Topología

Segundo cuatrimestre - 2016

Práctica 7

Homotopía y el grupo fundamental

Homotopía

1. Pruebe que si $h, h' : X \to Y$ son homotópicas (rel $A \subseteq X$) y $k, k' : Y \to Z$ son homotópicas (rel $B \supseteq h(A)$), entonces $kh, k'h' : X \to Z$ son homotópicas (rel A).

2. Sea X es un espacio topológico. Pruebe que las aplicaciones i_0, $i_1 : X \to X \times I$ definidas por $i_j(x) = (x, j)$ ($j \in \{0, 1\}$) son equivalencias homotópicas con la misma inversa $p : (x, t) \in X \times I \mapsto x \in X$. Más aún, $i_0 \simeq i_1$.

3. Sean f, $g : X \to Y$ funciones continuas tal que $f \simeq g$. Pruebe que si f es una equivalencia homotópica, entonces g también lo es.

4. Dé un ejemplo de una función f que tenga inversa homotópica a izquierda (a derecha) pero no a derecha (a izquierda).

5. Pruebe que:

   a) Si f posee una inversa homotópica a izquierda y una inversa homotópica a derecha, entonces f es una equivalencia homotópica.

   b) f es una equivalencia homotópica si y sólo si existen functiones g, $h : Y \to X$ tales que $f \circ g$ y $h \circ f$ son equivalencias homotópicas.

6. Sean X un espacio, $A \subseteq X$ un subespacio y $a_0 \in A$. Supongamos que existe una función continua $H : X \times I \to X$ tal que:

   - $H(x, 0) = x$ para todo $x \in X$,
   - $H(A \times I) \subseteq A$ y
   - $H(a, 1) = a_0$ para todo $a \in A$.

   Entonces la aplicación cociente $q : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica.

7. Construya una retracción por deformación explícita del toro menos un punto a un grafo que consta de dos círculos que se intersecan en un punto. Más concretamente, dichos círculos son la longitud y la latitud del toro.

8. Pruebe que:

   a) Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio convexo, entonces es contráctil. Más aún, C tiene a cualquiera de sus puntos como retracto por deformación fuerte. Concluya que I y $\mathbb{R}$ son contráctiles.

b) Si X es contráctil, entonces es arcoconexo.

c) Todo retracto de un espacio contráctil es contráctil.

9. Pruebe que:

   a) Todo subespacio compacto convexo de $\mathbb{R}^n$ es retracto por deformación fuerte de $\mathbb{R}^n$.

   b) Si A es un retracto de X, entonces para todo Y espacio topológico, $A \times Y$ es retracto de $X \times Y$.

   c) Si X es un espacio conexo y $A \subseteq X$ es un subespacio discreto con más de un punto, entonces A no es un *retracto débil* de X, es decir, $\nexists\, r : X \to A$ continua tal que $r \circ i \simeq \mathrm{id}_A$.

10. Sean X, Y espacios topológicos. Sea $[X, Y]$ el conjunto de clases homotópicas de funciones continuas de X en Y. Pruebe que:

    a) Si Y es contráctil, entonces $[X, Y]$ tiene un sólo elemento.

    b) Si X es contráctil e Y arcoconexo, entonces $[X, Y]$ tiene un sólo elemento.

    c) Hay una biyección natural $[*, Y] \to \pi_0(Y)$.

    d) Más generalmente, si Y es contráctil, entonces hay una biyección natural $[Y, X] \to \pi_0(X)$.

    e) Si X' es otro espacio y $X \simeq X'$, entonces hay una biyección entre $\pi_0(X)$ y $\pi_0(X')$.

11. Sea $f : X \to Y$ una función continua y sea Z un espacio topológico. Definimos aplicaciones

$$f^* : [g] \in [Y, Z] \mapsto [g \circ f] \in [X, Z],$$
$$f_* : [g] \in [Z, X] \mapsto [f \circ g] \in [Z, Y].$$

    a) Las funciones f^* y f_* están bien definidas.

    b) Si $f' : X \to Y$ es otra función continua y $f \simeq f'$, entonces $f^* = f'^*$ y $f_* = f'_*$.

    c) Si f es una equivalencia homotópica, entonces f^* y f_* son biyecciones.

12. Pruebe que si el espacio X se retrae por deformación fuerte a $x \in X$, entonces para cada entorno $U \ni x$ existe un entorno $V \subseteq U$ de x de manera que la inclusión $V \hookrightarrow U$ es null-homotópica.

13. Sea X el *peine*, esto es, el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, x = 0 \vee x^{-1} \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}.$$

    Sea $x_0 = (0, 1) \in X$.

    a) El espacio X es contráctil.

    b) No existe una homotopía *relativa a* x_0 entre la identidad $\mathrm{id}_X : X \to X$ y la función constante $c : x \in X \mapsto x_0 \in X$.

    Esto nos dice que toda contracción de X a x_0 mueve al punto x_0.

c) Por otro lado, el espacio Y que resulta de pegar dos copias de X identificando los puntos x_0 en un solo punto *no* es contráctil.

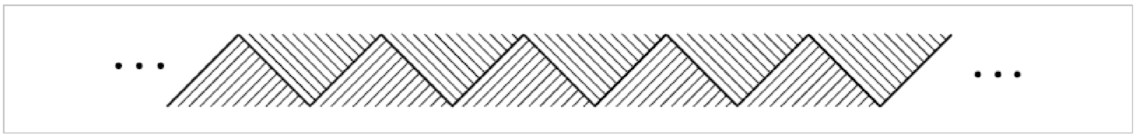
d) La inclusión $i : X \to [0,1] \times [0,1]$ es una equivalencia homotópica pero no un retracto.

