Topología

Segundo cuatrimestre - 2016

Práctica 6

Espacios de adjunción e introducción a CW-complejos

Sean X, Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ un subespacio cerrado y $f : A \to Y$ una función continua. Denotaremos por $X \cup_f Y$ al espacio de adjunción correspondiente, junto con las funciones naturales $\bar{i} : Y \to X \cup_f Y$, $\bar{f} : X \to X \cup_f Y$.

1. Pruebe que Y es un retracto de $X \cup_f Y$ si y sólo si existe una función $g : X \to Y$ tal que $g|_A = f$. Deduzca que si A es un retracto de X, entonces Y es un retracto de $X \cup_f Y$.

2. Si X e Y son compactos, entonces $X \cup_f Y$ es compacto.

3. Si X e Y son T_1, entonces $X \cup_f Y$ es T_1.

4.
   a) Si A es no vacío y X e Y son conexos, entonces $X \cup_f Y$ es conexo.
   b) Si A es no vacío y X e Y son arco-conexos, entonces $X \cup_f Y$ es arco-conexo.
   c) Si Y es conexo y si A interseca cada componente conexa de X, entonces $X \cup_f Y$ es conexo.
   d) Si A es conexo y no vacío y $X \cup_f Y$ es conexo, entonces Y es conexo.

5. Sean $X' \subseteq X$ e $Y' \subseteq Y$ son subespacios tales que $A \subseteq X'$ y $f(A) \subseteq Y'$. Entonces $X' \cup_f Y'$ es subespacio de $X \cup_f Y$.

6.
   a) Sean Y' un espacio topológico y $g : Y \to Y'$ una función continua. Dado que Y puede verse como un subespacio cerrado de $X \cup_f Y$, podemos construir el espacio $(X \cup_f Y) \bigcup_g Y'$. Por otro lado, podemos construir el espacio de adjunción $X \cup_{g \circ f} Y$. Pruebe que hay un homeomorfismo natural $(X \cup_f Y) \bigcup_g Y' \cong X \cup_{g \circ f} Y$.
   b) Sea ahora $K : X \to X'$ una inclusión cerrada, de manera que tiene sentido el espacio de adjunción $X' \cup_f Y$. Entonces $X' \cup_f Y \cong X' \bigcup_{\bar{f}} (X \cup_f Y)$.

7. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Consideremos $f' : X \times \{0\} \to Y$ definida por $f'(x, 0) = f(X)$. Como $X \times \{0\}$ es un subespacio cerrado de $X \times I$, podemos definir el espacio de adjunción $M(f) := Y \cup_{f'} (X \times I)$, que se denomina el *cilindro* de f. El *cono* de f se define como $C(f) = M(f)/(X \times 1)$.

   Pruebe que si X e Y son T_2, entonces tanto $M(f)$ como $C(f)$ son T_2.

8. Exhiba varias estructuras de CW-complejo para el plano proyectivo $\mathbb{R}(P^2)$, S^n, D^n, el toro $S^1 \times S^1$, la banda de Möbius y la botella de Klein.

9. Sean $v, e, f \in \mathbb{N}$ tales que $v - e + f = 2$. Construya una estructura celular de S^2 que tenga v 0-celdas, e 1-celdas y f 2-celdas.

10. Sea X un CW-complejo finito. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:
    - X^1 es conexo.
    - X es arco-conexo.
    - X es conexo.

11. Sean X, Y CW-complejos finitos. Pruebe que $X \times Y$ tiene estructura de CW-complejo.

12. Sean X, Y CW-complejos finitos. Una función continua $f : X \to Y$ se dice *celular* si para cada $n \geq 0$ cumple $f(X^n) \subseteq Y^n$. Pruebe que si $A \subseteq X$ es un subcomplejo y $f : A \to Y$ es un morfismo celular, entonces el espacio de adjunción $X \cup_f Y$ tiene una estructura de CW-complejo.

    Concluya que el cociente de un CW-complejo por un subcomplejo tiene estructura de CW-complejo.