \rangle$. Los puntos x_0, \dots, x_k se llaman vértices de σ .

EJEMPLO 1.1.9. Un 0-simplex $\langle x_0 \rangle$ consiste en un único punto x_0 . Un 1-simplex $\langle x_0, x_1 \rangle$ es el segmento de \mathbb{R}^n que une los puntos x_0 y x_1 . Un 2-simplex $\langle x_0, x_1, x_2 \rangle$ consiste en el triángulo de vértices x_0, x_1, x_2 . Un 3-simplex $\langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$ es el tetraedro de vértices x_0, x_1, x_2, x_3 . Y continuando así de manera análoga en dimensiones mayores.

Como consecuencia de la Observación 1.1.7 se tiene que cualquier punto $z \in \sigma = \langle x_0, \dots, x_k \rangle$ se escribe como una combinación convexa $z = \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_k x_k$ donde los λ_i son únicos. Llamamos a los λ_i las *coordenadas baricéntricas* de z en σ .

Queda como ejercicio para el lector, la demostración de las siguientes propiedades básicas de los símplexes:

Proposición 1.1.10. *Vale lo siguiente:*

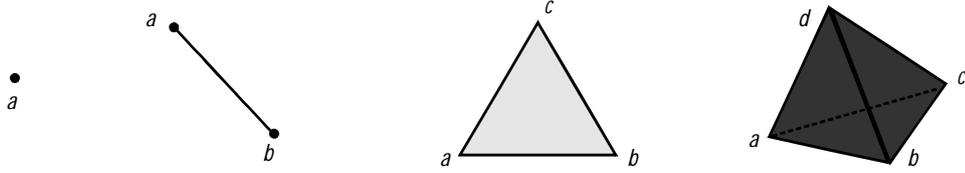


Figura 1.3: Ejemplos de símplices (dim 0 a 3).

1. Todo k -simplex $\sigma = \langle x_0, \dots, x_k \rangle$ es la unión de los segmentos que unen x_0 con los puntos del simplex $\tau = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$.
2. Dado un simplex σ , existe uno y sólo un conjunto afínmente independiente de puntos que lo generan. Es decir, los vértices de un simplex quedan unívocamente determinados por el simplex.

Definición 1.1.11. Sea $\sigma = \langle x_0, \dots, x_k \rangle$. Todo simplex generado por un subconjunto (no vacío) de $\{x_0, \dots, x_k\}$ se dice que es una *cara* de σ . Las caras de σ distintas de σ mismo se llaman caras *propias*. Las caras *inmediatas* de σ son las caras generadas por exactamente un vértice menos que σ . La unión de caras propias de σ se llama borde de σ y se lo denota $\dot{\sigma}$. Notar que el borde de un simplex son los puntos que tienen alguna coordenada baricéntrica nula. El interior del simplex es el conjunto de puntos que no están en el borde y se lo denotara $\overset{\circ}{\sigma}$. Notar que son los puntos de σ que poseen todas sus coordenadas baricéntricas no nulas.

Podemos definir en $\sigma = \langle x_0, \dots, x_k \rangle \subset \mathbb{R}^n$ una métrica de la siguiente manera. Dados $y, z \in \sigma$ podemos escribir

$$y = \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_k x_k \quad z = \lambda'_0 x_0 + \dots + \lambda'_k x_k$$

donde la escritura es única. Definimos entonces la distancia

$$d(y, z) = \sqrt{(\lambda_0 - \lambda'_0)^2 + \dots + (\lambda_k - \lambda'_k)^2}.$$

Notar que la distancia definida en σ es equivalente a la distancia heredada de \mathbb{R}^n .

1.2. Complejos simpliciales

Los poliedros son subespacios (subconjuntos) de \mathbb{R}^n que pueden describirse (y estudiarse) en forma combinatoria. Los complejos simpliciales son los objetos combinatorios que los describen.

Notación. Si τ es una cara de un simplex σ , notaremos $\tau < \sigma$.

Definición 1.2.1. Un complejo simplicial K es un conjunto de símplices en un espacio euclídeo \mathbb{R}^n que cumple las siguientes dos propiedades:

1. Si $\sigma \in K$ y $\tau < \sigma$, entonces $\tau \in K$.
2. Si $\sigma, \tau \in K$ y $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, entonces $\sigma \cap \tau < \sigma, \tau$.

Diremos que K es finito si consta de finitos símplices. En estas notas trabajaremos exclusivamente con complejos simpliciales finitos.

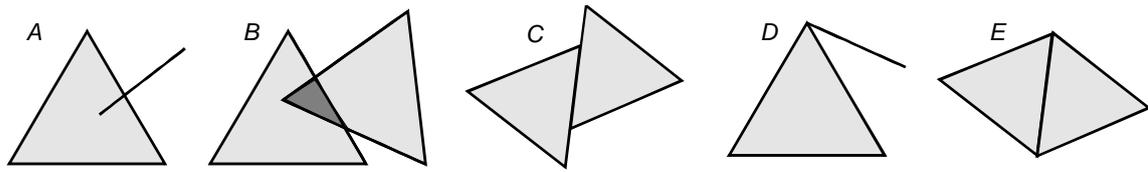


Figura 1.4: Los conjuntos de símplices A , B y C no son complejos simpliciales; D y E sí.

EJERCICIO 1.2.2. Sea K un conjunto de símplices en \mathbb{R}^n . Probar que K es un complejo simplicial si y sılo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. Si $\sigma \in K$ y $\tau < \sigma$, entonces $\tau \in K$.
2. Para todo par $\sigma, \tau \in K$, si $\sigma \neq \tau$, entonces $\overset{\circ}{\sigma} \cap \overset{\circ}{\tau} = \emptyset$

Definición 1.2.3. Dado un complejo simplicial (finito) K , se define el *espacio asociado* a K ó *polítopo* de K , y se lo denota $|K|$, a la unión de los símplices que componen a K . Es decir $|K|$ es un subespacio (subconjunto) de \mathbb{R}^n .

Por el ejercicio anterior se tiene que para todo elemento $x \in |K|$, existe un único simplex $\sigma \in K$ tal que $x \in \overset{\circ}{\sigma}$. Por lo tanto, todo elemento de $|K|$ se escribe en forma única como combinación convexa $x = \sum_{i=0}^k t_i x_i$ tales que $t_i > 0$ para todo i y $\{x_0, \dots, x_n\}$ generan un simplex de K .

Definición 1.2.4. Si L es una subcoleccion de símplices de un complejo simplicial K que contiene todas las caras de sus elementos entonces L es en sí mismo un complejo simplicial. En este caso L se llama un *subcomplejo* de K . Denotaremos $L < K$.

Definición 1.2.5. Todo simplex σ determina, junto con todas sus caras, un complejo simplicial que, por abuso de notación, denotaremos también como σ . El conjunto de todas las caras propias de un simplex σ determina el complejo simplicial $\overset{\circ}{\sigma}$, el *borde* de σ . Notar que $\overset{\circ}{\sigma} < \sigma$.

Definición 1.2.6. La dimensión de K , que denotaremos $\dim(K)$, es la máxima de las dimensiones de los símplices de K . Dado un entero no negativo n , el conjunto de símplices de K de dimensión menor o igual a n es un subcomplejo de K llamado *n -esqueleto* de K y se denota $K^{(n)}$. El 0-esqueleto $K^{(0)}$ es el conjunto de vértices de K .

Definición 1.2.7. Dado un simplex $\sigma \in K$ se define el *complejo complementario* de σ en K , notado Q_σ , como el subcomplejo de K formado por los símplices $\tau \in K$ tales que $\sigma \not\leq \tau$.

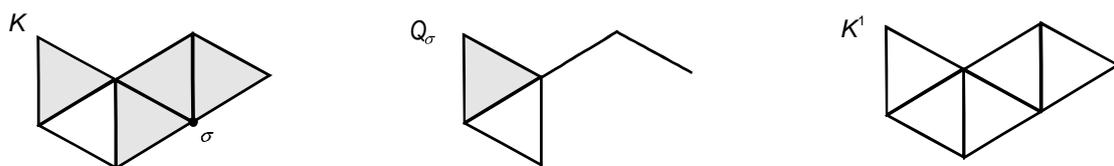


Figura 1.5: El subcomplejo complementario a σ en K y el 1-esqueleto K^1 de K .

Notar que dos símplices de la misma dimensi3n son homeomorfos, mediante un homeomorfismo que manda los vértices de uno en los vértices del otro y combinaciones convexas en combinaciones convexas (esto es lo que más adelante llamaremos isomorfismo simplicial). Además, todo complejo simplicial K queda determinado, salvo isomorfismo simplicial, conociendo sus vértices y cuáles de estos vértices forman símplices entre sí. Por esta raz3n, un complejo simplicial puede describirse y estudiarse completamente en forma combinatoria. De ahí surge la definici3n de complejo simplicial abstracto que damos a continuaci3n.

Definici3n 1.2.8. Un *complejo simplicial (abstracto)* K es un par (V_K, S_K) donde V_K es un conjunto finito de elementos llamados *vértices* y S_K es una colecci3n de subconjuntos finitos no vacíos de V_K llamados *símplices* con la propiedad que cada elemento de V_K pertenece a algún elemento de S_K y, si σ es un elemento en S_K , entonces todo subconjunto no vacío de σ también es un elemento de S_K .

Notemos que de la definici3n se deduce que para todo vértice $v \in V_K$ se tiene $\{v\} \in S_K$. En particular, el conjunto V_K queda determinado por S_K : son los elementos que forman los conjuntos unitarios. Por estos motivos, identificaremos en general el complejo simplicial K con el conjunto S_K y los vértices con los símplices de un solo elemento.

La dimensi3n de un simplex ‘‘abstracto’’ σ , al igual que un simplex geométrico, es uno menos que la cantidad de vértices que lo conforman. Esto es, si $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ tiene $n + 1$ elementos entonces $\dim(\sigma) = n$, en cuyo caso diremos que σ es un n -simplex (y a veces escribiremos σ^n cuando queramos recalcar este hecho). Notar que, en particular, los 0-símplices se corresponden con los vértices.

Si σ, τ son dos símplices de un complejo simplicial K tales que $\sigma \subset \tau$ entonces decimos que σ es *cara* de τ y lo notamos $\sigma < \tau$ (al igual que como hacemos para los símplices ‘‘geométricos’’). Recordar que, si además $\sigma \subsetneq \tau$ decimos que σ es *cara propia* de τ y si $\dim(\sigma) = \dim(\tau) - 1$, decimos que σ es *cara inmediata* de τ y lo notamos $\sigma \prec \tau$.

1.3. Realizaci3n geométrica

En esta secci3n relacionaremos las dos nociones de complejos simpliciales: la primera que fue hecha en forma más geométrica y la segunda versi3n, más abstracta. Veremos que esencialmente son la misma cosa y a partir de ahí trabajaremos con los dos conceptos indistintamente. Introducimos aquí también las nociones de morfismo simplicial, realizaci3n geométrica y poliedro.

Para relacionar ambas nociones de complejos simpliciales necesitamos unas definiciones previas:

Definici3n 1.3.1. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se dice que est  en *posici3n general* si cada subconjunto de X de a lo sumo $n + 1$ puntos es afinmente independiente.

Esto es, X est  en posici3n general si ninguna colecci3n de $r + 2$ puntos de X est  contenida en una variedad lineal de dimensi3n r , para cada $r = 1, 2, \dots, n - 1$.

EJEMPLO 1.3.2. El conjunto $\{(t, t^2, \dots, t^n) \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$ est  en posici3n general. En particular, el gráfico de la funci3n $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es un conjunto en posici3n general en \mathbb{R}^2 (notar que no existen tres puntos contenidos en una recta).

Ahora bien, sabemos que los símplices quedan determinados por sus vértices y viceversa. Por lo tanto, un simplex ‘‘geométrico’’ (es decir la cápsula convexa de un conjunto

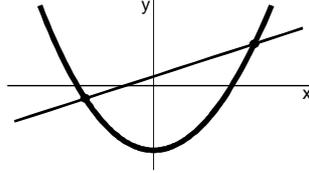


Figura 1.6: Los puntos del gráfico de $f(x) = x^2$ están en posición general en \mathbb{R}^2 .

afínmente independiente en algún espacio euclídeo) se corresponde con el conjunto de sus vértices y, por lo tanto, se puede ver como un simplex abstracto (simplemente un conjunto de vértices). Recíprocamente, dado un simplex abstracto, puede asociársele un simplex geométrico en algún espacio euclídeo, eligiendo puntos afínmente independientes y tomando su cápsula convexa. Por supuesto que esta elección no es única, pero es única salvo isomorfismo simplicial (ver la definición más abajo).

Más en general, si K es un complejo simplicial inserto en algún \mathbb{R}^m (con la definición original), determina un complejo simplicial abstracto tomando los vértices de K como conjunto de vértices del complejo abstracto. Recíprocamente, si K es complejo simplicial abstracto (y finito) determina un complejo simplicial “geométrico” de la siguiente manera: si n es la dimensión de K , elegimos un conjunto de puntos (uno por cada vértice de K) en posición general en \mathbb{R}^m , con $m \geq 2n + 1$, y definimos por cada simplex abstracto de K el simplex geométrico que se obtiene tomando la cápsula convexa de los puntos correspondientes al simplex. Por supuesto que la elección no es única, pero es única salvo isomorfismo simplicial. Este complejo geométrico (inserto en \mathbb{R}^m) se llama la *realización geométrica* de K . De hecho, también denominamos realización geométrica de K al espacio asociado (visto como subespacio métrico de \mathbb{R}^m) y lo seguimos denotando $|K|$. Es importante remarcar la diferencia entre K y $|K|$. El primero es un complejo simplicial (abstracto o geométrico), es decir una colección de símplices. El segundo es la unión de esos símplices (visto como un subespacio de \mathbb{R}^m). Al complejo simplicial K se lo llama una *triangulación* de $|K|$. Dos complejos simpliciales muy distintos pueden dar lugar a la misma realización como espacio, es decir $|K| = |L|$. Esto se estudiará en la próxima sección sobre subdivisiones.

Por estas construcciones, se identifican ambas nociones de complejos simpliciales y se trabaja con una u otra noción indistintamente. Dejamos a cargo del lector probar la construcción que lleva un complejo simplicial abstracto a uno geométrico. Concretamente:

Teorema 1.3.3. *Un complejo simplicial (abstracto) K de dimensión n tiene una realización geométrica en \mathbb{R}^{2n+1} .*

Además $|K|$ resulta compacto y, por lo tanto, cerrado en \mathbb{R}^m (recordar que estamos solamente considerando complejos simpliciales finitos). Más aún, si $L < K$ entonces $|L| \subseteq |K|$ es cerrado.

Definición 1.3.4. Un *morfismo simplicial* $f : K \rightarrow L$ es una función de conjuntos entre los conjuntos de vértices tal que, si $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\}$ es simplex de K , entonces $f(\sigma) = \{f(v_0), \dots, f(v_k)\}$ es simplex en L (posiblemente de dimensión menor).

Definición 1.3.5. Un morfismo simplicial $f : K \rightarrow L$ determina una función lineal a trozos (y por lo tanto continua) entre las realizaciones geométricas $|f| : |K| \rightarrow |L|$:

$$|f|\left(\sum_{i=0}^r t_i v_i\right) = \sum_{i=0}^r t_i f(v_i)$$

(recordar que todo elemento de $|K|$ se escribe en forma única como $\sum_{i=1}^r t_i v_i$ con $\sigma = \{v_0, \dots, v_r\}$, $t_i > 0$ y $\sum_{i=1}^r t_i = 1$). Se llama la *realización geométrica* de f .

Definición 1.3.6. Un *isomorfismo simplicial* es un morfismo simplicial $f : K \rightarrow L$ que es biyectivo en los vértices y tal que la función inversa $f^{-1} : L \rightarrow K$ también es simplicial.

Por ejemplo el morfismo simplicial que incluye el borde de un k -simplex en el k -simplex no es isomorfismo simplicial (aunque es biyección en los vértices) porque la inversa no es simplicial.

EJERCICIO 1.3.7. Probar que la composición de morfismos simpliciales es un morfismo simplicial y que la identidad es un morfismo simplicial.

Para terminar esta sección, definimos la noción de poliedro:

Definición 1.3.8. Un *poliedro* es un espacio topológico (un subconjunto de algún \mathbb{R}^n) que es homeomorfo a la realización geométrica de un complejo simplicial.

Por ejemplo, las bolas, esferas, toro y en general, cualquier variedad diferenciable y compacta es un poliedro (compacto). Un poliedro admite generalmente infinitas triangulaciones distintas (ver la próxima sección sobre subdivisiones)

1.4. Subdivisiones

Para estudiar un poliedro, se necesita contar con diferentes triangulaciones del mismo. Más aún, dada una triangulación del poliedro por un complejo simplicial K , es necesario reemplazar a veces a K por otro complejo simplicial (que será una subdivisión de K). Esto se debe a que, al pasar de lo topológico (continuo) a lo combinatorio (finito y discreto), los objetos se hacen muy rígidos y es necesario dar cierta flexibilidad que viene de la mano de las subdivisiones.

Antes de definir el concepto de subdivisión, necesitamos introducir una operación muy importante en complejos simpliciales que se llama *join*.

Definición 1.4.1. Sean σ_1 y σ_2 dos símplices disjuntos. Definimos el *join* $\sigma_1\sigma_2$ de σ_1 con σ_2 como el simplex cuyo conjunto de vértices es la unión de los vértices de σ_1 y de σ_2 . Esto es, si $\sigma_1 = \{v_0, \dots, v_k\}$ y $\sigma_2 = \{w_0, \dots, w_t\}$ entonces $\sigma_1\sigma_2 = \{v_0, \dots, v_k, w_0, \dots, w_t\}$.

Notar que $\dim(\sigma\tau) = \dim(\sigma) + \dim(\tau) + 1$. Al join $v\sigma$ de un simplex σ con un vértice v se lo llama *cono de σ* (con vértice v). La siguiente figura muestra algunos ejemplos de joins de símplices.