14. *a*) Sea $X \subseteq \mathbb{R}^2$ el subespacio

$$X = [0,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\} \times [0, 1-r].$$

Pruebe que X se retrae por deformación fuerte a cualquier punto en $[0,1] \times \{0\}$ pero no se retrae a ningún otro punto.

b) Sea $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ el subespacio que se obtiene uniendo infinitas copias de X como en la figura. Pruebe que Y es contráctil pero no se retrae por deformación fuerte a ningún punto.



c) Sea $Z \subseteq Y$ la poligonal marcada en la figura. Pruebe que existe una homotopía $H : \mathrm{id}_Y \simeq H_1$ tal que $H_t(Z) \subseteq Z$ para todo $t \in I$ y $H_1(Y) \subseteq Z$ (y en particular $Z \hookrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica) pero que Z no es un retracto por deformación fuerte de Y.

15. Sea X un espacio topólogico conexo que se puede describir como una unión finita de esferas de dimensión 2 de manera que dos cualesquiera de ellas se intersecan en a lo sumo un punto. Pruebe que X es homotópicamente equivalente a un wedge de S^1's y S^2's.

16. Si X es un espacio, el *cono* de X es el espacio $CX = X \times I/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia $(x,1) \sim (y,1)$ para todo par de puntos x, $y \in X$. Si $x \in X$ y $t \in I$, escribimos $[x,t] \in CX$ a la clase de equivalencia de (x,t) en $X \times I$.

a) La función $i : x \in X \mapsto [x,0] \in CX$ es continua, inyectiva y cerrada.

b) El espacio CX es contráctil.

c) X es contráctil si y sólo si $i : X \to CX$ es un retracto.

d) $f : X \to Y$ es homotópica a una función constante si y sólo si f se puede extender a una función continua $\bar{f} : CX \to Y$.

17. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Recordemos que el cilindro $M(f)$ de f es el espacio de adjunción que se obtiene de f y la inclusión cerrada $X \hookrightarrow X \times I$.

a) Pruebe que la inclusión $Y \hookrightarrow M(f)$ es un retracto por deformación fuerte.

b) Pruebe que dos espacios X e Y son homotópicamente equivalentes si y sólo si son retractos por deformación fuerte de un tercer espacio Z.
Sugerencia: Considere el cilindro de una equivalencia homotópica $f : X \to Y$.

El grupo y el grupoide fundamental

18. Sea X es un espacio topológico y, $x_0 \in X$. Sea

$$\Omega(X, x_0) = \{\alpha \in C(I, X) : \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$$

con la topología de subespacio de la topología compacto-abierta. Pruebe que hay una biyección

$$\pi_0(\Omega(X, x_0)) = \pi_1(X, x_0).$$

19. Sea X un espacio topológico, $x_0 \in X$ y sea $s \in S^1$ un punto cualquiera. Sea

$$[(S^1, s), (X, x_0)] = \{[f] | f : S^1 \to X \text{ continua tal que } f(s) = x_0\}$$

donde $[f] = [g]$ si $f \simeq g \operatorname{rel} \{s\}$. Pruebe que $\pi_1(X, x_0) = [(S^1, s), (X, x_0)]$.

20. Sean $x_0, x_1 \in X$ dos puntos en un espacio arcoconexo X. Probar que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y sólo si para todo par de caminos $x_0 \xrightarrow{\omega,\omega'} x_1$ se tiene $\widehat{\omega} = \widehat{\omega'}$.

21. Pruebe que la aplicación π_1 : **Top** $\to$ **Grpd** es funtorial.

22. Pruebe que hay un isomorfismo de grupoides $\pi_1(X_1) \coprod \pi_1(X_2) \cong \pi_1(X_1 \coprod X_2)$.

23. Pruebe que hay un isomorfismo de grupoides $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$. Concluya que $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ es isomorfo a $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$.

24. Sea X un espacio, sea $A \subseteq X$ un subespacio y sea $i : A \to X$ la inclusión.

    a) Si $r : X \to A$ es una retracción, entonces cualquiera sea $a_0 \in A$ el morfismo $r_* : \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(A, a_0)$ es un epimorfismo y el morfismo $i_* : \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ es un monomorfismo.

    b) Si A es un retracto por deformación, entonces $\pi_1(A)$ y $\pi_1(X)$ son grupoides equivalentes y, en particular, para todo $a_0 \in A$ se tiene que $\pi_1(X, a_0) \cong \pi_1(A, a_0)$.

25. Sea $(G, \cdot, e)$ un grupo topológico. Si α, $\beta \in \Omega(G, e)$, sea

$$\alpha \odot \beta : t \in I \mapsto \alpha(t) \cdot \beta(t) \in G.$$

Esto define una operación $\odot$ en el conjunto $\Omega(G, e)$ que hace de él un grupo.

    a) La operación $\odot$ induce una operación, que también notamos $\odot$, sobre $\pi_1(G, e)$ y con ésta $\pi_1(G, e)$ es un grupo.

    b) Esta estructura de grupo coincide con la estructura usual de $\pi_1(G, e)$.

    c) $\pi_1(G, e)$ es un grupo abeliano.