Topología

Segundo Cuatrimestre 2016

Ejercicio Guiado: Teorema de Tietze

El objetivo de este ejercicio es demostrar el teorema de extensión de Tietze.

Teorema. *(Tietze) Sean X un espacio topológico normal y $A \subseteq X$ cerrado. Entonces,*

- *Toda función continua $f : A \to [-1, 1]$ admite una extensión continua $\bar{f} : X \to [-1, 1]$.*
- *Toda función continua $f : A \to \mathbb{R}$ admite una extensión continua $\bar{f} : X \to \mathbb{R}$.*

Ejercicio. Pruebe el teorema de Tietze resolviendo los siguientes pasos.

- Sea $f : A \to [-1, 1]$ continua. Demuestre que existe una función continua $g : X \to [-1, 1]$ tal que

$$|g(x)| \leq \frac{1}{3}, \text{ para } x \in X$$
$$|f(a) - g(a)| \leq \frac{2}{3}, \text{ para } a \in A.$$

  Sugerencia: considere los cerrados $B = f^{-1}([-1, -\frac{1}{3}])$ y $C = f^{-1}([\frac{1}{3}, 1])$.

- Sea $f : A \to [-1, 1]$ continua. Construya una sucesión de funciones continuas $g_n : X \to [-1, 1]$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \text{ para } x \in X$$
$$\left| f(a) - \sum_{k=1}^{n} g_k(a) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n}, \text{ para } a \in A.$$

  Verifique que la función $g : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} g_n(x), \ x \in X,$$

  está bien definida y es una extensión continua de f.

- Sea $f : A \to (-1, 1)$ continua. Pruebe que hay una extensión continua $h : X \to (-1, 1)$ de f. Para eso, tome una extensión $g : X \to [-1, 1]$ y considere los cerrados disjuntos A y D, donde

$$D = g^{-1}(\{-1\}) \cup g^{-1}(\{1\}).$$