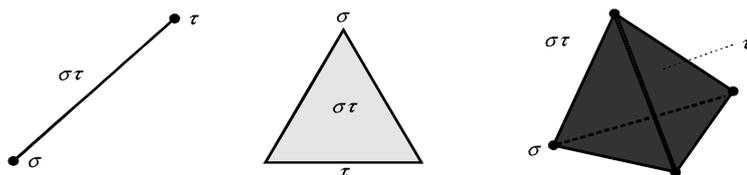


Figura 1.7: El join de varios símplices.

Podemos también definir el join de complejos simpliciales.

Definición 1.4.2. El *join* de dos complejos simpliciales disjuntos K y L es el complejo $KL = \{\sigma\tau \mid \sigma \in K, \tau \in L\} \cup K \cup L$. Notar que, por definición, $K, L < KL$. En algunos casos necesitaremos hacer el join con un complejo simplicial vacío: si K es vacío, definimos $KL = L$.

Definición 1.4.3. Dado un simplex $\sigma \in K$ definimos el *link de σ en K* como el subcomplejo formado por los simplices τ de K independientes con σ (es decir, disjuntos de σ) tales que $\sigma\tau \in K$; esto es, es el subcomplejo $lk(\sigma, K) = \{\tau \in K \mid \tau \cap \sigma = \emptyset \text{ y } \sigma\tau \in K\}$. Notar que el link puede ser vacío. El *star de σ en K* es el subcomplejo $st(\sigma, K) = \sigma lk(\sigma, K)$. Notar que $lk(\sigma, K) < st(\sigma, K)$ y que $st(\sigma, K)$ está generado por los simplices de K que contienen al simplex σ . Es decir, es la unión de todos los simplices que lo contienen más sus caras.

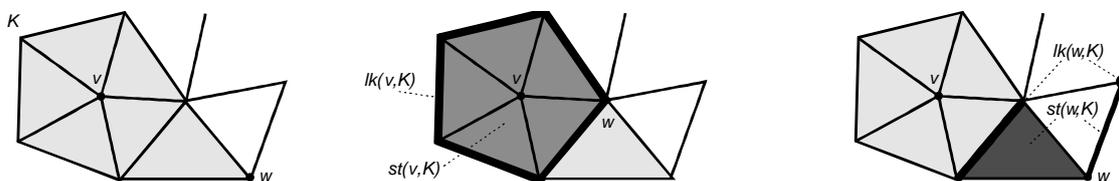


Figura 1.8: Ejemplos de links y stars.

EJERCICIO 1.4.4. Probar que, efectivamente, el link y el star de un simplex son complejos simpliciales.

Notación. Dados dos complejos simpliciales K y L (disjuntos o no), notaremos con $K + L$ a la unión, es decir al complejo simplicial cuyos simplices son los de K o los de L (o de ambos).

EJERCICIO 1.4.5. Mostrar que si Q_σ es el complejo complementario de un simplex σ en K entonces $K = st(\sigma, K) + Q_\sigma$. Además se tiene que $st(\sigma, K) \cap Q_\sigma = \partial lk(\sigma, K)$.

Definición 1.4.6. Sea K un complejo simplicial con una realización geométrica $|K| \subset \mathbb{R}^n$. Una *subdivisión* de K es un complejo simplicial L junto con una realización geométrica $|L| \subset \mathbb{R}^n$ tal que

- (i) para todo simplex $\sigma \in L$ existe un simplex $\tau \in K$ tal que $|\sigma| \subset |\tau|$;
- (ii) para todo simplex $\tau \in K$, $|\tau|$ es unión finita de simplices de L .

Notar que de la definición se desprende que $|K| = |L|$. Notar también que la definición de subdivisión de K depende de la realización $|K|$ elegida.

Si bien la definición de subdivisión es presentada como una relación entre complejos simpliciales, el concepto surge para estudiar los distintos *refinamientos* que podemos aplicarle a una realización geométrica dada. Es con esto en mente que nuestro estudio de las subdivisiones de los complejos simpliciales se apoyará en la geometría de los poliedros en lugar de la estructura combinatoria de los complejos. Aunque no lo aclaremos explícitamente, en muchos de los resultados que siguen estaremos considerando a los complejos simpliciales con una realización geométrica fija en \mathbb{R}^n .

Proposición 1.4.7. Sea K un complejo simplicial finito y L una subdivisión de K . Entonces, se tiene



Figura 1.9: L es una subdivisión de K .

- (i) Los vértices de $|K|$ son vértices de $|L|$.
- (ii) Cualquier subdivisión de L es también una subdivisión de K .

Demostración. (ii) es inmediata de la definición. Para (i) tomemos $v \in V_K$ y veamos que está en V_L . Como $v \in |K| = |L|$ entonces existe un único $\sigma \in L$ tal que $v \in \sigma^\circ$. Como L es subdivisión de K entonces existe un $\tau \in K$ tal que $|\sigma| \subset |\tau|$. Si tomamos τ de dimensión mínima verificando esto entonces $\sigma^\circ \subset \tau^\circ$. Pero entonces $v \in \tau^\circ$. Como $v, \tau \in K$ esto implica que $v = \tau^\circ$. Luego, $v \in |\sigma| \subset |\tau| = v$, de donde, $v \in |V_L|$. \square

Existen dos tipos de subdivisiones que cobran especial importancia en la teoría de complejos simpliciales: las subdivisiones derivadas y las subdivisiones estelares. Las introducimos a continuación. En general, cuando hablemos de subdivisión de un complejo simplicial K sin importar qué tipo de subdivisión sea (derivada, estelar o arbitraria) la denotaremos αK o βK .

Definición 1.4.8. Sea $K = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, donde los σ_i son todos los símplexes de K . Tomemos un punto $a_i \in \sigma_i^\circ \subset |\sigma_i|$, para cara $i = 1, \dots, n$. La *primera subdivisión derivada* de K (respecto de los $\{a_i\}$) es el complejo con vértices a_i y símplexes $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ para $\sigma_{i_1} < \sigma_{i_2} < \dots < \sigma_{i_k}$. La denotamos $\delta^1 K$. La n -ésima subdivisión derivada de K se define inductivamente y se nota $\delta^n K = \delta^1(\delta^{n-1} K)$.

Una subdivisión derivada arbitraria será notada por δK y dos subdivisiones derivadas de un mismo complejo K por $\delta_1 K$ y $\delta_2 K$. Un caso particular es cuando los puntos $a_i \in \overset{\circ}{\sigma}_i$ son los baricentros $\hat{\sigma}_i$ de $|\sigma_i|$. El baricentro de un simplex es el punto que tiene todas sus coordenadas baricéntricas iguales. En este caso la subdivisión derivada se llama subdivisión baricéntrica y se denota K' .

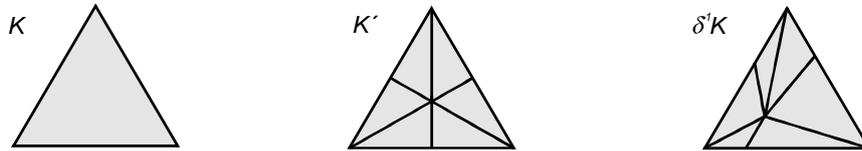


Figura 1.10: Subdivisión baricéntrica y derivada del 2-simplex.

Observación 1.4.9. Podemos dar una descripción completamente combinatoria de subdivisión baricéntrica. En efecto, con las notaciones de la Definición 1.4.8, la *subdivisión baricéntrica de K* es el complejo $\delta^1 K$ con conjunto de vértices $V_{\delta^1 K} = S_K$ y conjunto de símplexes $S_{\delta^1 K} = \{\{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k}\} \mid \sigma_{i_1} < \sigma_{i_2} < \dots < \sigma_{i_k}\}$. La n -ésima subdivisión baricéntrica de K se define inductivamente de manera análoga.

Definición 1.4.10. Sea K un complejo simplicial y $\sigma \in K$ un simplex. Tomemos $a \in \sigma^\circ$ cualquiera. Un *starring elemental* (σ, a) es la operación que transforma K en $(\sigma, a)K$ removiendo $st(\sigma, K)$ y reemplazándolo por $a \dot{\sigma} lk(\sigma, K)$. Más formalmente, escribiendo $K = st(\sigma, K) + Q_\sigma$, donde Q_σ es el complejo complementario a σ en K , se tiene

$$(\sigma, a)K = a \dot{\sigma} lk(\sigma, K) + Q_\sigma.$$

Esta operación se nota $K \xrightarrow{(\sigma, a)} (\sigma, a)K$.

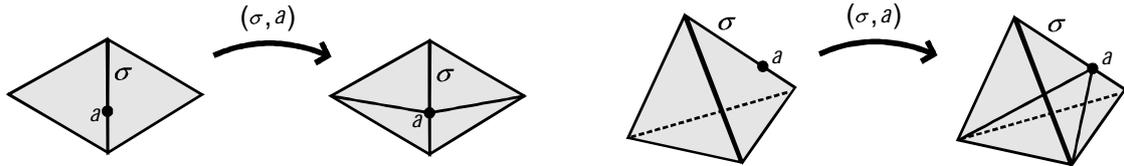


Figura 1.11: Starring elemental.

Observación 1.4.11. Observar que la descripción combinatoria del concepto de starring elemental consiste en agregar un vértice nuevo a K (que representa $a \in \sigma^\circ$ en la Definición 1.4.10) y reemplazar los simplices de $st(\sigma, K)$ por los de $a \dot{\sigma} lk(\sigma, K)$, para un σ elegido. No es difícil probar que el resultado de un starring elemental es una subdivisión del complejo original.

Definición 1.4.12. Una *subdivisión estelar*, denotada sK , es una subdivisión de K obtenida a través de una sucesión finita de starrings elementales.

EJEMPLO 1.4.13. La siguiente subdivisión de Δ^2 no es estelar pero es isomorfa a una subdivisión estelar.

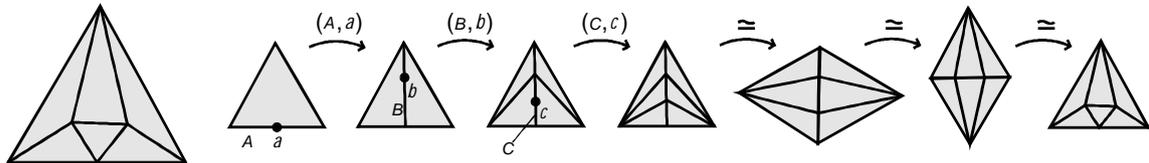


Figura 1.12: Subdivisión isomorfa a una subdivisión estelar.

EJEMPLO 1.4.14. La siguiente subdivisión de Δ^2 no es isomorfa a ninguna subdivisión estelar.

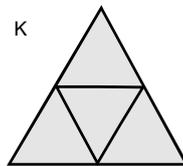


Figura 1.13: Subdivisión no isomorfa a una subdivisión estelar.

Para verlo simplemente notar que si fuera estelar entonces el último vértice introducido en el borde debe ser cara de exactamente tres 1-simplices. Ningún vértice de K verifica esto.

Si bien hemos definido las subdivisiones derivadas y las estelares por separado sucede en realidad que las primeras son un caso particular de las últimas.

Proposición 1.4.15. *Toda subdivisión derivada es estelar.*

La demostración no es complicada pero sí bastante técnica. La idea es como sigue. Si $a_i \in \sigma_i$ son los puntos elegidos en el interior de los símlices del complejo para llevar a cabo la primera subdivisión derivada entonces se realizan primero los starring elementales (σ_i, a_i) para todos los símlices σ_i de máxima dimensión. Luego, se continúa con los de una dimensión menor y, de esta manera, hasta acabar con todos los símlices del complejo. No es difícil de ver que esta subdivisión estelar coincide con la subdivisión derivada original. La Figura 1.14 muestra cómo se realiza este procedimiento. La demostración se concluye finalmente por inducción en la cantidad de subdivisiones derivadas aplicadas al complejo. Una demostración formal puede encontrarse en [Sir]. En particular, como las subdivisiones estelares son subdivisiones, concluimos que las subdivisiones derivadas también son subdivisiones.

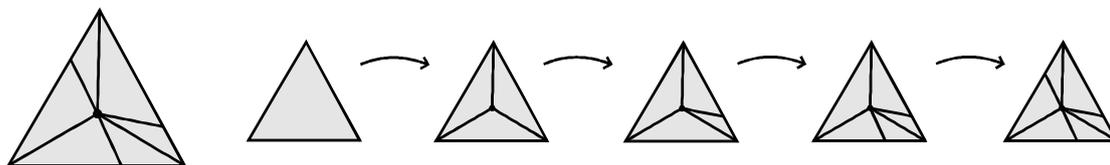


Figura 1.14: Idea de la demostración de la Proposición 1.4.15.

Proposición 1.4.16. *Sea L un subcomplejo de K . Entonces*

- (i) *Toda subdivisión αK induce una subdivisión αL*
- (ii) *Toda subdivisión βL puede extenderse a una βK .*

Más aún, si la subdivisión βL es estelar, entonces βK también lo es.

Demostración. Para (i) definamos $\alpha L = \{\sigma \in \alpha K \mid |\sigma| \subset |L|\}$. Es inmediato de la definición que αL es un subcomplejo de αK . Consideremos la realización geométrica de αL inducida por la realización geométrica de αK (esto es, realizamos los símlices de αL solamente). Es claro que $|\alpha L| \subset |L|$. Por otro lado, si $x \in |L| \subset |K| = |\alpha K|$ entonces existe un único $\tau \in \alpha K$ tal que $x \in \tau^\circ$. Afirmamos que $\tau \in \alpha L$. En efecto, sabemos que existe $\tau' \in K$ con $|\tau| \subset |\tau'|$ (simplemente por definición de subdivisión). Afirmamos que si tomamos τ' de dimensión mínima entonces tendremos $x \in \tau'^\circ$. Para ver esto, sea $\tau = \{v_i\}_i$ y $\tau' = \{w_j\}_j$. Como $x \in \tau^\circ$ entonces $x = \sum_i \lambda_i v_i$ con $\lambda_i > 0$ y $\sum_i \lambda_i = 1$. Como $|\tau| \subset |\tau'|$ entonces podemos escribir $v_i = \sum_j \gamma_{ij} w_j$, con γ_{ij} no todos cero para cada j fijo y $\sum_j \gamma_{ij} = 1$ para todo i fijo. Hallamos entonces que

$$x = \sum_i \lambda_i \left(\sum_j \gamma_{ij} w_j \right) = \sum_j \left(\sum_i \lambda_i \gamma_{ij} \right) w_j.$$

Además, $\sum_i \lambda_i \gamma_{ij} > 0$ pues $\lambda_i > 0$ para todo i y, para cada j , existe un $\gamma_{ij} > 0$. Esto prueba que $x \in \tau'^\circ$. Como $x \in |L|$ esto implica que $\tau' \in L$. Luego, $|\tau| \subset |\tau'| \subset |L|$; de donde $\tau \in \alpha L$. Esto prueba que $x \in |\alpha L|$ y, por lo tanto, $|\alpha L| = |L|$.

Finalmente, debemos ver que todo simplex de $|\alpha L|$ está contenido en un simplex de $|L|$. Sea entonces $\sigma \in \alpha L$. Luego, $\sigma \in \alpha K$ y $|\sigma| \subset |L|$. En particular, $|\sigma| \subset |\tau|$ para cierto $\tau \in K$. Luego, $|\sigma| \subset |L| \cap |\tau| = |L \cap \tau|$. Como L es complejo entonces $L \cap \tau$ es un simplex de L (notar que no es vacío). Esto concluye la demostración de (i).

Para (ii) hacemos inducción en el número r de simplices en $K - L$. Si $r = 0$ entonces $K = L$ y el resultado es inmediato. Supongamos que el resultado vale para cualquier complejo que tenga $r - 1$ simplices que no estén en L y sea K un complejo con r simplices en $K - L$. Escribamos $K = K_0 + \sigma$ donde σ es un simplex de máxima dimensión en $K - L$ y $K_0 = K - \{\sigma\}$; notar que la maximalidad de σ asegura que K_0 sea un complejo. Podemos entonces usar la hipótesis inductiva en K_0 y extender βL a βK_0 . Ahora, tenemos inducido $\beta \dot{\sigma}$ en βK_0 ; definiendo entonces $\beta K = \beta K_0 + \hat{\sigma} \cdot (\beta \dot{\sigma})$ obtenemos el resultado buscado ($\hat{\sigma}$ representa el baricentro de σ).



Figura 1.15: Extendiendo una subdivisión.

Finalmente, si βL es una subdivisión estelar, como $\hat{\sigma}(\beta \dot{\sigma})$ es también una subdivisión estelar de σ , entonces podemos suponer inductivamente que βK_0 es estelar y, por lo tanto, también lo es βK . \square

Observación 1.4.17. Si K es un complejo y $x \in |K|$, podemos encontrar una subdivisión α de K de manera que x pase a ser un vértice de αK . En efecto, sólo hay que realizar un starring elemental (σ, x) si $x \in \sigma^\circ$. Diremos que en este caso hemos *subdividido* K *agregándole un vértice en* x y lo notaremos K_x .

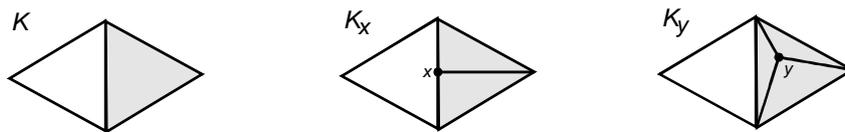


Figura 1.16: Agregando un vértice a K .

Para ciertos resultados que probaremos necesitamos una introducción de una generalización del concepto de complejo simplicial, los complejos de celdas lineales convexas. Veremos que, dados dos complejos simpliciales K y L con realizaciones geométricas $|L|, |K| \subset \mathbb{R}^n$, no hay una triangulación natural de $|K| \cap |L|$ por un complejo simplicial, pero sí como un complejo de celdas lineales convexas. Llamaremos celda de dimensión n (o n -celda) a un subconjunto de \mathbb{R}^m homeomorfo al disco cerrado unitario D^n .

Definimos lo que es una k -celda lineal convexa en \mathbb{R}^n por inducción en la dimensión $k \leq n$. En dimensión cero es un punto. En dimensión $k > 0$ es una celda compacta y convexa de \mathbb{R}^n de dimensión k cuyo borde es una unión finita no vacía de $(k - 1)$ -celdas lineales convexas con interiores disjuntos. Si C es una k -celda lineal convexa en el borde de

una n -celda lineal convexa D , decimos que C es *cara* de D y lo notamos $C < D$. Llamamos *vértices* a la celdas lineales convexas de dimensión 0.

