Topología

Segundo cuatrimestre - 2016

Práctica 9

Teorema de Van Kampen y clasificación de revestimientos

Teorema de Van Kampen.

1. Determine los grupos fundamentales de los siguientes espacios:

   a) $T^2 \backslash \{\mathrm{pt}\}$, el toro perforado en un punto;

   b) $T^2 \backslash \{p, q\}$, el toro perforado en dos puntos;

   c) $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \backslash \{\mathrm{pt}\}$, el plano proyectivo real perforado en un punto;

   d) $M \backslash \{\mathrm{pt}\}$, la banda de Möbius perforada en un punto interior.

   e) $S^n \vee S^m$, la unión de dos esferas por un punto;

   f) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \{0\})$;

   g) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R})$;

   h) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$;

   i) $\mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \{0\})$.

2. Sean $n \geqslant 3$ y $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto finito. Pruebe que $\mathbb{R}^n \smallsetminus A$ es simplemente conexo.

3. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^m$ la unión de abiertos convexos $X_1 \cdots X_n$ tales que $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \varnothing$ para todo i, j, k. Muestre que X es simplemente conexo.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea C_n la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(n, 0)$ y radio n. Sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $x_0 = (0, 0) \in X$. Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo libre $\ast_{n \in N} \pi_1(C_n)$, el mismo que el grupo fundamental del wedge infinito $\bigvee_{n \in N} S^1$. Muestre que X y $\bigvee_{n \in N} S^1$ son homotópicamente equivalentes, pero no homeomorfos.

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea C_n la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(1/n, 0)$ y radio $1/n$. Sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $x_0 = (0, 0) \in X$. Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo no numerable.

6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $Y_n = \{x \in \mathbb{R}^2$: existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $d(x, (j - \frac{1}{2}, 0)) = \frac{1}{2}\}$. Determine $\pi_1(Y_n, 0)$.

7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^3$ la unión de n rectas por el origen. Calcule $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus X)$.

8. Sea X el espacio cociente de S^2 que se obtiene de identificar el polo norte y el polo sur en un punto. Calcule $\pi_1(X)$.

9. *a*) Si $L \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad lineal de dimensión k, con $0 \leqslant k \leqslant n-2$, determine el grupo $\pi_1(\mathbb{R}^n \backslash L)$.

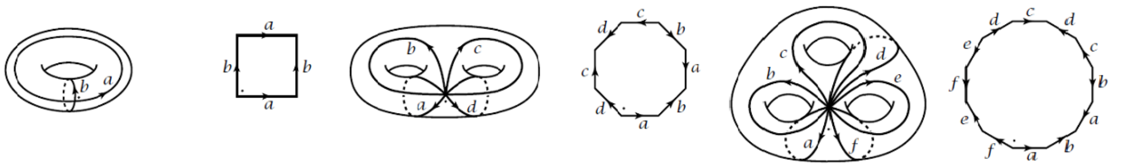
   b) Si $C \subseteq \mathbb{R}^3$ es una circunferencia, entonces $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash C) = \mathbb{Z}$.

10. Sea $K = I \times I/\sim$ donde $(x,y) \sim (x',y')$ si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

$$(x = x' \text{ e } y = y') \text{ ó } (\{y,y'\} = \{0,1\} \text{ y } x = x') \text{ ó } (\{x,x'\} = \{0,1\} \text{ e } y + y' = 1)$$

El espacio K es la *Botella de Klein*. Calcule (una presentación d)el grupo fundamental de K.

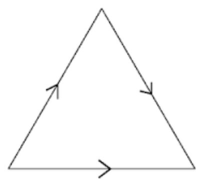
11. Para $g \in \mathbb{N}$, consideramos el espacio M_g obtenido de un polígono regular de $4g$ lados identificados como se indica en la figura para $g = 1, 2, 3$.



Calcule una presentación del grupo fundamental de M_g. Pruebe que si $g \neq h$ entonces los grupos fundamentales de M_g y M_h no son isomorfos, y deduzca que M_g y M_h no son homotópicamente equivalentes.

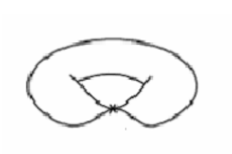
12. Calcule el grupo fundamental (o una presentación) de los siguientes CW-complejos:

   a) El dunce hat D, que se obtiene de un triángulo con sus lados identificados como en la figura.



   b) El espacio que se obtiene de un triángulo con sus tres vértices identificados.

   c) El toro pinzado.



Clasificación de revestimientos.

13. *a*) Pruebe que si $n > 1$, entonces toda función continua $S^n \to S^1$ es null-homotópica.

   b) Pruebe que toda función continua $P^2 \to S^1$ es null-homotópica.

c) Exhiba una función $S^1 \times S^1 \to S^1$ que no sea null-homotópica.

14. Pruebe que si X es arcoconexo y localmente arcoconexo y $\pi_1(X)$ es finito, entonces toda función $X \to S^1$ es null-homotópica.

15. Sea $T = S^1 \times S^1$ el toro. Considerando el isomorfismo $\pi_1(T, (b_0, b_0)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por las proyecciones, describa los revestimientos de T asociados a los subgrupos

    a) $\mathbb{Z} \times 0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

    b) el subgrupo generado por $(1, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

    c) $\{(2n, 2m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$.

