

Topología
Segundo cuatrimestre - 2016
Práctica 4
Compacidad y axiomas de separación

Compacidad

1. Sean τ, τ' dos topologías en X .
 - a) Pruebe que si τ' es más fina que τ y (X, τ') es compacto, entonces (X, τ) es compacto.
 - b) Pruebe que si (X, τ) y (X, τ') son compactos y Hausdorff, entonces o bien $\tau = \tau'$ o bien τ y τ' no son comparables.
2. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\tau_c = \{U \in \tau : X \setminus U \text{ es compacto y } T_2\} \cup \{\emptyset\}$. Pruebe que τ_c es una topología sobre X .
3. Pruebe que si X tiene la topología del complemento finito, entonces es compacto.
4. Decida si $[0, 1]$ es compacto para
 - a) la topología $\{U : [0, 1] \setminus U \text{ es numerable o igual a } [0, 1]\}$.
 - b) la topología de subespacio de \mathbb{R}_l .
5. Pruebe que S_Ω no es compacto pero es secuencialmente compacto.
6. Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios topológicos T_1 tales que $X_n \subseteq X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ con la topología final respecto de las inclusiones $\iota_n : X_n \rightarrow X$. Probar que si $K \subseteq X$ compacto, entonces $K \subseteq X_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
7. Sea X metrizable. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - a) X es acotado para toda métrica que induzca la topología de X .
 - b) Toda función continua $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada.
 - c) X es compacto.
8. Sean X e Y espacios topológicos, con X compacto e Y Hausdorff. Muestre que si una función $f : X \rightarrow Y$ es continua, entonces es cerrada.
9. Sean X e Y espacios topológicos, con Y compacto y Hausdorff. Pruebe que una función $f : X \rightarrow Y$ es continua si y sólo si su gráfico $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.
10. Sea $f : X \rightarrow Y$ función continua. Son equivalentes:
 - a) f es cerrada y $f^{-1}(\{y\})$ es compacto para todo $y \in Y$.
 - b) f es cerrada y $f^{-1}(K)$ es compacto para todo $K \subseteq Y$ compacto.
 - c) Para todo Z espacio topológico, $id_Z \times f : Z \times X \rightarrow Z \times Y$ es cerrada.
 - d) f es propia.
11. Sea $f : X \rightarrow Y$ suryectiva y propia. Pruebe que si X es Hausdorff, entonces Y también lo es.

Compacidad local

12. Pruebe que \mathbb{Q} no es localmente compacto.
13. Pruebe que $[0, 1]^\omega$ no es localmente compacto con la topología uniforme.
14. Pruebe que si $\prod_{i \in I} X_i$ es localmente compacto y $X_i \neq \emptyset$ para todo i , entonces cada X_i es localmente compacto y todos los X_i , salvo una cantidad finita, son compactos.
15. Pruebe que si X es localmente compacto y $f : X \rightarrow Y$ es continua y abierta, entonces $f(X)$ es localmente compacto. Halle un ejemplo que muestre que la hipótesis f abierta es necesaria.

Compactificación de Alexandroff

16. Pruebe que la compactificación a un punto de \mathbb{N} es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología subespacio de \mathbb{R} .
17. Usando la proyección estereográfica $p : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$p(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

pruebe que la compactificación a un punto de \mathbb{R}^n es homeomorfa a S^n .

18. Pruebe que si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces f se extiende a un homeomorfismo entre sus compactificaciones a un punto.