Definición 1.4.18. Un *complejo de celdas lineales convexas* M es una colección finita de celdas lineales convexas tales que

- (i) Si C está en M entonces todas las caras de C están en M .
- (ii) Si $C, D \in M$ entonces $C \cap D = \emptyset$ o es cara de ambos.

Si M es un complejo de celdas lineales convexas elijamos para cada $C \in M$ un punto $c \in \text{int}(C)$ y definamos la primera subdivisión derivada de M como hicimos para complejos simpliciales (Figura 1.17). Tenemos el siguiente resultado.

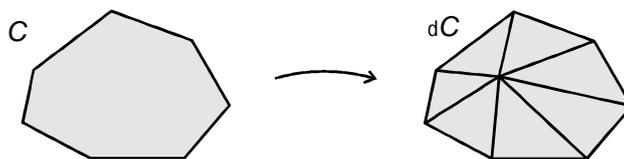


Figura 1.17: Subdivisión derivada de un complejo de celdas lineales convexas.

Lema 1.4.19. La primer subdivisión derivada de un complejo de celdas lineales convexas es un complejo simplicial.

Demostración. Lo hacemos por inducción en la dimensión k del complejo de celdas lineales convexas. Si $k = 0$ el complejo es un conjunto finito de puntos y no hay nada que probar. Si $k = 1$ entonces el complejo ya es un 1-complejo simplicial y las subdivisiones derivadas coinciden. Para $k \geq 2$ consideremos una k -celda C del complejo. Entonces el borde de esta celda es un complejo N de dimensión $k - 1$ y, por hipótesis inductiva, la subdivisión derivada inducida en N es un complejo simplicial. Para concluir la demostración sólo debemos notar que la subdivisión derivada de nuestra k -celda es exactamente $c.N$, donde $c \in C$ es el punto elegido en el interior de C para realizar la subdivisión. Haciendo este razonamiento para las finitas celdas del complejo de celdas lineales convexas obtenemos el resultado. \square

Teorema 1.4.20. Si K y L son complejos realizados geoméricamente en \mathbb{R}^n tales que $|L| \subset |K|$ entonces existe una subdivisión derivada δK que contiene una subdivisión αL como subcomplejo.

Demostración. Antes de comenzar notemos que podemos suponer que hay un vértice $v \in |L|$ que también es vértice de $|K|$. Si así no fuera, para un vértice $w \in |L|$ cualquiera y el simplex $\nu \in |K|$ tal que $w \in \nu^\circ$, realizamos la primera subdivisión derivada en K relativa a los puntos $\{w\} \cup \{\hat{\sigma} \mid \sigma \in K - \{\nu\}\}$. Este nuevo complejo verifica las mismas hipótesis que K y comparte un vértice con L . Podemos entonces suponer que K ya verificaba esta propiedad. Pongamos $L = \{\sigma_i\}$ y ordenemos los símlices de L de manera de que $\dim(\sigma_i) \leq \dim(\sigma_j)$ si $i \leq j$ con la única restricción que σ_0 sea un vértice en $|L| \cap |K|$. Definamos entonces $L_i = \bigcup_{j \leq i} \sigma_j$. Es claro que los L_i son subcomplejos de L . Además, K contiene a L_0 como subcomplejo. Supongamos inductivamente que existe una $(i - 1)$ -derivada $\delta^{i-1}K$ que contiene una subdivisión $\alpha_{i-1}L_{i-1}$ como subcomplejo (notar que el caso $i = 1$ es exactamente el que corresponde a K y L_0). Ahora, para cada simplex τ_j de $\delta^{i-1}K$ elegimos $a_j \in \tau_j^\circ$ de la siguiente manera:

- $a_j \in \tau_j^\circ \cap |\sigma_i|$ si $\tau_j^\circ \cap |\sigma_i| \neq \emptyset$
- $a_j = \widehat{\tau}_j$ si no.

Esto nos da una i -derivada $\delta^i K = \delta^1(\delta^{i-1}K)$. Vamos a probar que $\delta^i K$ contiene una subdivisión de L_i como subcomplejo. Ahora, $\delta^{i-1}K \cap \dot{\sigma}_i$ es una subdivisión de $\dot{\sigma}_i$; pero como todas las caras de σ_i están en L_{i-1} pues, por construcción, aquí ya están todos los símlices de dimensión menor que $\dim(\sigma_i)$, entonces la subdivisión de $\dot{\sigma}_i$ inducida por $\delta^{i-1}K$ coincide con la inducida por $\alpha_{i-1}L_{i-1}$ (por hipótesis tenemos que $\alpha_{i-1}L_{i-1} \subset \delta^{i-1}K$ es subcomplejo). Notemos a continuación que $M = |\delta^{i-1}K| \cap |\sigma_i|$ resulta un complejo de celdas lineales convexas. En efecto, esta subdivisión de K divide al simplex $|\sigma_i|$ en celdas lineales convexas que se pegan bien pues δ^{i-1} es una subdivisión simplicial. Ahora, por cada celda en $|\delta^{i-1}K| \cap |\sigma_i|$ habíamos elegido un punto en su interior (los a_j) y realizando la primera subdivisión derivada de M obtenemos un complejo simplicial (por el Lema 1.4.19). Más aún, como los puntos elegidos para realizar esta subdivisión en M son los mismos utilizados para obtener la subdivisión $\delta^i K$ debemos tener que $\delta(\delta^{i-1}K \cap \sigma_i) \subset \delta^i K$. Definamos entonces $\alpha_i L_i = \delta(\alpha_{i-1}L_{i-1}) + \delta(\delta^{i-1}K \cap \sigma_i)$, el cual resulta un subcomplejo de $\delta^i K$. Siguiendo inductivamente hasta agotar todos los símlices σ_i de L obtenemos el resultado. \square

Corolario 1.4.21. *Si K y L son complejos simpliciales con realizaciones geométricas $|K|, |L| \subset \mathbb{R}^n$ tales que $|K| = |L|$ entonces K y L tienen una subdivisión común (y una de ellas puede tomarse derivada). En particular, si αK es una subdivisión de K entonces existe una subdivisión derivada δ de K y una subdivisión arbitraria β de αK tales que $\delta K = \beta \alpha K$.*

Demostración. Como $|L| \subset |K|$ entonces existen δK y αL tales que αL es subcomplejo de δK . Pero como $|\alpha L| = |\delta K|$ entonces $\alpha L = \delta K$. \square

Definición 1.4.22. Una función continua $f : |K| \rightarrow |L|$ se dice *lineal a trozos* (o *PL*) si existen subdivisiones αK y βL para las cuales f es la realización geométrica de un morfismo simplicial. Es decir, si se tiene un morfismo simplicial $\phi : \alpha K \rightarrow \beta L$ tal que $f = |\phi| : |K| = |\alpha K| \rightarrow |L| = |\beta L|$. Diremos que los complejos simpliciales K y L son *PL-isomorfos*, y lo escribiremos $K \simeq_{PL} L$, si existe un homeomorfismo lineal a trozos f (también llamado *PL-homeomorfismo* o *PL-isomorfismo*) llevando $|K|$ a $|L|$. Esto es, $K \simeq_{PL} L$ si existen subdivisiones αK y βL tales que $\alpha K \simeq \beta L$. En este caso, diremos que K y L son *combinatoriamente equivalentes*.

Por ejemplo, para cualquier subdivisión αK tenemos que las funciones $K \rightarrow \alpha K$ y $\alpha K \rightarrow K$ inducidas por la identidad son *PL-isomorfismos*. Por otro lado, muchas funciones “agradables” no son *PL*. Si $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ es el intervalo unitario y tomamos la proyección no baricéntrica $I \rightarrow I$ desde un punto de afuera como muestra la Figura 1.18 tenemos que no es *PL* pues por más que subdividamos los intervalos no resultará lineal en los símlices de ninguna subdivisión.

Notemos que la noción de equivalencia combinatoria es una relación definida sobre la clase de los complejos simpliciales, aún cuando esté definida por funciones entre sus realizaciones geométricas.

Uno de los problemas más importantes con los que lidió la topología combinatoria fue el de decidir si dos poliedros homeomorfos son *PL-homeomorfos*. Esta conjetura es conocida como *die Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie* (alemán para *conjetura*

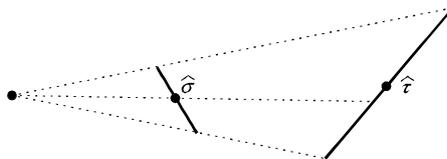


Figura 1.18: Una función que no es lineal a trozos.

principal para la topología combinatoria) y fue formulada por Steinitz y Tietze en 1908. Básicamente, la conjetura afirma que la topología combinatoria de un complejo simplicial K queda determinada por la topología del poliedro $|K|$. O, más técnicamente, dice que dos triangulaciones de un mismo poliedro son combinatoriamente equivalentes; i.e., son isomorfas luego de ser subdivididas.

La *Hauptvermutung* (como es conocida) fue, hasta su resolución, un problema central de la topología geométrica. Inicialmente fue verificada para poliedros de dimensión baja. Sin embargo, en 1961 Milnor construyó poliedros con triangulaciones combinatoriamente no equivalentes, refutando la *Hauptvermutung* en general. Estos poliedros no eran variedades topológicas, dejando abierta la conjetura para dicho tipo de espacios. Finalmente, el desarrollo de la *surgery theory* condujo a una refutación de la *Hauptvermutung* para variedades topológicas de altas dimensiones a finales de 1960. Para más detalles, el lector interesado puede consultar [Ran].

Concluimos nuestra exposición de las propiedades de los poliedros enunciando sin demostración dos teoremas importantes de la topología combinatoria. Ellos muestran el alcance de la aplicación de esta teoría.

Teorema 1.4.23. *Toda variedad diferenciable es triangulable por un complejo simplicial (i.e., es un poliedro).*

Teorema 1.4.24. *Toda variedad topológica de dimensión menor o igual a tres es triangulable.*

Este último teorema fue probado primero por Tibor Radó para superficies en la década del 20 y para 3-variedades por Edwin Moise y R.H. Bing en la década del 50. Para dimensiones mayores a 3, sin embargo, este teorema en general es falso.

Capítulo 2

Variedades Combinatorias

Una clase de objetos topológicos muy relevantes son las variedades topológicas; esto es, espacios que localmente se comportan como el espacio euclídeo n -dimensional. Esta propiedad local permite deducir una inmensa cantidad de propiedades de estos espacios y ha llegado, en los casos de dimensiones bajas, a proveer una clasificación definitiva.

Las variedades combinatorias son los análogos, en el contexto de los complejos simpliciales, a las variedades topológicas. Para ello existe una manera de definir de forma muy concreta una noción de *entorno euclídeo* en el contexto de los complejos simpliciales. En este capítulo nos encargaremos de introducir las definiciones y resultados clásicos de la teoría de variedades combinatorias.

2.1. Variedades combinatorias

Recordemos que si σ es un simplex entonces el complejo formado por todas sus caras propias es un subcomplejo de σ llamado borde de σ y notado $\dot{\sigma}$. Sólo vamos a definir el borde de un complejo simplicial K para el caso en el que este complejo sea homogéneo. Introducimos este concepto en la siguiente

Definición 2.1.1. Un complejo simplicial K se dice *homogéneo* si K es r -dimensional y está formado por r -símplices y sus caras.

Esto es lo mismo que decir todos los símplices maximales de K tienen la misma dimensión. A un complejo homogéneo K de dimensión r lo llamamos también *r -complejo*. Lo notamos, cuando queramos resaltar este hecho, como K^r .

Definición 2.1.2. El *borde* de un r -complejo K es el $(r-1)$ -complejo que se obtiene como la unión módulo 2 de los $(r-1)$ -símplices de K más sus caras. Lo notamos por \dot{K} .

Esto quiere decir que un $(r-1)$ -simplex está en \dot{K} si, y sólo si, es cara de una cantidad impar de r -símplices de K . En particular, si \dot{K} no es vacío, resulta un complejo homogéneo de dimensión $r-1$. Cuando $\dot{K} = \emptyset$ diremos que K no tiene borde. Notar que la noción de borde de un n -simplex coincide con la Definición 2.1.2.

Las propiedades características del borde de un complejo simplicial están contenidas en la siguiente ejercicio.

EJERCICIO 2.1.3. Sea K un complejo simplicial homogéneo. Probar lo siguiente:

- (i) Si $K = LL'$, donde L y L' son homogéneos, entonces $\dot{K} = \dot{L}L' + L\dot{L}'$.

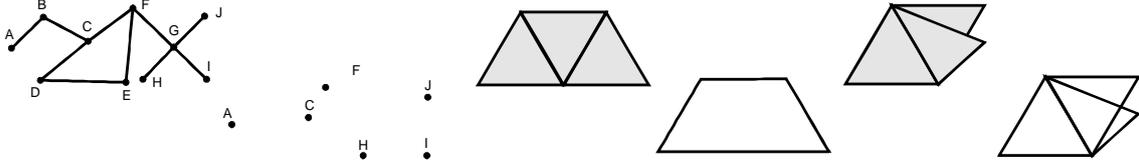


Figura 2.1: Borde de complejos homogéneos.

$$(ii) \ (\dot{K}) = \emptyset$$

$$(iii) \ (\alpha K) = \alpha \dot{K}$$

Observación 2.1.4. Si K es un complejo simplicial sin borde y v es un 0-simplex entonces, por (i) e (ii) del ejercicio anterior, se tiene $(vK) = \dot{v}K + v\dot{K} = K$.

Definición 2.1.5. Sea Δ^n un n -simplex y sea $\dot{\Delta}^{n+1}$ el borde de Δ^{n+1} . Una *bola combinatoria* de dimensión n (o *n-bola combinatoria*) es un complejo PL-isomorfo a Δ^n . Una *esfera combinatoria* de dimensión n (o *n-esfera combinatoria*) es un complejo PL-isomorfo a $\dot{\Delta}^{n+1}$.

Denotaremos B^p a las bolas combinatorias de dimensión p y S^p a las esferas combinatorias de dimensión p .

Lema 2.1.6. Si A, B, C y D son complejos tales que $A \simeq_{PL} C$ y $B \simeq_{PL} D$, entonces $AB \simeq_{PL} CD$.

Demostración. Notemos que nos alcanza con probar que $AB \simeq_{PL} AD$ pues el resultado general se obtiene por conmutatividad cambiando el papel de A por D . Sabemos que existen subdivisiones βB y δD tales que $\beta B = \delta D$. Por lo tanto, $A\beta B = A\delta D$. Si probamos que $A\beta B$ es una subdivisión de AB se tendrá el resultado (pues el mismo resultado se tendrá para $A\delta D$). Probamos entonces que estamos en las condiciones de la Definición 1.4.6. Lo hacemos en dos partes.

(i). Sea $\tau \in A\beta B$ y veamos que $|\tau|$ está contenido en un simplex cerrado de $|AB|$. Se tiene que $\tau = \sigma_A \sigma_{\beta B}$ donde $\sigma_A \in A$ y $\sigma_{\beta B} \in \beta B$. Sea $\sigma_B \in B$ tal que $|\sigma_{\beta B}| \subset |\sigma_B|$. Afirmamos que $|\tau| \subset |\sigma_A \sigma_B|$. Como $\tau = \sigma_A \sigma_{\beta B}$ entonces $\tau = \{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_t\}$, donde $\sigma_A = \{v_1, \dots, v_r\}$ y $\sigma_{\beta B} = \{w_1, \dots, w_t\}$. Si $x \in |\tau|$ entonces se tiene que

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^t \lambda'_j w_j$$

para $\lambda_i, \lambda'_j \geq 0$ y $\sum \lambda_i + \sum \lambda'_j = 1$. Llamemos $\sum \lambda'_j = c$. Si $c = 0$ entonces $x \in |\sigma_A| \subset |\sigma_A \sigma_B|$ y listo. Supongamos $c \neq 0$. Si $\sigma_B = \{u_1, \dots, u_s\}$ entonces, como $|\sigma_{\beta B}| \subset |\sigma_B|$ y $\sum_{j=1}^t \frac{\lambda'_j}{c} w_j$ es una combinación convexa de los vértices de $\sigma_{\beta B}$, se tiene que

$$\sum_{j=1}^t \frac{\lambda'_j}{c} w_j = \sum_{k=1}^s \lambda''_k u_k$$

para ciertos $\lambda''_k \geq 0$ y $\sum \lambda''_k = 1$. Por lo tanto,

$$x = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^t \lambda'_j w_j = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + c \sum_{k=1}^s \lambda''_k u_k.$$

Ahora, como $\sum \lambda_i + c \sum \lambda'_j = \sum \lambda_i + (\sum \lambda'_j)(\sum \lambda''_k) = \sum \lambda_i + \sum \lambda'_j = 1$ entonces $x \in |\sigma_A \sigma_B|$, como se quería probar.

(ii). Veamos que $|A\beta B| = |AB|$. Notemos que del resultado del punto (i) se tiene inmediatamente que $|A\beta B| \subset |AB|$. Para la otra contención, sea $x \in |AB|$. Si $x \in |\tau| \subset |AB|$ y $\tau = \sigma_A \sigma_B$ podemos escribir

$$x = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + \sum_{k=1}^s \lambda''_k u_k$$

donde hemos utilizado las mismas notaciones que en el punto (i). Sea $d = \sum \lambda''_k$. Llamemos $y = \sum \frac{\lambda''_k}{d} u_k$, de manera que $y \in |\sigma_B|$. Como $|\beta B| = |B|$ entonces existe $\sigma_{\beta B} = \{w_1, \dots, w_t\} \in \beta B$ tal que $y = \sum_{j=1}^t \lambda'_j w_j$. Por lo tanto,

$$x = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + dy = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + d \sum_{j=1}^t \lambda'_j w_j.$$

Nuevamente se tiene que $\sum \lambda_i + d \sum \lambda'_j = 1$, por lo que $x \in |\sigma_A| |\sigma_{\beta B}| \subset |A\beta B|$. Esto concluye la demostración. \square

Corolario 2.1.7. Sea B^p una p -bola combinatoria y S^q una q -esfera combinatoria. Entonces

- (i) $B^p B^q$ es una $(p + q + 1)$ -bola combinatoria.
- (ii) $B^p S^q$ es una $(p + q + 1)$ -bola combinatoria.
- (iii) $S^p S^q$ es una $(p + q + 1)$ -esfera combinatoria.

