Topología

Segundo cuatrimestre - 2016

Práctica 8

Fibraciones y revestimientos.

Fibraciones.

1. Sean X, Y espacios topológicos. Pruebe que la proyección $p_X : X \times Y \to X$ es una fibración con fibra Y. Si además Y es discreto, entonces p_X es un revestimiento.

2. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sean α, β caminos en B con $\alpha(1) = \beta(0)$ de manera que existen levantados $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ que cumplen $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$. Entonces $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ es un levantado de $\alpha * \beta$.

3. Sean $p : E \to B$ una fibración, X un espacio localmente compacto y T_2. Sea $p' : C(X, E) \to C(X, B)$ definida por $p'(f) = p \circ f$. Pruebe que p' es una fibración.

4. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sean $f_0, f_1 : X \times I \to E$ funciones continuas. Pruebe que dadas homotopías $H :\ p \circ f_0 \simeq p \circ f_1$ y $G :\ f_0|_{X\times 0} \simeq f_1|_{X\times 0}$ tales que $H(x, 0, t) = p \circ G(x, 0, t)$, existe un levantamiento $\tilde{H} : X \times I \times I \to E$ de H que es una homotopía entre f_0 y f_1, y que es una extensión de G.

5. Sea $p : E \to B$ una fibración.

   a) Sea $\alpha : I \to B$ camino. Pruebe que existe $H : E_{\alpha(0)} \times I \to E$ tal que $p \circ H(x, t) = \alpha(t)$ y $H(x, 0) = x$, para todo $x \in E_{\alpha(0)}$, $t \in I$.

   b) Dado $\alpha : I \to B$ camino, consideramos $L_\alpha : E_{\alpha(0)} \to E_{\alpha(1)}$ definido por $L_\alpha(x) = H(x, 1)$. Pruebe que:

      - Si $\alpha \simeq_p \alpha'$, entonces $L_\alpha \simeq L_{\alpha'}$.
      - Si $\alpha \simeq_p cte_b$, entonces $L_\alpha \simeq \mathrm{id}_{E_b}$.
      - Dados $\alpha, \alpha' : I \to B$ tales que $\alpha(1) = \alpha'(0)$, entonces $L_{\alpha*\alpha'} \simeq L_{\alpha'} * L_\alpha$.

   c) Concluya que si B es arcoconexo, entonces todas las fibras son homotópicamente equivalentes. Si ademas p tiene la propiedad de l.u.c., entonces todas las fibras son homeomorfas.

6. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sean $e \in E$, $b = p(e)$.

   a) Pruebe que que si B es simplemente conexo, entonces la inclusión de la fibra E_b en E induce un epimorfismo $i_* : \pi_1(E_b, e) \to \pi_1(E, e)$.

   b) Pruebe que si la fibra E_b es simplemente conexa, entonces $p_* : \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b)$ es un isomorfismo.

   c) Pruebe que si E es simplemente conexo, entonces hay una biyección entre $\pi_1(B, b)$ y $\pi_0(E_b)$.

7. Sea $p : E \to B$ una fibración con l.u.c, con E arcoconexo y fijemos $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(b_0)$.

   a) Si $\pi_1(B, b_0) \cong \mathbb{Z}$, entonces o bien $\pi_1(E, e_0) \cong \mathbb{Z}$ o bien $\pi_1(E, e_0) = 0$.

   b) Si $\pi_1(B, b_0)$ es finito, entonces también lo es $\pi_1(E, e_0)$ y
   $$|\pi_1(B, b_0)| = |\pi_1(E, e_0)||p^{-1}(b_0)|.$$

   c) Si B es simplemente conexo y p revestimiento, entonces p es un homeomorfismo.

Revestimientos.

8. Pruebe que las siguientes funciones son revestimientos:

   a) $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$.

   b) $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ fijo.

   c) $p : S^n \to P^n$ la proyección al plano proyectivo.

   d) G grupo topológico, H subgrupo discreto de G y $p : G \to G/H$ la proyección al cociente.

   e) $p : E \to B$, $p(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$, donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z}$ ó $y \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{(z, w) \in S^1 \times S^1 : z = 1$ ó $w = 1\}$.

9. Pruebe que $p : \mathbb{R}_{>0} \to S^1$ definida por $p(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$ es un homeomorfismo local pero no es un revestimiento.

10. Pruebe que si $p : E \to B$ es un revestimiento, entonces p es abierta y por lo tanto es cociente.

11. Pruebe que si $p : E \to B$ es un revestimiento, la fibra $E_b = p^{-1}(b)$ es un subespacio discreto de E para todo $b \in B$. Pruebe además que si B es conexo, todas las fibras tienen el mismo cardinal.

12. Pruebe que si $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$ son revestimientos, entonces $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ también lo es. Use este resultado para calcular el grupo fundamental del toro.

13. Sean $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ revestimientos. Pruebe que si $q^{-1}(z)$ es finito para cada $z \in Z$, entonces $qp : X \to Z$ es un revestimiento.

14. Pruebe que los revestimientos son estables por cambio de base. En particular, si $p : E \to B$ es revestimiento y $A \subset B$, entonces $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ es revestimiento.

15. Sea B un espacio conexo y localmente conexo, y sea $p : E \to B$ un revestimiento. Pruebe que si C es una componente conexa de E, entonces $p|_C : C \to B$ es un revestimiento.

16. Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$ el revestimiento usual. Pruebe que $f : X \to S^1$ puede levantarse a una función continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $p\tilde{f} = f$ si y sólo si f es null homotópica.

17. Sea G un grupo topológico y X un G-espacio. Decimos que la acción es *libre* si $gx \neq x$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G$, $g \neq e$. Decimos que la acción es *propiamente discontinua* si para todo $x \in X$ existe U entorno abierto de x tal que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G$, $g \neq e$.

    a) Pruebe que si G es finito, X es Hausdorff y la acción es libre, entonces es propiamente discontinua.

    b) Pruebe que si G actúa en X y la acción es propiamente discontinua, entonces la proyección $p : X \to X/G$ es un revestimiento.

    c) Sea $X = \mathbb{R} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Sea $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ el subgrupo generado por ϕ,donde $\phi(z) = \bar{z} + 1 + i$. Pruebe que la acción de G en X es propiamente discontinua, y que X/G es homemomorfo a la banda de Möbius.

    d) Calcular el grupo fundamental de la banda de Möbius.

18. Sabiendo que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, calcule el grupo fundamental de los siguientes espacios.

    a) $X = S^1 \times [0, 1]$, un cilindro.

    b) $X = S^1 \times \mathbb{R}$, un cilindro infinito.

    c) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, el plano pinchado.

    d) $X = M$, la banda de Möbius.

    e) $X = T = S^1 \times S^1$, el toro usual.

    f) $X = \mathbb{R}^3 \setminus L$, donde L es una recta o un plano.

Aplicaciones del Teorema de Brouwer y Borsuk-Ulam.

19. Demuestre que si A es un retracto del disco D^2, entonces toda función continua $f : A \to A$ tiene un punto fijo.

20. Demuestre que si $f : S^1 \to S^1$ es null-homotópica, entonces tiene un punto fijo y además existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = -x$.

21. Teorema de Lusternik-Schnirelmann (para dimensión 2). Pruebe que si S^2 se cubre con tres abiertos, entonces uno de ellos contiene dos puntos antipodales.

22. Pruebe que si $f : S^2 \to S^2$ es continua y $f(x) \neq f(-x)$ para todo x, entonces f es sobreyectiva.