Axiomas de separación

19. Pruebe que si X es regular, entonces dos puntos distintos cualesquiera de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.
20. Pruebe que si X es normal, entonces todo par de cerrados disjuntos de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.
21. Pruebe que un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.
22. Pruebe que si X tiene la topología del orden, entonces X es regular.
23. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Pruebe que si $\prod X_\alpha$ es Hausdorff ó regular ó normal, entonces también lo es cada X_α .
24. Sea X un conjunto y sean τ, τ' topologías en X tales que $\tau \subset \tau'$. Suponiendo que X es Hausdorff (o regular o normal) con una de estas topologías, ¿qué puede deducirse de X con la otra topología?
25. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ continuas, Y Hausdorff. Pruebe que $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X .
26. Pruebe que si X es normal y conexo entonces tiene un solo punto o es no numerable.
27. Sea Z un espacio topológico. Si Y es un subespacio de Z , decimos que Y es retracto de Z si existe una función continua $r : Z \rightarrow Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.
 - a) Pruebe que si Z es Hausdorff e Y es un retracto de Z , entonces Y es cerrado en Z .
 - b) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ con dos elementos. Pruebe que A no es un retracto de \mathbb{R}^2 .
 - c) Pruebe que S^1 es un retracto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
28. Pruebe que si $\{f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ es una familia de funciones continuas que separan puntos de cerrados, entonces es inicial.

29. Pruebe que si Y es normal con base \mathcal{B} , entonces Y es subespacio de $[0, 1]^J$ con $J \subset \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.
30. Pruebe que $\mathbb{R}_I \times \mathbb{R}_I$ no es normal, pero es completamente regular.
31. Sea X completamente regular. Sean A, B cerrados disjuntos de X . Pruebe que si A es compacto, entonces existe una función continua $f : X \rightarrow I$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.
32. Pruebe que si X es compacto y Hausdorff, entonces es normal.
33. Pruebe que si X es localmente compacto y Hausdorff, entonces es completamente regular.

Compactificación de Stone-Čech

34. Sea Y una compactificación T_2 de X , y sea $\beta(X)$ la compactificación de Stone-Čech. Pruebe que existe una función cerrada y suryectiva $g : \beta(X) \rightarrow Y$ que se restringe a la identidad de X .
35.
 - a) Pruebe que si $f : S_\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es eventualmente constante.
 - b) Pruebe que la compactificación en un punto de S_Ω y la compactificación de Stone-Čech son equivalentes.
 - c) Concluya que toda compactificación de S_Ω es equivalente a la compactificación en un punto.
36. Sea X completamente regular. Pruebe que X es conexo si y sólo si $\beta(X)$ es conexo.
37. Sea X discreto.
 - a) Pruebe que si $A \subset X \subset \beta(X)$, entonces \bar{A} y $\overline{X \setminus A}$ son disjuntos, donde las clausuras se toman en $\beta(X)$.
 - b) Pruebe que si U es abierto en $\beta(X)$, entonces \bar{U} es abierto en $\beta(X)$.
 - c) Pruebe que $\beta(X)$ es totalmente disconexa.

Grupos topológicos

Un *grupo topológico* G es un grupo y un espacio topológico tal que las funciones $(x, y) \mapsto x \cdot y$, $x \mapsto x^{-1}$ y $x \mapsto e$ son continuas.

38. Pruebe que $(\mathbb{R}, +)$, (S^1, \cdot) y $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ son grupos topológicos.
39. Pruebe que G es un grupo topológico si y sólo si la función $H : G \times G \rightarrow G$, $H(g, h) = g \cdot h^{-1}$ es continua.
40. Pruebe que para cada $a \in G$, las funciones $L_a : G \rightarrow G$ y $R_a : G \rightarrow G$, definidas por $L_a(g) = a \cdot g$, $R_a(g) = g \cdot a$ son homeomorfismos.
41. Sea G un grupo topológico, sea e el neutro de G y sea U abierto que contiene a e . Pruebe que existe V abierto que contiene a e tal que $V \cdot V \subset U$ y $V^{-1} = V$.
42. Pruebe que si un grupo topológico G es T_0 , entonces es T_2 .
43. Pruebe que si H es un subgrupo de un grupo topológico G , entonces la clausura de H es también un subgrupo. Pruebe que si H es invariante, entonces su clausura también.
44. De los grupos topológicos $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$, $SO(n, \mathbb{R})$, decida cuáles son compactos y cuáles son conexos.