Definición 2.1.8. Sea K un complejo homogéneo de dimensión n . Decimos que un p -simplex $\sigma \in K$ es *regular* en K si $lk(\sigma, K)$ es una $(n - p - 1)$ -esfera combinatoria ó una $(n - p - 1)$ -bola combinatoria.

En particular, un vértice $v \in K$ es regular si $lk(v, K)$ es una $(n - 1)$ -esfera combinatoria ó una $(n - 1)$ -bola combinatoria. Llegamos así a la definición de variedad combinatoria.

Definición 2.1.9. Una n -variedad combinatoria es un complejo simplicial homogéneo de dimensión n en el que todo vértice es regular.

En la siguiente figura exhibimos algunos ejemplos de variedades combinatorias y de complejos que no lo son.

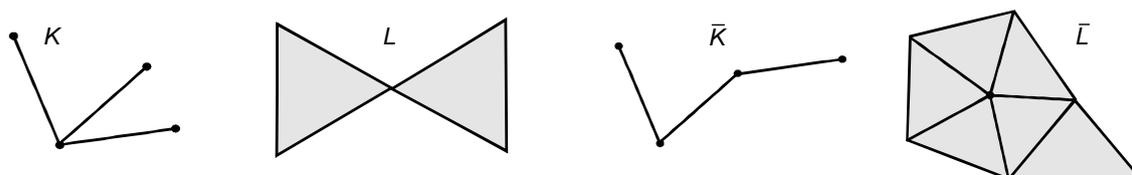


Figura 2.2: Los complejos K y L no son variedades combinatorias. Los complejos \bar{K} y \bar{L} sí (chequear la regularidad de los vértices).

2.2. Propiedades fundamentales

Es un hecho muy interesante que la regularidad de los vértices de un complejo homogéneo es suficiente para garantizar la regularidad de todos los símlices del complejo. Haremos la demostración de este resultado en conjunto con el teorema que establece que los PL-isomorfismos envían una variedad combinatoria en otra. Antes, necesitamos unos resultados previos.

Lema 2.2.1. *Sea K una n -variedad combinatoria tal que todos sus símlices son regulares. Si $(\tau, a)K$ es un starring elemental entonces $(\tau, a)K$ es también una n -variedad combinatoria.*

Demostración. Escribamos $K = \tau lk(\tau, K) + Q_\tau$ y $(\tau, a)K = a\hat{\tau}lk(\tau, K) + Q_\tau$. Veamos primeramente que a es un vértice regular de $(\tau, a)K$. Notar que $lk(a, (\tau, a)K) = \hat{\tau}lk(\tau, K)$. Como por hipótesis τ es regular en K se tiene que $lk(\tau, K)$ es una n -bola combinatoria o una n -esfera combinatoria. Por el Corolario 2.1.7, $\hat{\tau}lk(\tau, K)$ resulta una n -bola combinatoria o una n -esfera combinatoria (pues $\hat{\tau}$ es una esfera combinatoria). Esto prueba que el vértice $a \in (\tau, a)K$ es regular.

Si ahora b es un vértice de $(\tau, a)K$ que no está en τ entonces $lk(b, (\tau, a)K)$ es una subdivisión de $lk(b, K)$ y b resulta regular pues

$$lk(b, (\tau, a)K) \simeq_{PL} lk(b, K) \simeq_{PL} \hat{\Delta}^n \text{ o } \Delta^{n-1}.$$

Finalmente, si $c \in \tau$ es un vértice podemos escribir $\tau = c\tau'$ con τ' el $(n-1)$ -simplex de $\hat{\tau}$ opuesto a c . Notar que los vértices de $lk(c, (\tau, a)K)$ son vértices de $lk(c, K)$ más el vértice a (Figura 2.3). Podemos definir entonces un isomorfismo f entre $lk(c, (\tau, a)K)$ y $(\tau', \hat{\tau}')lk(c, K)$ que envía el punto a a $\hat{\tau}'$ y deja el resto de los vértices fijos (Figura 2.3). Luego, $lk(c, (\tau, a)K) \simeq_{PL} lk(c, K)$ y c es regular.

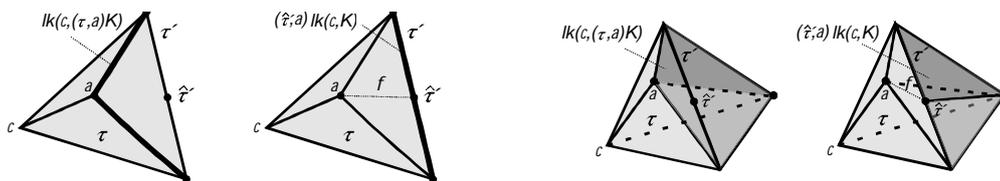


Figura 2.3: El isomorfismo f .

□

Lema 2.2.2. *Sea K un complejo simplicial. Si $\tau = \sigma\sigma' \in K$ entonces*

$$lk(\tau, K) = lk(\sigma, lk(\sigma', K))$$

Demostración. Sea $\nu \in lk(\tau, K)$. Entonces $\nu\tau \in K$. Ahora, $\nu\tau = \nu\sigma\sigma' = (\nu\sigma)\sigma'$. Luego, $(\nu\sigma)\sigma' \in K$, por lo que $\nu\sigma \in lk(\sigma', K)$, de donde $\nu \in lk(\sigma, lk(\sigma', K))$. Para la otra inclusión, sea $\nu \in lk(\sigma, lk(\sigma', K))$. Entonces, $\nu\sigma \in lk(\sigma', K)$, por lo que $\nu\sigma\sigma' \in K$. Luego, $\nu\tau \in K$ y $\nu \in lk(\tau, K)$. □

Teorema 2.2.3. *Sea K una n -variedad combinatoria.*

(i) *Todos los símlices de K son regulares.*

(ii) Si $L \simeq_{PL} K$ entonces L también es una n -variedad combinatoria.

Demostración. Usaremos inducción para probar ambas aseveraciones simultáneamente.

- **Paso 1.** Si (i) es cierto para toda variedad combinatoria de dimensión n entonces también lo es (ii).

Supongamos que $L \simeq_{PL} K$ y K es una n -variedad combinatoria. Existen subdivisiones $\alpha_1 K$ y $\beta_1 L$ tales que $\alpha_1 K = \beta_1 L$. Por el Corolario 1.4.21 existe una subdivisión α_2 de $\alpha_1 K$ y una subdivisión derivada δ tales que $\delta K = \alpha_2 \alpha_1 K$. Como $\alpha_1 K = \beta_1 L$ entonces α_2 induce una subdivisión en $\beta_1 L$, por lo que deducimos que existe una subdivisión βL tal que $\beta L = \delta K$. Ahora, como δ es derivada es, en particular, estelar (Proposición 1.4.15). Por Lema 2.2.1 (aquí usamos que vale (i)), $\beta L = \delta K$ es una n -variedad combinatoria. Sea ahora a un vértice de L ; como también es vértice de βL entonces $lk(a, \beta L)$ es una n -bola combinatoria o una n -esfera combinatoria. Sean c_1, \dots, c_p los vértices de $lk(a, \beta L)$. Consideremos la función baricéntrica $f : |lk(a, \beta L)| \rightarrow |lk(a, L)|$ que envía el punto c_i al punto d_i en donde la recta que pasa por a y c_i interseca a $|lk(a, L)|$ (Figura 2.4). Es fácil ver que f es suryectiva, por lo que resulta un homeomorfismo. En particular, $f(|lk(a, \beta L)|)$ resulta también una realización geométrica de $lk(a, \beta L)$. Como $f(|lk(a, \beta L)|) = |lk(a, L)|$, podemos hallar subdivisiones γ_1 y γ_2 tales que $\gamma_1 lk(a, \beta L) = \gamma_2 lk(a, L)$ (nuevamente por Corolario 1.4.21). Luego, $lk(a, \beta L) \simeq_{PL} \Delta^{n-1}$ o $\dot{\Delta}^{n-1}$ y L resulta una n -variedad combinatoria.

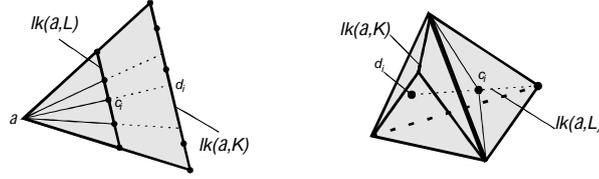


Figura 2.4: La función f .

- **Paso 2.** Si (ii) es cierto para toda variedad combinatoria de dimensión $k \leq n - 1$ entonces (i) es cierto para variedades combinatorias de dimensión n .

Probamos que los símplexes de K son regulares por inducción en su dimensión. Para 0-símplexes, no hay nada que probar (pues ya son regulares por hipótesis). Supongamos que todo $(k - 1)$ -símplex de K es regular (para todo $k \leq p - 1$) y sea τ un p -símplex de K . Escribamos $\tau = v\sigma$ para algún $(p - 1)$ -símplex $\sigma \in K$. Por el Lema 2.2.2, $lk(\tau, K) = lk(v, lk(\sigma, K))$. Por hipótesis inductiva se tiene que $lk(\sigma, K)$ es una bola o esfera combinatoria de dimensión $n - (p - 1) - 1 = n - p$. En cualquier caso, $lk(\sigma, K)$ es PL-isomorfo a una $(n - p)$ -variedad combinatoria. Como (ii) es cierto y $n - p \leq n - 1$ entonces $lk(\sigma, K)$ es una $(n - p)$ -variedad combinatoria, por lo que $lk(v, lk(\sigma, K))$ es una bola o esfera combinatoria de dimensión $n - p - 1$. Esto prueba que σ es regular. \square

Corolario 2.2.4. Todo $(n - 1)$ -símplex de una n -variedad combinatoria M es cara de a lo sumo dos n -símplexes.

Demostración. Por el Teorema 2.2.3, todo $(n - 1)$ -símplex σ es regular, por lo que $lk(\sigma, M) \simeq_{PL} \Delta^0 = \{*\}$ ó $lk(\sigma, M) \simeq_{PL} \dot{\Delta}^1 = \{*, *'\}$. Como Δ^0 y $\dot{\Delta}^1$ son 0-dimensionales, esto equivale a que $lk(\sigma, M) \simeq \Delta^0 = \{*\}$ ó $lk(\sigma, M) \simeq \dot{\Delta}^1 = \{*, *'\}$ y, por lo tanto, $st(\sigma, M)$ consiste en uno ó dos n -símplexes. \square

Observación 2.2.5. Podemos ahora precisar cuando un vértice de una n -variedad combinatoria tiene por link a una esfera combinatoria o a una bola combinatoria. Si $v \in \dot{M}$ entonces existe un $(n-1)$ -simplex $\sigma \in \dot{M}$ con $v \in \sigma$. Si escribimos $\sigma = v\sigma'$ no es difícil de ver que σ' está en el borde de $lk(v, M)$. En efecto, por Corolario 2.2.4, σ es cara de, a lo sumo, dos n -símplices. Como $\sigma \in \dot{M}$ entonces debe ser cara de exactamente uno, τ . Luego, si $\sigma' \prec \tau' \in lk(v, M)$ entonces $\sigma \prec v\tau'$, de donde $\tau' = \tau$. Por lo tanto, $lk(v, M)$ no puede ser una esfera combinatoria (pues su borde no es vacío). Recíprocamente, si $lk(v, M)$ es una bola combinatoria y $\sigma' \in (lk(v, M))^\circ$ entonces $\sigma = v\sigma' \in \dot{M}$. Deducimos entonces que, en un n -variedad combinatoria, un vértice v tiene por link a una esfera combinatoria si $v \notin \dot{M}$ y a una bola combinatoria si $v \in \dot{M}$.

Notemos que, en particular, un $(n-1)$ -simplex $\sigma \in M$ estará en \dot{M} si, y sólo si, σ es cara de exactamente un único n -simplex. Además tenemos

Proposición 2.2.6. *Si M es una n -variedad combinatoria entonces \dot{M} es una $(n-1)$ -variedad combinatoria sin borde.*

Demostración. Sabemos por definición que \dot{M} es un $(n-1)$ -complejo homogéneo. El resultado es inmediato si probamos que $lk(v, \dot{M}) = (lk(v, M))^\circ$ para un vértice $v \in \dot{M}$; pues, en este caso, se tendrá $lk(v, \dot{M}) = (lk(v, M))^\circ = (\Delta^n)^\circ = \dot{\Delta}^{n+1}$.

Si $\sigma \in lk(v, \dot{M})$ es maximal entonces $v\sigma \in \dot{M}$ es un $(n-1)$ -simplex maximal. Por el comentario anterior a la proposición, existe un único $\tau \in M$ tal que $v\sigma \prec \tau$. Se tiene entonces que $\sigma \prec \tau - \{v\} \in lk(v, M)$. Si $\tau' \succ \sigma$ con $\tau' \in lk(v, M)$ entonces $v\sigma \prec v\tau'$ con $v\tau' \in st(v, M)$. Por lo tanto, τ' debe ser $\tau - \{v\}$. Esto prueba que σ sólo es cara de $\tau - \{v\}$ y, por lo tanto, $\sigma \in (lk(v, M))^\circ$.

Si ahora $\sigma \in (lk(v, M))^\circ$ sean $\tau_1, \dots, \tau_r \in lk(v, M)$ todos los $(n-1)$ -símplices tales que $\sigma \prec \tau_i$ (r impar). Entonces, $v\sigma \prec v\tau_i$ para todo i . Si $v\sigma \prec \tau'$ entonces $\sigma \prec \tau' - \{v\}$, por lo que, existe un i_0 con $\tau' - \{v\} = \tau_{i_0}$. Pero entonces, $\tau' = v\tau_{i_0}$. Esto prueba que los únicos n -símplices que contienen a $v\sigma$ como cara inmediata son los $v\tau_i$ ($i = 1, \dots, r$). Como r es impar se tiene entonces que $v\sigma \in \dot{M}$. En particular, $\sigma \in lk(v, M)$. Esto concluye la demostración. \square

Observación 2.2.7. Notemos que si un p -simplex $\sigma \in K$ es regular entonces $st(\sigma, K)$ es una n -bola combinatoria. En efecto, por regularidad se tiene que $lk(\sigma, K)$ es una $(n-p-1)$ -bola combinatoria B^{n-p-1} o una $(n-p-1)$ -esfera combinatoria S^{n-p-1} . En cualquier caso, como $st(\sigma, K) = \sigma lk(\sigma^p, K)$ y σ es una p -bola combinatoria el resultado se sigue del Corolario 2.1.7.

Como último resultado de esta sección mostramos que las variedades combinatorias modelan combinatoriamente a variedades topológicas.

Proposición 2.2.8. *Si M es un n -variedad combinatoria entonces $|M|$ es una n -variedad topológica.*

Demostración. Sea $x \in |M|$. Sea M_x la subdivisión que consiste en agregar a x como vértice. Por el Teorema 2.2.3, M_x resulta una n -variedad combinatoria. Luego $st(x, M_x)$ es una n -bola combinatoria (por observación 2.2.7). En particular, $|st(x, M_x)| = |\Delta^n| \simeq D^n$.

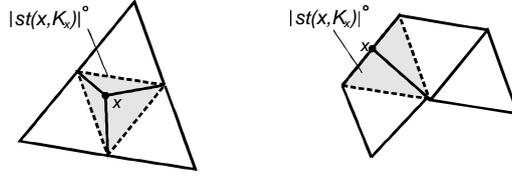


Figura 2.5: Entornos homeomorfos a \mathbb{R}^n y H_+^n según el caso.

Si $x \notin |\dot{M}|$ entonces x está en el interior de $|st(x, M_x)|$, el cual resulta un entorno euclídeo de x . Si $x \in |\dot{M}|$ entonces $|st(x, M_x)|$ resulta un entorno de x en el semiespacio positivo H_+^n de \mathbb{R}^n (Figura 2.5). Luego, $|M|$ es una variedad topológica. \square

Una *PL-variedad de dimensión n* es un poliedro que admite una triangulación por una n -variedad combinatoria. Por la Proposición 2.2.8 se tiene que toda PL-variedad es una variedad topológica. Como resultado de la falsedad de la Hauptvermutung para variedades sabemos que la vuelta no es cierta. Más aún, pueden construirse variedades diferenciables que no son triangulables por una variedad combinatoria, aún cuando toda variedad diferenciable es triangulable por un complejo simplicial [Ran].

2.3. Pseudovariedades

Las variedades combinatorias conexas poseen una característica que en muchos casos es suficiente para llevar a cabo muchas de las demostraciones que involucran este tipo de objetos. Esta característica puede generalizarse a complejos homogéneos en la noción de *pseudovariedad*.

Definición 2.3.1. Un complejo simplicial homogéneo M de dimensión n se dice una n -pseudovariedad si

1. Todo $(n - 1)$ -simplex está contenido en a lo sumo dos n -símplices.
2. Dados dos n -símplices $\sigma, \sigma' \in M$ existe una sucesión de n -símplices

$$\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k = \sigma'$$

tales que σ_i y σ_{i+1} son adyacentes (es decir, $\dim(\sigma_i \cap \sigma_{i+1}) = n - 1$) para todo $i = 0, \dots, k - 1$.

Notemos que la condición 2 determina que una pseudovariedad es un complejo simplicial conexo. También, y como en el caso de las variedades combinatorias, se tiene que el borde de una n -pseudovariedad está generada por todos los $(n - 1)$ -símplices que están contenidos en exactamente un único n -simplex. Mostramos a continuación que toda n -variedad combinatoria conexa es efectivamente una n -pseudovariedad. Antes, un ejercicio.

EJERCICIO 2.3.2. Mostrar que en un complejo simplicial conexo dos vértices cualesquiera pueden unirse por un camino de 1-símplices. Esto es, si K es conexo y $v, w \in K$ entonces existe una sucesión de 1-símplices de K , $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ tales que $v \prec \sigma_1$, $w \prec \sigma_s$ y $\sigma_i \cap \sigma_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \dots, s - 1$.