16. a) Pruebe que todo isomorfismo de $\pi_1(T, x_0)$ está inducido por algún homeomorfismo $T \to T$ que deja quieto a x_0.

    b) Pruebe que si E es un revestimiento conexo de T, entonces E es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, $S^1 \times \mathbb{R}$ ó T.

    Sugerencia: si F es un grupo abeliano libre de rango 2 y N es un subgrupo no trivial, entonces existe una base $\{a_1, a_2\}$ de F tal que $\{na_1\}$ es base de N para algún n o bien $\{na_1, ma_2\}$ es base de N para ciertos n, m.

17. Sea G un grupo topológico arcoconexo y localmente arcoconexo con elemento neutro e, y sea $p : \tilde{G} \to G$ un revestimiento con $\tilde{G}$ arcoconexo y $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$. Pruebe que la multiplicación $\mu : G \times G \to G$ y la función $\nu : G \to G$, $\nu(x) = x^{-1}$ se levantan a funciones $\tilde{\mu} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ y $\tilde{\nu} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ que hacen de $\tilde{G}$ un grupo topológico con neutro $\tilde{e}$. Pruebe además que p es un morfismo.

18. Pruebe que si B admite un revestimiento universal, entonces B es semilocalmente simplemente conexo.

19. Sea $p : \tilde{X} \to X$ un revestimiento simplemente conexo de X, y sea $A \subseteq X$ un subespacio arcoconexo y localmente arcoconexo, con $\tilde{A} \subseteq \tilde{X}$ una componente arcoconexa de $p^{-1}(A)$. Muestre que $p : \tilde{A} \to A$ es el revestimiento correspondiente al núcleo del morfismo $i_* : \pi_1(A) \to \pi_1(X)$.

20. Sea $H = \bigcup_{n \geqslant 1} \partial B_{1/n}(1/n, 0) \subset \mathbb{R}^2$ el *arito Hawaiano*.

    a) Pruebe que H no es semilocalmente simplemente conexo.

    b) Sea $C(H)$ el *cono* de H, que consiste en el subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por la unión de todos los segmentos que unen un punto de $H \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ con el punto $(0, 0, 1)$. Pruebe que $C(H)$ es semilocalmente simplemente conexo pero no localmente simplemente conexo.

21. Sean X, Y, Z espacios arcoconexos y localmente arcoconexos y sean $q : X \to Y$, $r : Y \to Z$ funciones continuas. Sea $p = r \circ q$.

    a) Pruebe que si p y r son revestimientos, también lo es q. Pruebe que q es normal si p lo es.

b) Pruebe que si p y q son revestimientos, también lo es r.

c) Pruebe que si q y r son revestimientos y el espacio Z admite un revestimiento universal, entonces p también es un revestimiento.

22. Sea B arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo. Sea $p : \tilde{E} \to B$ revestimiento universal. Dado un revestimiento arcoconexo $r : E \to B$, pruebe que existe un revestimiento $q : \tilde{E} \to E$ tal que $r \circ q = p$.

23. Sean E, B arcoconexos y localmente arcoconexos, y sea $p : E \to B$ un revestimiento, $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Una *transformación deck* es un homeomorfismo $h : E \to E$ tal que $ph = p$. El conjunto de transformaciones deck $\mathrm{Deck}(p)$ forman un grupo con la operación dada por la composición.

    a) Se dice que $p : E \to B$ es *normal* si para todo $b_0 \in B$ y $e_0, e_1 \in p^{-1}(b_0)$, existe una transformación deck tal que $h(e_0) = e_1$. Pruebe que p es normal si y sólo si $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$.

    b) Pruebe que si p es normal, $\mathrm{Deck}(p)$ es isomorfo al grupo cociente $\pi_1(B, b_0)/H$.

    c) Concluya que si $p : E \to B$ es un revestimiento universal de B, entonces $\pi_1(B, b_0)$ es isomorfo al grupo de transformaciones deck.

24. Sea B arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo. Un revestimiento arcoconexo E de B se dice *abeliano* si es normal y tiene grupo de transformaciones deck abeliano. Muestre que B tiene un revestimiento que reviste a todos los revestimientos abelianos de B, único salvo homeomorfismo.

    Describa este revestimiento para $B = S^1 \vee S^1$, $B = S^1 \vee S^1 \vee S^1$.

25. Describa el grupo de transformaciones deck del revestimiento usual $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$.

26. Sea E un espacio topológico, y G un grupo que actúa en E de manera propiamente discontinua. Sea $p : E \to B$ es un revestimiento. Pruebe que:

    a) La proyección al cociente $q : E \to E/G$ es un revestimiento normal.

    b) Si E es arcoconexo, entonces G es el grupo de transformaciones deck de q.

    c) Existe un revestimiento $r : E/G \to B$ tal que $r \circ q = p$.

    d) Todo subgrupo H de $\mathrm{Deck}(p)$ actúa en E de manera propiamente discontinua, es decir, para todo $e \in E$, existe un abierto $U \ni e$ tal que $h(U) \cap U = \varnothing$ para todo $h \in H$.