Proposición 2.3.3. Toda n -variedad combinatoria conexa es una n -pseudovariedad.

Demostración. Ya vimos en el Corolario 2.2.4 que el ítem 1 de la definición de pseudovariedad se cumple. Para probar ítem 2 hacemos inducción en la dimensión de M . Si M es una 0-variedad combinatoria no hay nada que probar y si M es una 1-variedad combinatoria es fácil ver que el resultado es equivalente a la conexidad de M . Supongamos $\dim(M) = n \geq 2$. Por conexidad (y el ejercicio anterior), dados dos vértices de M podemos unirlos por una sucesión de 1-símplices. Para dos n -símplices $\sigma, \sigma' \in M$ consideramos todos las sucesiones de 1-símplices que unen un vértice de σ con uno de σ' . Sean $v \in \sigma$ y $w \in \sigma'$ tales que la sucesión que los une tenga longitud mínima entre todas las sucesiones que unen todos los posibles pares de vértices de σ y σ' . Haremos inducción en la longitud k de esta sucesión. Si $k = 0$ entonces $v = w$ y σ y σ' comparten un vértice. Sean $\nu \prec \sigma$ y $\nu' \prec \sigma'$ tales que $v\nu = \sigma$ y $v\nu' = \sigma'$, de manera que $\nu, \nu' \in lk(v, M)$. Como $\dim(lk(v, M)) = n - 1$ y $n \geq 2$ entonces $lk(v, M)$ es una bola combinatoria conexa o una esfera combinatoria conexa. En cualquier caso, $lk(v, M)$ es una $(n - 1)$ -variedad combinatoria conexa y podemos utilizar nuestra hipótesis inductiva en la dimensión de la variedad combinatoria para hallar una sucesión

$$\nu = \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_s = \nu'$$

de $(n - 1)$ -símplices adyacentes. Pero entonces

$$\sigma = v\nu = v\nu_0, v\nu_1, \dots, v\nu_s = v\nu' = \sigma'$$

resulta una sucesión de n -símplices adyacentes que unen σ con σ' . Esto prueba el caso $k = 0$. El caso general se sigue fácilmente de aquí. En efecto, si $k \geq 1$, consideremos algún 1-simplex que contenga a v como cara. Como M es homogéneo entonces este 1-simplex debe ser cara de un n -simplex τ . Por hipótesis inductiva en k , como σ y τ comparten a v como vértice entonces existe una sucesión

$$\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_l = \tau$$

de n -símplices adyacentes. Por otro lado, si u es la otra cara de este 1-simplex distinta de v entonces podemos unirla con w por un camino de cantidad de aristas menor a $k - 1$. Nuevamente por hipótesis inductiva en k tenemos un camino

$$\tau = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_h = \sigma'$$

de n -símplices adyacentes. Luego

$$\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_l = \tau = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_h = \sigma'$$

es la sucesión buscada y esto prueba el resultado. \square

Para el caso 1-dimensional es sencillo ver que la vuelta también es cierta: una 1-pseudovariedad es necesariamente una variedad combinatoria. Sin embargo, ya para dimensión 2 podemos producir un contraejemplo a esta implicación.

EJEMPLO 2.3.4. La Figura 2.6 muestra un ejemplo de una 2-pseudovariedad que no es una variedad combinatoria. Notar que la realización geométrica de este complejo no determina una variedad topológica, dado que el vértice v no posee el entorno requerido. Se sigue también del hecho que el link del vértice v no es una esfera combinatoria ni una bola combinatoria.

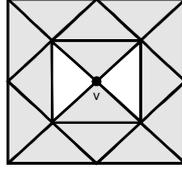


Figura 2.6: Una pseudovariación que no es una variedad topológica.

En este ejemplo la pseudovariación que no es variedad combinatoria posee borde no vacío. Si uno quiere contestar el interrogante de si existe una pseudovariación sin borde que no sea variedad combinatoria uno tiene que lidiar con matemática más compleja. Un contraejemplo en dimensión 3 puede producirse construyendo la suspensión de $SO(3)/A_5$, donde A_5 es el grupo de sesenta simetrías del dodecaedro. El poliedro $SO(3)/A_5$, que es muy frecuentemente usado en topología de bajas dimensiones, es llamado *esfera homológica de Poincaré* y fue de hecho presentado por este matemático como contraejemplo a la primera versión de su célebre conjetura. En dimensión 2 no podemos encontrar contraejemplos:

EJERCICIO 2.3.5. Probar que una 2-pseudovariación finita sin borde es una 2-variedad combinatoria (sin borde).

Capítulo 3

Colapsabilidad

La teoría de homotopía se encarga de clasificar a los espacios topológicos según se puedan deformar unos en otros. Cuando existe una tal deformación se la llama equivalencia homotópica y se dice que los espacios poseen el mismo tipo homotópico. La equivalencia homotópica de los espacios topológicos es uno de los invariantes más importantes de la Topología.

En el contexto de complejos simpliciales existe una teoría de deformación que da lugar a una relación de equivalencia entre los complejos de manera que los poliedros asociados a complejos simpliciales equivalentes tienen el mismo tipo homotópico. Esta teoría está fundamentada en los conceptos de *colapso* y *expansión* de símlices y el invariante topológico que determinan en los poliedros se llama *tipo homotópico simple*.

En la primera parte de este capítulo desarrollamos la teoría básica de colapsabilidad para complejos simpliciales y mostramos que esta relación es más fuerte que la equivalencia homotópica entre los espacios topológicos correspondientes. En la segunda parte enfocaremos la atención a la teoría de colapsabilidad en variedades combinatorias y exhibiremos uno de los teoremas más importantes de la teoría.

Para entender este capítulo, es conveniente que el lector maneje las nociones de espacios contráctiles y retractos por deformación.

3.1. Colapsos simpliciales

Definición 3.1.1. Sea K un complejo simplicial y $\tau \in K$ un simplex. Decimos que una cara propia σ de τ es una *cara libre* si σ no es cara de ningún otro simplex de K .

Notar que si $\sigma < \tau$ es cara libre entonces $\sigma \prec \tau$ (de lo contrario sería cara de una cara inmediata de τ). Además, un simplex con una cara libre es necesariamente maximal. Podemos deducir entonces que si $\sigma \prec \tau$ es una cara libre en K entonces $K - \{\tau, \sigma\}$ es un subcomplejo de K .

Definición 3.1.2. Sea $\sigma \prec \tau$ una cara libre en K y $L = K - \{\tau, \sigma\}$. La operación que transforma K en L se llama *colapso simplicial elemental* y se denota $K \searrow^e L$. Notar que, en este caso, si escribimos $\tau = v\sigma$ para un cierto vértice $v \in K$ entonces se tiene $L \cap \tau = v\sigma$ y $K = L + \tau$.

En pocas palabras, lo que estamos haciendo cuando realizamos un colapso simplicial elemental es remover un simplex maximal junto con una cara libre de este simplex en

el complejo. Es inmediato el hecho que al realizar un colapso simplicial elemental no modificamos el tipo homotópico del poliedro asociado. Más precisamente,

EJERCICIO 3.1.3. Probar que si $K \searrow^e L$ entonces $|L| \subset |K|$ es un retracto por deformación fuerte. (*Sugerencia: deformar $|K|$ en $|L| = |K - \{\tau, \sigma\}|$ llevando τ a v o empujando desde la cara libre σ .*)

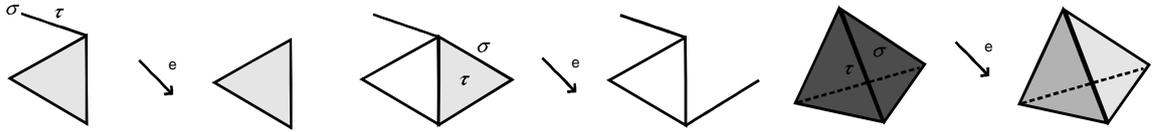


Figura 3.1: Colapsos simpliciales elementales.

La operación opuesta de ir de L a K , denotada $L \nearrow^e K$, se llama una *expansión simplicial elemental*. Esto es, $L \searrow^e K$ si, y sólo si, $L \nearrow^e K$.

Una sucesión finita de colapsos simpliciales elementales $K \searrow^e K_1 \searrow^e \dots \searrow^e K_n = L$ se llama un *colapso simplicial* y se lo nota $K \searrow L$. En este caso diremos que K *colapsa* (simplicialmente) a L o que L se *expande* a K (notado $L \nearrow K$). En particular, si K colapsa a un vértice $v \in K$ decimos que K es *colapsable* y lo notamos $K \searrow 0$.

EJEMPLO 3.1.4. $\Delta^n \searrow 0$. En la Figura 3.2 se puede ver el caso $n = 2$.

EJEMPLO 3.1.5. Cualquiera sea el complejo K , el cono vK es colapsable. Para ver esto comencemos colapsando los símplexes de dimensiones máximas primero (i.e., si $\tau \in K$ es un símplex de dimensión máxima en K entonces en el símplex $v\tau \in vK$, τ es una cara libre y $v\tau \searrow v\dot{\tau}$). Esto deja un cono sobre un complejo de dimensión menor. Repitiendo el argumento de recién hallamos $vK \searrow v$.

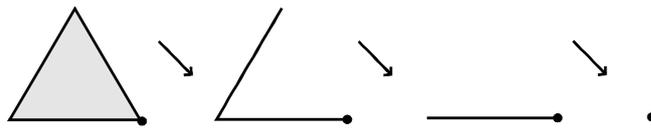


Figura 3.2: Δ^2 colapsando a un vértice.

EJEMPLO 3.1.6. Si $\sigma \in K$ y $v \in \sigma$ entonces $\sigma K \searrow vK$ por el Ejemplo 3.1.5 y un argumento inductivo.

Observación 3.1.7. Observar que del Ejercicio 3.1.3 sabemos que si $K \searrow 0$ entonces $|K|$ es un espacio topológico contráctil.

Supongamos que tenemos un colapso $K \searrow_e K - \{\tau, \sigma\} \searrow_e K - \{\tau, \sigma, \tau', \sigma'\}$ y que $\dim(\tau') > \dim(\tau)$. Afirmamos que σ' es cara libre de τ' en K . En efecto, si $\sigma' \prec \tau''$, como σ' es cara libre de τ' en $K - \{\tau, \sigma\}$ entonces debe ser $\tau'' = \sigma$ o $\tau'' = \tau$. Pero por dimensión la única posibilidad es $\tau'' = \tau'$. Luego, podemos colapsar primero el par $\{\tau', \sigma'\}$ y luego el $\{\tau, \sigma\}$. Se ve, por lo tanto, que siempre podemos reordenar el orden de los colapsos elementales para que primero se colapsen los símplexes de dimensiones mayores.

No es difícil ver que en el caso unidimensional la colapsabilidad y la contractibilidad coinciden.

EJERCICIO 3.1.8. Demostrar que un 1-complejo simplicial conexo K es colapsable si, y sólo si, $|K|$ es contráctil.

EJERCICIO 3.1.9. Un complejo simplicial colapsable colapsa a cualquiera de sus vértices. (*Sugerencia: reordenar los colapsos en orden decreciente de dimensión y colapsar el complejo a un 1-complejo contráctil que contiene todos los vértices del complejo original. Probar que un 1-complejo contráctil colapsa a cualquiera de sus vértices.*)

Para complejos de dimensión mayor a 1 la contractibilidad de $|K|$ no implica la colapsabilidad K . Quizá los dos contraejemplos más famosos de este tema son los dados en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 3.1.10 (Dunce Hat). El poliedro 2-dimensional D conocido como *Dunce Hat* es el complejo formado de la subdivisión de un 2-simplex identificando los 1-símplices del borde orientados como marca la Figura 3.3. Se puede probar que D es contráctil notando que es un retracts por deformación de un cubo. De hecho, no es difícil ver que toda curva en D puede deformarse a un punto. D no es colapsable pues ninguna triangulación de D tiene 1-símplices libres.



Figura 3.3: Dunce hat (identificar los 1-símplices siguiendo en la dirección establecida por las flechas). A la derecha, una triangulación del Dunce hat de 8 vértices y 17 2-símplices (identificar los vértices (y los 1-símplices) con el mismo número).

EJEMPLO 3.1.11 (La casa de dos habitaciones de Bing). La manera más sencilla de describir este 2-complejo es mediante la ilustración de la Figura 3.4. Aquí hemos removido un disco abierto de la base de la casa, un disco abierto del techo, dos discos abiertos del primer piso y hemos agregado dos tubos y dos paredes. Notar que para ingresar a la habitación superior de la casa debemos hacerlo por el tubo de abajo y para ingresar a la habitación inferior, por el tubo de arriba. Este complejo es fácilmente triangulable por un complejo simplicial finito que no es colapsable al no tener 1-símplices libres. Sin embargo, este poliedro es contráctil siendo un retracts por deformación de un cubo.

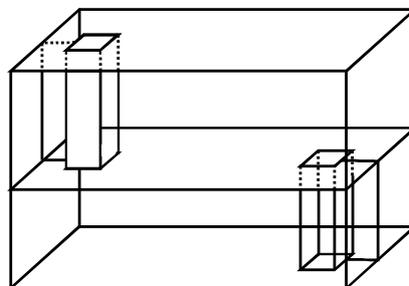


Figura 3.4: La casa de dos habitaciones de Bing

El estudio de 2-complejos contráctiles y su relación con los colapsos conduce a resultados interesantes en la topología combinatoria y está relacionado con muchos problemas

aún abiertos. Quizás el más relevante es la *Conjetura de Zeeman* que afirma que si K es un 2-complejo contráctil entonces $K \times I \searrow 0$. Esto fue conjeturado por E. Zeeman en 1964 [Zee2]. Zeeman demuestra que esta conjetura implica la conjetura (teorema) de Poincaré. A partir de la reciente demostración de la conjetura de Poincaré, es sabido ahora que la conjetura de Zeeman es verdadera para una clase particular de poliedros, pero no se sabe aún si la conjetura es verdadera en general. Para más detalles, puede consultarse [Mil2] o [Rol].

Exhibimos a continuación unos resultados acerca del comportamiento de los colapsos (y expansiones) simpliciales respecto de las subdivisiones del complejo.

Lema 3.1.12. *Supongamos que $K \searrow L$. Entonces para cualquier αL existe βK tal que $\beta K \searrow \alpha L$.*

Demostración. Hacemos la demostración por inducción en la cantidad de colapsos simpliciales elementales del colapso $K \searrow L$. Supongamos primero que $K = L + \tau$ con $\tau = a\sigma$ y $L \cap \tau = a\hat{\sigma}$. Como $a\hat{\sigma} \subset L$ entonces tenemos inducida $\alpha(a\hat{\sigma})$. Sea ahora $\pi : |\tau| \rightarrow |\alpha\hat{\sigma}|$ la proyección que lleva $\hat{\sigma}$ a a . Notemos que $\pi^{-1}(\alpha(a\hat{\sigma}))$ subdivide a $|\tau|$ por medio de la preimagen de los símlices de $\alpha(a\hat{\sigma})$ (Figura 3.5). Se tiene entonces que $\pi^{-1}(\alpha(a\hat{\sigma}))$ genera una subdivisión simplicial en σ y una subdivisión en celdas en τ . Ahora, algunas de estas celdas pueden ser ya símlices y las que no lo son resultan prismas con una base en un simplex de $a\hat{\sigma}$ y la otra en un simplex de σ (ver nuevamente la figura). Podemos fácilmente subdividir estos prismas y obtener una subdivisión de τ coherente con α . Obtenemos entonces una subdivisión βK que colapsa simplicialmente a αL pues los prismas colapsan naturalmente al simplex de su base en $a\hat{\sigma}$.

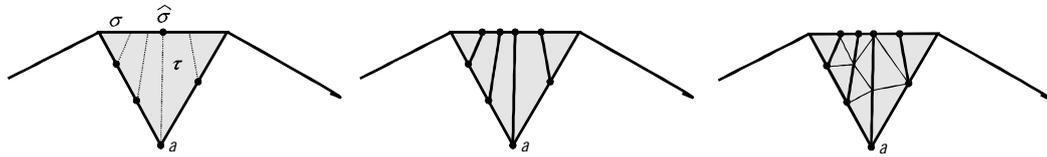


Figura 3.5: La proyección π y la subdivisión de τ .

Supongamos ahora que el colapso $K \searrow L$ involucra más de dos colapsos simpliciales elementales. Factoricemos este colapso en $K \searrow_e K_1 \searrow L$. Por hipótesis inductiva podemos encontrar subdivisiones tales que $\beta_1 K_1 \searrow \alpha L$; utilizando el caso de un colapso elemental para los complejos K y $\beta_1 K_1$ encontramos $\beta K \searrow \beta_1 K_1 \searrow \alpha L$ resuelve la cuestión. \square

Con respecto de las subdivisiones estelares podemos enunciar la siguiente

Proposición 3.1.13. *Sea K un complejo simplicial.*

1. *Si $L \subset K$ es un subcomplejo tal que $K \searrow L$, entonces $sK \searrow sL$.*
2. *sK tiene el mismo tipo homotópico simple que K .*

En particular, el punto (ii) dice que $K^{(n)}$ y $\delta^{(n)}K$ tienen el mismo tipo homotópico simple que K . Esta proposición no será demostrada en estas notas. La demostración del punto (i) puede hallarse en [Gla] y la del punto (ii) en [Sir].

Como fue comentado, la teoría de homotopía simple es una teoría que se propone estudiar el tipo homotópico de los poliedros por medio de los movimientos discretos elementales introducidos anteriormente. La teoría de homotopía simple fue desarrollada por J. H. C. Whitehead entre los años 30 y 50 del siglo pasado y se ha convertido en un pilar fundamental del desarrollo de la topología lineal a trozos.

Definición 3.1.14. Sean K y L dos complejos simpliciales. Decimos que K y L tienen el mismo *tipo homotópico simple* si existe una sucesión de complejos simpliciales

$$K = K_0, K_1, \dots, K_r = L$$

tales que para cada $i = 0, \dots, r - 1$ se tiene que $K_i \nearrow K_{i+1}$ o $K_i \searrow K_{i+1}$.

De acuerdo a la Proposición 3.1.3 se tiene que si K y L tienen el mismo tipo homotópico simple entonces $|K|$ y $|L|$ son homotópicamente equivalentes. La vuelta no es cierta, aunque este resultado es difícil de ver. Por ejemplo, si bien la casa con dos habitaciones de Bing H no es colapsable, se puede probar que $H \nearrow \Delta^2 \times I \searrow *$, por lo que H tiene el mismo tipo homotópico simple que el espacio de un solo punto. J. H. C. Whitehead resolvió este interrogante introduciendo un invariante conocido hoy en día como el *Grupo de Whitehead* y que depende solamente del grupo fundamental del poliedro. Este grupo mide exactamente la obstrucción para que dos poliedros homotópicamente equivalentes tengan el mismo tipo homotópico simple.

3.2. Colapsabilidad en variedades combinatorias

En esta sección vamos a generalizar la noción de colapso simplicial de manera de permitir la remoción de subcomplejos enteros y no solamente de un simplex y una cara libre. Veremos que este nuevo tipo de colapsos, llamados *colapsos geométricos*, permite obtener resultados muy fuertes de la teoría de variedades combinatorias.

Los colapsos geométricos consisten en remociones de subcomplejos que poseen una estructura simplicial agradable en el contexto del complejo simplicial. Más precisamente, cuando se tratan de bolas combinatorias que intersecan al complejo en una bola combinatoria de una dimensión menor.

Definición 3.2.1. Sea K un complejo simplicial. Si $K = K_0 + B^n$, donde K_0 es un subcomplejo de K y B^n es una n -bola combinatoria tal que $B^n \cap K_0 = B^{n-1} \subset \dot{B}^n$, entonces el paso de ir de K a K_0 se llama un *colapso geométrico elemental* y se nota $K \rightarrow_e K_0$.

Como en el caso de los colapsos simpliciales el movimiento inverso a $K \rightarrow_e K_0$ se llama *expansión geométrica elemental* y se nota $K \leftarrow_e K_0$. Una sucesión finita de colapsos geométricos elementales se llama un *colapso geométrico*. Notemos que no se requiere que la dimensión de las bolas combinatorias que se van removiendo en la sucesión de colapsos geométricos elementales permanezca fija (Figura 3.6).

Observación 3.2.2. Un colapso simplicial elemental es un colapso geométrico elemental.

Una relación en el otro sentido está contenida en el siguiente

Teorema 3.2.3. Si $K \rightarrow L$ entonces existe una subdivisión (arbitraria) αK tal que $\alpha K \searrow \alpha L$.

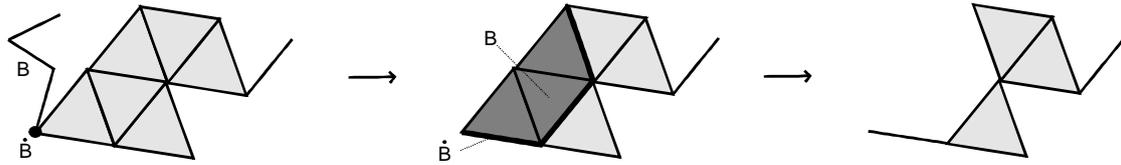


Figura 3.6: Dos colapsos geométricos involucrando bolas combinatorias de diferentes dimensiones.

Demostración. La demostración es por inducción en el número de colapsos geométricos elementales del colapso $K \rightarrow L$. Factoricemos entonces $K \rightarrow L$ como $K \rightarrow_e K_1 \rightarrow L$. Escribamos $K = K_1 + B^n$ donde $K_1 \cap B^n = B^{n-1} \subset \dot{B}^n$. Ahora, como $B^n \simeq_{PL} \Delta^n$ deben existir subdivisiones tales que $\beta B^n = \gamma \Delta^n$. Por el Corolario 1.4.21 deben existir una subdivisión derivada δ y una subdivisión arbitraria γ_2 tales que $\gamma_2 \gamma \Delta^n = \delta \Delta^n$. Luego, $\gamma_2 \beta B^n = \delta \Delta^n$. Como $\delta \Delta^n \searrow \delta \Delta^{n-1}$ (por Proposición 3.1.13) se tiene entonces que $\gamma_2 \beta B^n \searrow \gamma_2 \beta B^{n-1}$. Notemos a la subdivisión $\gamma_2 \beta$ como β_2 , de manera de poder escribir $\beta_2 B^n \searrow \beta_2 B^{n-1}$. Por la Proposición 1.4.16 podemos extender β_2 a todo K ; o sea que queda definida $\beta_2 K_1$. Ahora, $\beta_2 K_1 \rightarrow \beta_2 L$ continúa siendo un colapso geométrico con una movida menos que el colapso original (simplemente subdividimos las celdas del colapso geométrico). Luego, por hipótesis inductiva, existe una subdivisión α_1 tal que $\alpha_1 \beta_2 K_1 \searrow \alpha_1 \beta_2 L$. Ahora, como $B^{n-1} \subset K_1$ queda también subdividido por $\alpha_1 \beta_2$ entonces, por el Lema 3.1.12 aplicado al colapso $\beta_2 B^n \searrow \beta_2 B^{n-1}$ y a la subdivisión α_1 de $\beta_2 B^{n-1}$, tenemos que existe una extensión de α_1 que verifica $\alpha_1 \beta_2 B^n \searrow \alpha_1 \beta_2 B^{n-1}$. Luego, recordando que $K = B^n + K_1$ podemos definir la subdivisión α buscada por $\alpha K = \alpha_1 \beta_2 B^n + \alpha_1 \beta_2 K_1$. Como $\alpha_1 \beta_2 B^n \searrow \alpha_1 \beta_2 B^{n-1} \subset \alpha_1 \beta_2 K_1$ y $\alpha_1 \beta_2 K_1 \searrow \alpha_1 \beta_2 L = \alpha L$ tenemos el resultado. \square

NOTA. Puede probarse de hecho que la subdivisión que convierte el colapso geométrico en simplicial puede tomarse estelar. La demostración de este resultado es un tanto más técnica que la del teorema anterior y puede hallarse en [Gla].

Definición 3.2.4. Si K colapsa geoméricamente a una n -variedad combinatoria M y todos los colapsos geométricos elementales de $K \rightarrow M$ involucran n -bolas combinatorias entonces esta operación se llama *colapso regular*, en cuyo caso decimos que K *colapsa regularmente* a M .

Uno de los resultados fundamentales de la teoría de colapsabilidad en variedades combinatorias es el siguiente

Teorema 3.2.5. *Si $K \rightarrow M$ regularmente entonces $K \simeq_{PL} M$. En particular, K resulta también una n -variedad combinatoria.*

En otras palabras, este teorema dice que realizar una expansión regular a una variedad combinatoria deja como resultado una variedad combinatoria. La demostración de este teorema es altamente no trivial y puede consultarse en [Gla] o [Lic]. A partir de este resultado, se deduce el siguiente teorema de Whitehead, que es uno de los resultados más importantes de esta teoría.

Teorema 3.2.6. *Si M es una n -variedad combinatoria colapsable, entonces es una n -bola combinatoria.*

A partir de este teorema de Whitehead se deduce, entre otras cosas, que la conjetura de Zeeman implica la conjetura de Poincaré. La demostración de este resultado puede encontrarse en [Gla].

Dejamos como último ejercicio de la sección otro resultado de colapsabilidad para las variedades combinatorias: la existencia de *spines*.

EJERCICIO 3.2.7. Sea M una n -variedad combinatoria tal que $\dot{M} \neq \emptyset$. Entonces $M \searrow L$, donde L es un subcomplejo de M de dimensión menor o igual a $n - 1$.

En vista de este resultado, un subcomplejo de una variedad combinatoria M (con borde) tal que $M \searrow L$ y $\dim(L) < \dim(M)$ se llama un *spine* de M .

Capítulo 4

Teoría de Morse discreta

La teoría de Morse (clásica) fue desarrollada por M. Morse en los años 20 y es una de las más poderosas herramientas de la topología diferencial. Esta teoría provee una relación fundamental entre el análisis y la topología que acarrea grandes consecuencias en el estudio de las propiedades topológicas de las variedades diferenciales. Entre los resultados más importantes que fueron fruto de su maquinaria se cuenta el Teorema de h -cobordismo (que desprende como corolario la conjetura de Poincaré para $n \geq 5$), el Teorema de Periodicidad de Bott y el desarrollo de la K -teoría.

Sintéticamente, los teoremas principales de la teoría de Morse establecen la relación entre la topología de una variedad diferenciable y ciertas funciones diferenciables que pueden definirse sobre ella. Concretamente una función de Morse permite relacionar la variedad, salvo equivalencia homotópica, con un CW-complejo cuyas celdas quedan determinadas por los puntos críticos de la función. Esta fuerte conexión con los CW-complejos ha llevado a un marcado desarrollo de la teoría en el campo de la topología algebraica, introduciendo nuevos invariantes homológicos y modelando otros ya existentes. Para más información sobre la teoría de Morse clásica referimos al lector a [Mil1]

La *teoría de Morse combinatoria* fue desarrollada por R. Forman en la década del 90 como un análogo discreto de la teoría de Morse para variedades diferenciables [For1]. Delimitada al ámbito de los complejos celulares, esta teoría presenta resultados en el contexto discreto completamente análogos a los de la teoría clásica, permitiendo, en ciertos casos, establecer y demostrar la contracara combinatoria de teoremas de la geometría diferencial. La teoría de Morse combinatoria fue desarrollada, no como una teoría completamente nueva, sino extrayendo la esencia combinatoria de la teoría de Morse clásica.

4.1. Campos vectoriales combinatorios

La teoría de Morse combinatoria se encarga de estudiar ciertas deformaciones topológicas que podemos llevar a cabo en la realización geométrica de un complejo simplicial K . Estas deformaciones consisten sintéticamente en empujar un simplex cerrado del poliedro $|K|$ desde una de sus caras inmediatas (de la exacta misma manera en que lo hace el retracto por deformación fuerte determinado por un colapso simplicial). La diferencia con la deformación provista por estos retractos reside en que la cara propia que empuja la deformación no es necesariamente libre. En este sentido, las deformaciones que intentamos estudiar son operaciones más generales que los colapsos simpliciales y pueden realizarse únicamente a niveles topológicos (ya que producen poliedros no necesariamente rígidos).

La Figura 4.1 muestra algunos ejemplos de este tipo de deformaciones.

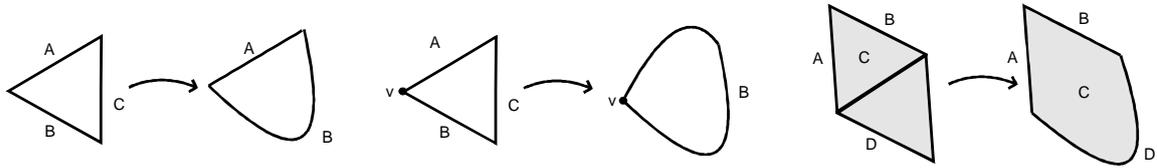


Figura 4.1: Ejemplo de deformaciones.

Nuestro interés en el estudio de este tipo particular de deformaciones no es caprichoso. Si K es un complejo simplicial finito, veremos que existe una colección $\{K_i\}$ de subcomplejos de K (llamados complejos de nivel) de manera que cada uno de estas deformaciones se corresponde con un colapso simplicial elemental $K_{i+1} \searrow K_i$ para cierto i .

La manera en que se llevan a cabo las deformaciones referidas puede representarse dibujando flechas sobre un esquema del complejo simplicial. Por ejemplo, la Figura 4.2 muestra como representar las deformaciones de la Figura 4.1. A grandes rasgos, lo que hacemos es ubicar una flecha con origen en un simplex σ y contenida en un simplex $\tau = v\sigma$ si la deformación consiste en empujar desde σ hacia $v\sigma$.

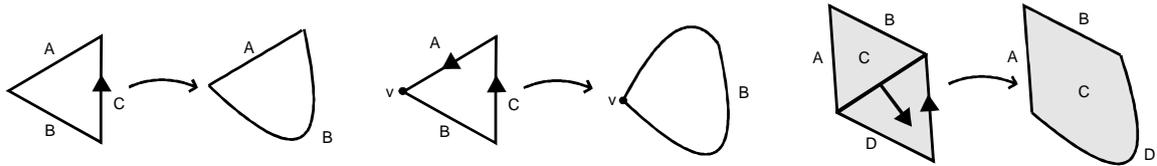


Figura 4.2: Codificación de las deformaciones con flechas.

Notemos que si ahora queremos partir de un esquema limpio de un complejo simplicial y dibujarle flechas de manera que representen deformaciones del tipo considerado entonces existen ciertas precauciones que debemos tener. Entre ellas podemos nombrar:

- Un mismo simplex no puede ser origen de más de una flecha.
- Un mismo simplex no puede contener más de una flecha.
- Un simplex no puede contener una flecha y ser origen de otra.

Es fácil corroborar que estos requisitos son obligatorios para que las deformaciones subyacentes estén bien definidas. Podría parecer que dichos requisitos son suficientes para garantizar que el diagrama de flechas codifique nuestras deformaciones. Sin embargo, mirando la Figura 4.3 vemos que además debemos pedir:

- No debe haber *ciclos dirigidos* de flechas.

Veremos en las próximas secciones que estas propiedades son suficientes para garantizar que un diagrama de flechas sobre un esquema de un complejo simplicial representa las deformaciones consideradas por esta teoría. A continuación, vamos a formalizar nuestra esquematización de deformaciones vía flechas en el concepto de campos vectoriales combinatorios.

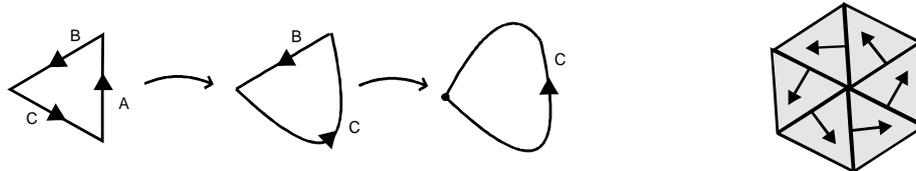


Figura 4.3: Diagrama con ciclos dirigidos de flechas.

Definición 4.1.1. Sea K un complejo simplicial finito. Un *campo vectorial combinatorio* sobre K es una aplicación $V : S_K \rightarrow S_K \cup \{0\}$ que verifica

- (i) Si $V(\sigma) \neq 0$ entonces $\sigma \prec V(\sigma)$
- (ii) Si $V(\sigma) = V(\sigma') \neq 0$ entonces $\sigma = \sigma'$
- (iii) $V^2 = 0$.

Notemos inmediatamente que de (i) se tiene que $\dim(V(\sigma)) = \dim(\sigma) + 1$ y de (ii) que V es inyectivo en el conjunto de símplices de K del codominio (esto es, en $S_K \subset S_K \cup \{0\}$). En particular, esta propiedad puede escribirse equivalentemente como

- (ii') $\#V^{-1}(\sigma) \leq 1$ para todo $\sigma \in K$.

Dado un campo vectorial combinatorio V sobre K y un simplex $\sigma \in K$ tal que $V(\sigma) \neq 0$, dibujemos una flecha de origen σ y destino $V(\sigma)$ en un esquema del complejo simplicial K . En este caso, (i) nos dice que σ debe ser una cara inmediata de $V(\sigma)$, (ii) que un mismo simplex no puede contener dos flechas y (iii) que un mismo simplex no puede contener una flecha y ser origen de otra (notar que el requisito que un mismo simplex no puede ser origen de dos flechas queda descartado por el carácter de aplicación de V).

De aquí se deduce que existen tres posibilidades disjuntas para un p -simplex $\sigma \in K$: $\sigma \in \text{Im}(V)$, $V(\sigma) \neq 0$ ó $V(\sigma) = 0$ pero $\sigma \notin \text{Im}(V)$. En este último caso, diremos que el p -simplex σ es un *punto crítico de índice p* de V (notar que corresponde al caso cuando σ no recibe ni emana flechas).

Notemos que la definición de campo vectorial combinatorio no descarta la posibilidad de existencia de *ciclos dirigidos* de flechas. Serán precisamente los campos que no contengan dichos ciclos los que resultarán gradientes de funciones de Morse combinatorias, nuestro objeto primordial de estudio. Antes de pasar a la próxima sección para definir las, formalizamos la noción de ciclo dirigido de flechas en el contexto de los campos vectoriales combinatorios.

Definición 4.1.2. Sea K un complejo simplicial finito y V un campo vectorial combinatorio sobre K . Un V -camino de índice p es una sucesión de p -símplices

$$\gamma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$$

tal que para todo $i = 0, \dots, r - 1$ se tiene $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$, $V(\sigma_i) \neq 0$ y $\sigma_{i+1} \prec V(\sigma_i)$.

Diremos que γ es *cerrado* si $\sigma_0 = \sigma_r$ y que es *no estacionario* si $r > 0$. Notar que la definición no pone condiciones sobre $V(\sigma_r)$.

Con estas definiciones es fácil chequear que un campo vectorial combinatorio V sobre un complejo K no dará lugar a ciclos dirigidos de flechas si, y sólo si, no posee V -caminos cerrados no estacionarios de índice p para cada $p = 1, \dots, \dim(K)$.

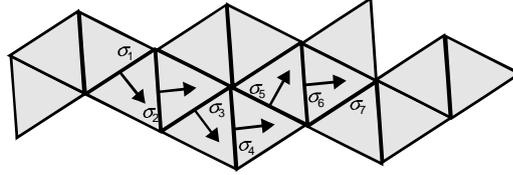


Figura 4.4: V-camino de índice 1.

4.2. Funciones de Morse combinatorias

Las funciones de Morse combinatorias son aplicaciones encargadas de codificar las deformaciones determinadas por algunos campos vectoriales combinatorios. En esta sección introduciremos las definiciones principales de la teoría de Morse discreta.

Definición 4.2.1. Sea K un complejo simplicial finito. Una *función de Morse combinatoria* (o *discreta*) es una función $f : S_K \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface para todo simplex $\sigma \in K$

- (i) Existe a lo sumo un $\tau \succ \sigma$ tal que $f(\tau) \leq f(\sigma)$
- (ii) Existe a lo sumo un $\nu \prec \sigma$ tal que $f(\nu) \geq f(\sigma)$

Esto quiere decir que, para un simplex $\sigma \in K$, las funciones de Morse combinatorias decrecen hacia las caras inmediatas de σ (a excepción de, quizá, una de ellas) y crecen hacia los símlices para los que σ es cara inmediata (a excepción de, quizá, uno de ellos).

La idea detrás de la definición es la siguiente: si $\sigma \prec \tau$ y $f(\sigma) \geq f(\tau)$ podemos pensar que la función decrece desde σ hacia τ , por lo que vamos a poder empujar $|\tau|$ desde la cara $|\sigma|$. Veremos en unos pocos párrafos más que en este caso σ no puede decrecer hacia otro simplex que lo tenga como cara, por lo que esta deformación estará definida sin ambigüedad.

EJEMPLO 4.2.2. Toda complejo simplicial finito K admite una función de Morse combinatoria. Basta considerar $f(\sigma) = \dim(\sigma)$. Esta función se llama función de Morse trivial.

EJEMPLO 4.2.3. En la Figura 4.5 se pueden ver ejemplos de funciones de Morse combinatoria no triviales y otras que no.

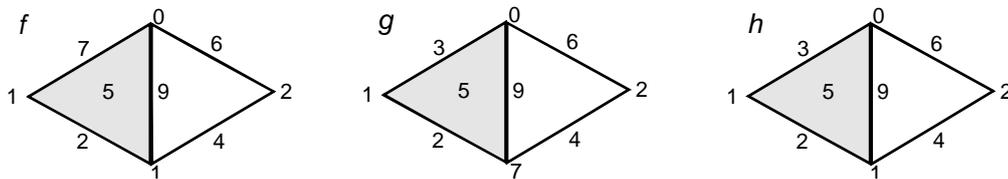


Figura 4.5: f no es de Morse pues el 2-simplex tiene dos caras con valores mayores. g no es de Morse pues el vértice inferior toma un valor mayor que dos de los 1-símplexes de los que es cara. h es de Morse.

Teniendo en mente que la idea detrás de la definición es identificar los pares $\sigma \prec \tau$ tales que $f(\sigma) \geq f(\tau)$ con la deformación esquematizada por la flecha de origen σ y destino τ definimos a continuación el concepto de punto crítico de una función de Morse. Como en el caso de los campos vectoriales combinatorios, y de acuerdo al comentario anterior, corresponderá a los símlices que no sufren deformaciones.

Definición 4.2.4. Dada una función de Morse combinatoria sobre un complejo simplicial finito K decimos que un p -simplex $\sigma \in K$ es un *punto crítico* (de índice p) si cada vez que $\tau \succ \sigma$ entonces $f(\tau) > f(\sigma)$ y cada vez que $\nu \prec \sigma$ entonces $f(\nu) < f(\sigma)$.

Esto es, un punto crítico de índice p es un p -simplex σ que verifica que la función de Morse combinatoria es creciente respecto de la dimensión en el conjunto de símlices que son cara inmediata de σ y de los que σ es cara inmediata. En lo que sigue, utilizaremos las denominaciones *punto crítico* y *simplex crítico* de manera equivalente. Observar que la función de Morse trivial del Ejemplo 4.2.2 tiene todos sus símlices críticos.

Observación 4.2.5. Como K es finito entonces una función de Morse combinatoria f sobre K alcanzará máximo y mínimo. Este mínimo debe alcanzarse en un vértice, que resultará crítico. En efecto, sea $v \in K$ el vértice que toma el menor valor entre los vértices de K . Cualquiera sea el p -simplex $\sigma \in K$ ($p \geq 1$), existen al menos dos $(p-1)$ -símlices $\nu, \nu' \prec \sigma$. Por definición, alguno de ellos debe tomar un valor inferior a $f(\sigma)$. Siguiendo de esta manera, hallamos que $f(\sigma) > f(\nu')$, para cierto vértice $\nu' \in K$. Como además tenemos $f(v) \leq f(\nu')$ entonces v es el mínimo de f . Por otro lado, si v no fuera crítico entonces existe un 1-simplex $\sigma \succ v$ tal que $f(v) \geq f(\sigma)$. Si w es el otro extremo de σ entonces, nuevamente por definición, $f(w) < f(\sigma) \leq f(v)$, contradiciendo la minimalidad de v .

Los símlices que no son críticos se llaman *regulares*. Un p -simplex σ puede ser regular por dos motivos, a saber:

1. Existe $\tau \succ \sigma$ tal que $f(\tau) \leq f(\sigma)$
2. Existe $\nu \prec \sigma$ tal que $f(\nu) \geq f(\sigma)$.

El siguiente lema nos dice que no pueden suceder ambas al mismo tiempo.

Lema 4.2.6. *Las condiciones 1. y 2. son mutuamente excluyentes.*

Demostración. La condición 2. precisa $p \geq 1$. Asumimos esto entonces. Supongamos que 1. y 2. son ciertos. Sea σ' el único p -simplex distinto de σ que verifica $\nu \prec \sigma' \prec \tau$. Por definición y por 1. debe ser $f(\sigma') < f(\tau)$; en particular, $f(\sigma') < f(\sigma)$. Por otro lado, por definición y por 2. $f(\nu) < f(\sigma')$. Combinando esto obtenemos

$$f(\sigma) \leq f(\nu) < f(\sigma') < f(\sigma).$$

Esto completa la demostración. □

Del resultado anterior podemos hallar que existen dos tipos de símlices regulares de una función de Morse combinatoria: los que tienen una cara inmediata que toma un valor mayor a ellos y los que son cara inmediata de un simplex que toma un valor menor a ellos. En virtud de esto, diremos que un simplex σ es una *cara regular de f* si verifica 1. y que es un *top simplex regular* si verifica 2. Notemos que las caras regulares y los top símlices regulares ocurren en pares: σ es cara regular de τ si, y sólo si, τ es un top simplex regular para σ ; decimos en este caso que $\sigma \prec \tau$ es un *par regular* para f . Esta característica nos permite deducir el primer resultado interesante de la teoría: la fórmula combinatoria de Poincaré-Hopf. Antes, introducimos una notación.

Notación. Si K es un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K entonces la cantidad de puntos críticos de índice p de f se notará $m_p(f)$.

Teorema 4.2.7 (Fórmula de Poincaré-Hopf). Si c_p representa la cantidad de p -símplices de K entonces

$$\chi(K) := \sum_{p=0}^n (-1)^p c_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p m_p(f). \quad (4.1)$$

Demostración. Es inmediato del hecho que las símplices regulares ocurren en pares. \square

NOTA. La fórmula del índice de Poincaré-Hopf (también llamado Teorema de Poincaré-Hopf) es un resultado de la topología diferencial que establece una relación entre la característica de Euler de una variedad diferenciable compacta y orientable M y los índices de los ceros de un campo vectorial sobre M . Es en este sentido que pensamos a la fórmula (4.1) como una versión discreta de la fórmula original.

Notemos en particular que el Teorema 4.2.7 nos dice que, de alguna manera, cierta información combinatoria relevante del complejo simplicial K está contenida en los puntos críticos de f ; esto es, en los símplices que no son sufridos deformaciones. Veremos más adelante que son precisamente los símplices críticos los que determinan la estructura (más simple) de complejo celular de $|K|$ (como en el caso diferenciable).

Vamos a ver a continuación de qué formas una función de Morse discreta sobre un complejo simplicial puede inducir una función de Morse sobre otro complejo simplicial. Es inminente introducir el caso de *restricción a y extensión desde* subcomplejos.

Proposición 4.2.8. Sea L un subcomplejo de un complejo simplicial finito K . Entonces se verifica:

- (i) Si f es una función de Morse combinatoria sobre K entonces $f|_L$ es una función de Morse combinatoria sobre L .
- (ii) Si f una función de Morse combinatoria sobre L , entonces f puede extenderse a una función de Morse combinatoria sobre K .

Demostración. (i) es trivial. Para (ii) pongamos $C = \max_{\sigma \in L} \{f(\sigma)\}$ consideremos la función $g : S_K \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & \text{si } \sigma \in L \\ \dim(\sigma) + C & \text{si } \sigma \in K - L \end{cases}$$

Es fácil corroborar que g resulta una función de Morse combinatoria sobre K . \square

Notemos que la extensión definida en la proposición anterior determina que todos los símplices de $K - L$ sean críticos. Veremos más adelante que, bajo ciertas condiciones, podemos extender una función de Morse sin agregar nuevos símplices críticos.

Definición 4.2.9. Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K . Para $c \in \mathbb{R}$ definimos el complejo de nivel de f en c como el subcomplejo $K(c)$ de K generado por todos los símplices σ tales que $f(\sigma) \leq c$. Esto es,

$$K(c) = \bigcup_{\substack{\sigma \in K \\ f(\sigma) \leq c}} \bigcup_{\tau \leq \sigma} \tau.$$

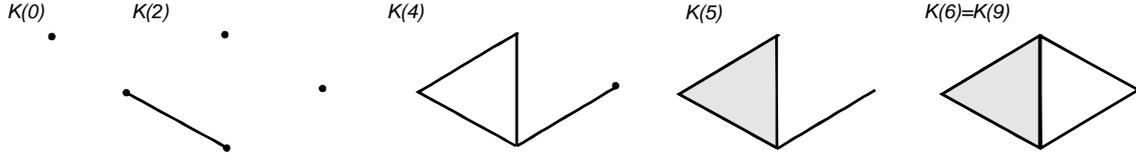


Figura 4.6: Algunos complejos de nivel de h .

La Figura 4.6 muestra los distintos complejos de nivel de la función de Morse combinatoria h del ejemplo 4.2.3. Los complejos de nivel cobran especial importancia a la hora de enunciar los teoremas principales de la teoría de Morse. Antes de presentarlos, obtendremos algunos resultados sobre estos objetos.

Notemos que si $f(\sigma) > c$ entonces $\sigma \in K(c)$ si, y sólo si, existe $\tau > \sigma$ con $f(\tau) \leq c$. Del siguiente lema se desprende el hecho que nos alcanza con considerar el caso $\dim(\tau) = \dim(\sigma) + 1$.

Lema 4.2.10. *Sea σ un p -simplex de K y sea $\tau > \sigma$. Entonces existe un $(p + 1)$ -simplex τ' tal que $\sigma \prec \tau' \leq \tau$ y $f(\tau') \leq f(\tau)$.*

Demostración. Si $\dim(\tau) = p + 1$ tomamos $\tau' = \tau$. Supongamos entonces que $\dim(\tau) = p + r$ con $r > 1$. Como hay dos $(p + r - 1)$ -caras ν_1 y ν_2 tales que

$$\sigma < \nu_1, \nu_2 < \tau$$

entonces alguna debe tomar un valor menor a $f(\tau)$; digamos ν_1 . Como $\dim(\nu_1) = p + r - 1$ podemos conseguir, por hipótesis inductiva, un $(p + 1)$ -simplex τ' con $\sigma \prec \tau' \leq \nu_1$ y $f(\tau') \leq f(\nu_1) \leq f(\tau)$. Es completa la demostración. \square

Corolario 4.2.11. *Un p -simplex σ está en $K(c)$ si, y sólo si, $f(\sigma) \leq c$ o existe $\tau \succ \sigma$ tal que $f(\tau) \leq c$.*

Notemos que con los mismos argumentos utilizados en la demostración del Lema 4.2.10 podemos demostrar el caso para un $\nu < \sigma$. Considerando ambos resultados obtenemos

Corolario 4.2.12. *Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K . Entonces se tiene*

- (i) *Si $\tau > \sigma$ es tal que $f(\tau) \leq f(\sigma)$ entonces existe $\tau' \succ \sigma$ tal que $f(\tau') \leq f(\sigma)$*
- (ii) *Si $\nu < \sigma$ es tal que $f(\nu) \geq f(\sigma)$ entonces existe $\nu' \prec \sigma$ tal que $f(\nu') \geq f(\sigma)$.*
- (iii) *Un simplex σ es crítico si, y sólo si, cada vez que $\nu < \sigma < \tau$ se tiene $f(\nu) < f(\sigma) < f(\tau)$.*

Observación 4.2.13. Para toda función de Morse combinatoria f sobre un complejo simplicial finito existe una función de Morse combinatoria f' sobre el mismo complejo con los mismos puntos críticos y que, además, es inyectiva. Más aún, si fijamos $a < b \in \mathbb{R}$ puede lograrse que los conjuntos de nivel de ambas funciones en a y b coincidan. La idea de la demostración es perturbar con cuidado los valores de la función f en los lugares donde no sea inyectiva. Una demostración completa de este resultado puede encontrarse en [Sir, Teorema 4.2.14].

4.3. Teoremas principales

Los resultados principales de la teoría de Morse discreta establecen de qué manera una función de Morse combinatoria sobre un complejo simplicial provee una forma de construir dicho complejo adjuntando celdas en el orden prescrito por la función. Esto es, nos dicen como varían los complejos de nivel cuando un simplex nuevo es agregado. Los dos teoremas siguientes constituyen el corazón de la teoría de Morse discreta. Como corolario se desprende el teorema central de la teoría.

Teorema 4.3.1. *Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K . Si $a < b$ son números reales tales que $f^{-1}((a, b])$ no contiene puntos críticos entonces $K(b) \searrow K(a)$.*

Demostración. Por la observación 4.2.13 podemos suponer que f es inyectiva. Si $f^{-1}((a, b]) = \emptyset$ entonces $K(a) = K(b)$ y no hay nada más que probar. Si $f^{-1}((a, b]) \neq \emptyset$ particionemos $(a, b]$ vía $a = a_0, a_1, \dots, a_{r-1}, a_r = b$ de manera que $f^{-1}((a_i, a_{i+1}]) = \{\sigma_i\}$ (podría tratarse de la partición trivial si hay un único simplex regular en $(a, b]$). Vamos a probar que $K(a_{i+1}) \searrow K(a_i)$ para todo $0 \leq i \leq r$, de donde se obtiene el teorema. Como σ_i es regular por hipótesis entonces debe suceder una (y sólo una) de las siguientes situaciones:

1. Existe $\tau_i \succ \sigma_i$ con $f(\tau_i) < f(\sigma_i)$
2. Existe $\nu_i \prec \sigma_i$ con $f(\nu_i) > f(\sigma_i)$.

En el caso 1. debemos tener $f(\tau_i) \leq a_i$, pues $f(\tau_i) < f(\sigma_i)$ y $f^{-1}((a_i, a_{i+1}]) = \{\sigma_i\}$. Luego, $\tau_i \in K(a_i)$. Como además σ_i es cara de τ_i entonces $\sigma_i \in K(a_i)$. Luego, en este caso $K(a_{i+1}) = K(a_i)$ y el resultado es válido. Si ahora se verifica 2. entonces para todo $\tau \succ \sigma_i$ se tiene $f(\tau) > f(\sigma)$; de donde $f(\tau) > a_{i+1}$. Del Corolario 4.2.11 se deduce entonces que $\sigma \notin K(a_i)$. Por otro lado, como estamos suponiendo que $f(\nu_i) > f(\sigma_i)$ y como $f^{-1}((a_i, a_{i+1}]) = \{\sigma_i\}$, entonces $f(\nu_i) > a_{i+1}$. Afirmamos que $\nu_i \notin K(a_i)$. En efecto, si $\tilde{\sigma} \succ \nu_i$ entonces $f(\tilde{\sigma}) > f(\nu_i) > a_{i+1}$. Nuevamente por Corolario 4.2.11, $\nu_i \notin K(a_i)$. Además, esta es la única cara de σ_i que no está en $K(a_i)$, pues si $\tilde{\nu} \prec \sigma_i$ entonces $f(\tilde{\nu}) < f(\sigma_i)$ y, por lo tanto, $f(\tilde{\nu}) \leq a_i$. Hemos probado entonces que en este caso $K(a_{i+1}) = K(a_i) \cup \{\sigma_i, \nu_i\}$ donde ν_i es una cara libre de σ_i en $K(a_i)$. Luego, $K(a_{i+1}) \searrow K(a_i)$. \square

Corolario 4.3.2. *Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K . Si f no tiene puntos críticos en $K - K(c)$ para algún $c \in \mathbb{R}$ entonces $K \searrow K(c)$.*

Teorema 4.3.3. *Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K . Supongamos que σ es un p -simplex crítico de f con $f(\sigma) \in (a, b]$ y que $f^{-1}((a, b])$ no contiene otros puntos críticos. Entonces $K(b)$ es homotópicamente equivalente a*

$$K(a) \cup_{\partial^p} e^p$$

donde e^p denota una celda de dimensión p con borde ∂^p .

Demostración. Nuevamente, podemos suponer que f es inyectiva. Si σ no es el único simplex en $f^{-1}((a, b])$ elijamos $a < a' < b' < b$ tal que $f^{-1}((a', b']) = \{\sigma\}$. Como $f^{-1}((a, a'])$ y $f^{-1}((b', b])$ no contienen puntos críticos entonces $K(b) \searrow K(b')$ y $K(a') \searrow K(a)$. Nos alcanza entonces con probar que $K(b')$ es homotópicamente equivalente a $K(a') \cup_{\partial^p} e^p$. Como σ es crítico entonces $\nu < \sigma < \tau$ implica $f(\nu) < f(\sigma) < f(\tau)$ (Corolario 4.2.12). En

particular, $f(\tau) > b'$ para cualquier $\tau > \sigma$. Luego, $\sigma \notin K(a')$. Análogamente, para cada $\nu < \sigma$ se tendrá $f(\nu) < a'$, de donde se deduce que $\sigma \in K(a')$. Luego, $K(b') = K(a') \cup_{\dot{\sigma}} \sigma$. Como σ es una p -celda tenemos el resultado buscado. \square

Observación 4.3.4. Notemos que en el transcurso de la demostración anterior hemos establecido que si $f^{-1}((a, b])$ es exactamente el conjunto unitario $\{\sigma\}$ (para un $\sigma \in K$ crítico), entonces $K(b) = K(a) \cup_{\dot{\sigma}} \sigma$.

Corolario 4.3.5. *Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K . Entonces K es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con exactamente $m_p(f)$ celdas de dimensión p .*

El Corolario 4.3.5 es el teorema central de la teoría de Morse discreta. Nos dice que se puede simplificar mucho la estructura celular de un complejo simplicial si podemos definir sobre él funciones de Morse combinatorias con pocos puntos críticos. Si bien, por supuesto, no nos dice como las celdas del CW-complejo asociado se pegan entre sí, en muchos casos pueden deducirse muchas propiedades del complejo simplicial con la información con la que se cuenta. Para mostrar ejemplos introducimos a continuación una proposición que resulta extremadamente útil en el desarrollo que sigue.

Proposición 4.3.6. *Sea K un complejo simplicial finito y $L \subset K$ un subcomplejo tal que $K \searrow L$. Sea f una función de Morse combinatoria sobre L y sea $c = \max_{\sigma \in L} \{f(\sigma)\}$. Entonces, f puede extenderse a K de manera que $L = K(c)$ y tal que no haya puntos críticos en $K - L$.*

Demostración. Notar que nos alcanza con probarlo para un colapso elemental (usando inducción en la cantidad de colapsos elementales en $K \searrow L$). Escribamos entonces $K = L \cup \{\tau, \nu\}$, con $\nu \prec \tau$ una cara libre de τ en K . Definamos una función g en K vía

$$g(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & \sigma \neq \nu, \tau \\ c + 1 & \sigma = \tau \\ c + 2 & \sigma = \nu \end{cases}$$

Es sencillo corroborar que g es una función de Morse combinatoria pues los valores asignados a ν y τ no intervienen en la regularidad de los símlices de L . Además, $K(c)$ es trivialmente L y el hecho que $f(\nu) > f(\tau)$ muestra que $K - L$ no posee ningún simplex crítico de g . \square

Corolario 4.3.7. *Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K . Entonces $K \searrow v$ si, y sólo si, K admite una función de Morse combinatoria que tiene a v como único punto crítico.*

Demostración. Es inmediato de la Proposición 4.3.6 y el Corolario 4.3.2. \square

Corolario 4.3.8. *Sea Δ^n el n -simplex standard y $\dot{\Delta}^n$ su borde. Entonces,*

- (i) Δ^n admite una función de Morse combinatoria con un solo punto crítico.
- (ii) $\dot{\Delta}^n$ admite una función de Morse con exactamente dos puntos críticos.

Demostración. (i) es inmediato del Corolario 4.3.7. Para (ii) notar que si σ es un $(n - 1)$ -simplex de $\dot{\Delta}^n$ entonces $\dot{\Delta}^n - \{\sigma\} \searrow v$. Nuevamente por Corolario 4.3.7, $\dot{\Delta}^n - \{\sigma\}$ tiene una función de Morse combinatoria con un único punto crítico en v . Por la Proposición 4.2.8, podemos extender f a todo $\dot{\Delta}^n$ dejando a σ crítico. \square

Cerramos la sección con un resultado muy interesante de la teoría de Morse discreta. Antes, una observación.

Observación 4.3.9. Si f es una función de Morse combinatoria definida sobre una n -pseudovariación sin borde K entonces el máximo de f se alcanza en un n -simplex. Esto es así pues para todo $k \leq n - 1$ se tiene que todo k -simplex es cara de, al menos, dos $p + 1$ -símplices (es un argumento idéntico, aunque inverso, al de la Observación 4.2.5).

Teorema 4.3.10. *Sea K un complejo simplicial finito de dimensión n que admite una función de Morse combinatoria con dos puntos críticos. Entonces, K es homotópicamente equivalente a S^k , para cierto $k \leq n$. Si además K es una n -variedad combinatoria sin borde, entonces K es una n -esfera combinatoria.*

Demostración. Uno de los puntos críticos debe ser un vértice. Si el otro es un k -simplex entonces K tiene el tipo homotópico de un CW-complejo con una 0-celda y una k -celda (Corolario 4.3.5). Supongamos ahora que K es una n -variedad combinatoria sin borde. Por la observación anterior, K tiene un vértice v crítico y un n -simplex σ crítico. Por el Teorema 4.3.1, se tiene que $K - \{\sigma\} \searrow v$. Por el Teorema de Whitehead, se tiene que $K - \{\sigma\}$ es una n -bola combinatoria y, por lo tanto, $K = K - \{\sigma\} \cup_{\partial} \sigma$ es una n -esfera combinatoria. \square

4.4. Gradiente de una función de Morse combinatoria

En esta sección vamos a precisar como una función de Morse combinatoria determina un campo vectorial combinatorio. Como en el caso diferenciable, una función de Morse combinatoria tiene un campo vectorial gradiente que interpreta los sentidos de crecimiento y decrecimiento locales de la función. De los comentarios hechos al comienzo de la sección anterior la siguiente definición resulta natural.

Definición 4.4.1. Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K . El *gradiente* de f es el campo vectorial V_f definido por:

$$V_f(\sigma) = \begin{cases} \tau & \text{si existe } \tau \succ \sigma \text{ con } f(\tau) \leq f(\sigma) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Es fácil chequear que V_f verifica los requisitos de la Definición 4.1.1. Notemos que, en realidad, visto como análogo al gradiente de una función diferenciable, V_f representa el gradiente de $-f$, en el sentido que apunta en la dirección de decrecimiento de la función. En el contexto discreto, el gradiente de una función de Morse combinatoria tendrá esta propiedad *reversa*. Cuando no sea necesario, omitiremos el subscripto f y llamaremos V al campo gradiente de f .

Notemos que los puntos críticos de índice p de V_f coinciden con los puntos críticos de índice p de f . Sin embargo, el campo gradiente de f no refleja los distintos complejos de nivel que determina la función. Notar que cualquiera sea $c \in \mathbb{R}$ se tiene $V_f = V_{f+c}$, pero en general no será cierto que los distintos complejos de nivel de f coincidan con los de $f + c$.

Observación 4.4.2. El campo gradiente de una función de Morse combinatoria f no admite V_f -caminos cerrados no estacionarios. En efecto, sea $\gamma : \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$ un dicho camino de dimensión p . Como $\sigma_{i+1} \prec V_f(\sigma_i)$ para cada $i = 0, \dots, r - 1$ y $f(\sigma_i) \geq f(V(\sigma_i))$ para cada i entonces $f(\sigma_{i+1}) < f(\sigma_i)$ para todo i . En particular, $f(\sigma_r) < f(\sigma_0)$. Esto es absurdo pues $\sigma_r = \sigma_0$.

Presentamos por último el resultado principal para campos gradientes de funciones de Morse combinatoria. Establece que la propiedad del gradiente de no contener caminos cerrados no estacionarios es suficiente para hallar una función de Morse combinatoria que lo codifique.

Teorema 4.4.3. *Sea K un complejo simplicial finito y sea W un campo vectorial combinatorio sobre K . Si W no admite W -camino cerrado no estacionario (de cualquier dimensión) entonces existe una función de Morse combinatoria f sobre K tal que $V_f = W$.*

Demostración. La demostración se lleva a cabo por inducción en los esqueletos de K . Esto es, podemos restringir W a un campo vectorial combinatorio W_n sobre K^n vía

$$W_n(\sigma) = \begin{cases} W(\sigma) & \text{si } \dim(\sigma) < n \\ 0 & \text{si } \dim(\sigma) = n \end{cases}$$

Vamos entonces a probar inductivamente que existe una función de Morse combinatoria $f_n : K^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $W_n = V_{f_n}$. De esta manera, cuando $n = \dim(K)$ se tendrá el resultado buscado. Notemos que el caso $n = 0$ (para el que $W_0 = 0$) se verifica tomando $f_0 = 0$.

Supongamos que tenemos definida una función de Morse combinatoria f_{n-1} tal que $V_{f_{n-1}} = W_{n-1}$ y que verifica $f_{n-1}(\sigma) \leq n - 1$. Antes de definir f_n , consideremos para un $(n - 1)$ -simplex $\sigma \in K$

- $d(\sigma) = \sup\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists W - \text{camino } \sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{r-1}, \sigma_r \text{ con } W(\sigma_r) = 0\}$
- $D = \max_{\dim(\sigma)=n-1} d(\sigma)$.

Notemos inmediatamente que el número $d(\sigma)$ (y, por lo tanto, D) es finito. En efecto, si no lo fuera entonces, por finitud de K , tendríamos $\sigma_i = \sigma_j$ para algún $i < j < r$. Esto daría lugar a un W -camino cerrado no estacionario $\gamma : \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_i$ contradiciendo que W no admite tales caminos. Con esto en mente, definimos $f_n : K^n \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$f_n(\sigma) = \begin{cases} f_{n-1}(\sigma) & \dim(\sigma) \leq n - 2 \\ f_{n-1}(\sigma) + \frac{d(\sigma)}{D + 1} & \dim(\sigma) = n - 1 \\ n & \dim(\sigma) = n \text{ y } \sigma \notin \text{Im}(W) \\ f_{n-1}(\nu) + \frac{d(\nu)}{D + 1} & \dim(\sigma) = n \text{ y } W(\nu) = \sigma \end{cases}$$

Notemos que se tiene que $f_{n-1}(\sigma) \leq f_n(\sigma)$ para todo $\sigma \in K^{n-1}$ y que $f_n(\sigma) \leq n$ (pues $f_{n-1}(\sigma) \leq n - 1$ y $\frac{d(\sigma)}{D+1} < 1$). Probamos que f_n cumple lo requerido en dos pasos.

- **f_n es de Morse.**

Debemos chequear que f verifica las condiciones (i) e (ii) de la Definición 4.2.1. Lo sepáramos en varios casos.

Si $\dim(\sigma) < n - 2$ es directo pues f_{n-1} es de Morse por hipótesis inductiva.

Si $\dim(\sigma) = n - 2$ entonces el caso $\#\{\nu \prec \sigma \mid f_n(\nu) \geq f_n(\sigma)\} \leq 1$ es directo de la hipótesis inductiva. Por otro lado, como f_{n-1} es de Morse en K^{n-1} , $f_{n-1}(\sigma) < f_{n-1}(\tau)$ para todo $\tau \succ \sigma$ salvo quizá uno. Entonces,

$$f_n(\sigma) = f_{n-1}(\sigma) < f_{n-1}(\tau) \leq f_n(\tau)$$

para todo $\tau \succ \sigma$ salvo quizá uno.

Supongamos $\dim(\sigma) = n - 1$. Notar que el caso $\#\{\nu : f_n(\nu) \geq f_n(\sigma)\} \leq 1$ es el mismo que el caso $\#\{\tau : f_n(\tau) \leq f_n(\sigma)\} \leq 1$ visto en el punto anterior. Veamos que $\#\{\tau : f_n(\tau) \leq f_n(\sigma)\} \leq 1$. Sea $\tau \succ \sigma$. Si $\tau \notin \text{Im}(W)$ entonces $f(\sigma) = f_{n-1}(\sigma) + \frac{d(\sigma)}{D+1} < n = f(\tau)$. Si en cambio $\tau = W(\sigma')$ (con $\sigma' \neq \sigma$) entonces $f_n(\tau) = f_{n-1}(\sigma') + \frac{d(\sigma')}{D+1}$. Ahora, ya sea por hipótesis inductiva (usando que $\sigma' \notin \text{Im}(W)$) o por el caso $n = 0$, se tiene $f_{n-1}(\sigma') = n - 1 \geq f_{n-1}(\sigma)$. Por otro lado, si $\sigma', \sigma_1, \dots, \sigma_r$ es un W -camino, entonces $\sigma, \sigma', \sigma_1, \dots, \sigma_r$ también es un W -camino; por lo que $d(\sigma') < d(\sigma)$. Por lo tanto,

$$f_n(\tau) = f_{n-1}(\sigma') + \frac{d(\sigma')}{D+1} > f_{n-1}(\sigma) + \frac{d(\sigma)}{D+1} = f_n(\sigma).$$

Si $\dim(\sigma) = n$ sólo debemos corroborar que $\#\{\nu : f_n(\nu) \geq f_n(\sigma)\} \leq 1$. Si $\sigma \notin \text{Im}(W)$ entonces $f_n(\sigma) = n > f_{n-1}(\nu') + \frac{d(\nu')}{D+1} = f_n(\nu')$. Si $\sigma = W(\nu)$, sea $\nu \neq \nu' \prec \sigma$. Entonces, por el mismo razonamiento para el caso $\dim(\sigma) = n - 1$, se tiene $f_n(\nu) > f_n(\nu')$ y $d(\nu) > d(\nu')$. Por lo tanto,

$$f_n(\sigma) = f_{n-1}(\nu) + \frac{d(\nu)}{D+1} > f_{n-1}(\nu') + \frac{d(\nu')}{D+1} = f_n(\nu').$$

Esto prueba que $\#\{\nu : f_n(\nu) \geq f_n(\sigma)\} \leq 1$.

▪ $V_{f_n} = W_n$.

Nuevamente, analizamos los diferentes casos.

Si $\dim(\sigma) < n - 2$ el resultado se obtiene por hipótesis inductiva (pues $V_{f_n} = V_{f_{n-1}}$ en este caso).

Supongamos que $\dim(\sigma) = n - 2$. Si $W(\sigma) = 0$ entonces $V_{f_{n-1}}(\sigma) = 0$. Por lo tanto, si $\tau \succ \sigma$ se tiene $f_n(\tau) \geq f_{n-1}(\tau) \geq f_{n-1}(\sigma) = f_n(\sigma)$; de donde, $V_{f_n}(\sigma) = 0$. Si $W(\sigma) = \tau$ entonces, en particular, $W_{n-1}(\sigma) = \tau$. Como además $W(\tau) = 0$ entonces $d(\tau) = 0$, de donde $f_n(\tau) = f_{n-1}(\tau) + \frac{d(\tau)}{D+1} = f_{n-1}(\tau)$. Luego, $f_n(\sigma) = f_{n-1}(\sigma) \geq f_{n-1}(\tau) = f_n(\tau)$. Esto prueba que $V_{f_n}(\sigma) = \tau$.

Supongamos ahora $\dim(\sigma) = n - 1$. Si $W(\sigma) = 0$ entonces $d(\sigma) = 0$ y $f_n(\sigma) = f_{n-1}(\sigma)$. Sea $\tau \succ \sigma$. Si $\tau \notin \text{Im}(W)$ entonces $f_n(\tau) = n$ y $f_n(\sigma) < f_n(\tau)$. Si, en cambio, $\tau = W(\sigma')$ entonces

$$f_n(\tau) > f_n(\sigma') \geq f_{n-1}(\sigma') = n - 1 \geq f_{n-1}(\sigma) = f_n(\sigma).$$

Luego, en cualquier caso, $V_{f_n}(\sigma) = 0$. Si ahora $W(\sigma) = \tau$ entonces $f_n(\tau) = f_n(\sigma)$ y $V_{f_n}(\sigma) = \tau$.

Finalmente, para el caso $\dim(\sigma) = n$ se tiene $V_{f_n}(\sigma) = 0 = W_n(\sigma)$. Esto concluye la demostración. \square

Bibliografía

- [Bro] Brown, R. *Topology and Groupoids: A geometric account of general topology, homotopy types and the fundamental groupoid*, BookSource LLC (2006).
- [Cap] Capitelli, N.A. *Colapsabilidad en Variedades Combinatorias y Espacios de Deformaciones*, Tesis de Licenciatura, UBA (2009).
- [Coh] Cohen, M.M. *A course in simple homotopy theory*, Springer-Verlag, New York (1973).
- [For1] Forman, R. *Morse theory for cell complexes*, Advances in Mathematics 134, 90-135 (1998).
- [For2] Forman, R. *Combinatorial vector fields and dynamical systems*, Mathematische Zeitschrift 228, 629-681 (1998).
- [Gla] Glaser, L.C. *Geometrical combinatorial topology I*, Van Nostrand (1970).
- [Gru] Grünbaum, B. *Convex polytopes*, Springer-Verlag, (2003).
- [Koz1] Kozlov, D.N. *Discrete morse theory for free chain complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (2005).
- [Koz2] Kozlov, D.N. *Combinatorial algebraic topology*, Algorithms and Computation in Mathematics, Volume 21, Springer (2007).
- [Lee] Lee, J.M. *Introduction to topological manifolds*, Springer-Verlag (2000).
- [Lic] Lickorish, W.B.R. *Simplicial moves on complexes and manifolds*, Geometry and Topology Monographs, Volume 2: Proceedings of the Kirbyfest, 299-320 (1999).
- [May] May, J.P. *A concise course in algebraic topology*, Chicago Lectures in Mathematics (2004).
- [Mil1] Milnor, J. *Morse theory*, Princeton University Press (1963).
- [Mil2] Milnor, J. *The Poincaré conjecture*, <http://www.claymath.org>, Millenium Problems, Official Problem Description (2004).
- [Mun] Munkres, J.R. *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley (1984).

- [Ran] Ranicki, A.A. (editor) *The Hauptvermutung book*, K-Monographs in Mathematics 1, Kluwer (1996).
- [RS] Rourke, C.P. y Sanderson, B.J. *Introduction to piecewise-linear topology*, Springer-Verlag (1972).
- [Rol] Rolfsen, D. *The Poincaré conjecture and its cousins*. Disponible en <http://www.math.ubc.ca/~rolfsen>.
- [Sir] Siroli, N.M. *Teoría de Morse discreta*, Tesis de licenciatura, UBA (2007).
- [Sma] Smale, S. *Generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than four*, Annals Math. 74, 391-406 (1961).
- [Spa] Spanier, E.H. *Algebraic topology*, McGraw-Hill (1966). edition, Springer-Verlag (2004). Sem. Univ. Hamburg 9 , 72-78 (1933).
- [Whi1] Whitehead, J.H.C. *Simplicial spaces, nuclei and m -groups*, Proceedings of London Mathematical Society, 45 pp. 243-327 (1938).
- [Whi2] Whitehead, J.H.C. *Combinatorial homotopy*, Bulletin of the American Mathematical Society 55, 213-245 y 453-496 (1949).
- [Whi3] Whitehead, J.H.C. *Simple homotopy types*, American Journal of Mathematics 72, 1-57 (1950).
- [Zee1] Zeeman, E.C. *The Poincaré conjecture for $n = 5$* , Proc. The Univ. of Georgia Institute, Prentice-Hall, Inc., 198-204 (1961)
- [Zee2] Zeeman, E.C. *On the dunce hat*, Topology 2, 341-358 (1964).