# Topología

Segundo cuatrimestre - 2016

Práctica 10

**Homología**

---

**Preliminares Algebraicos: Sucesiones exactas y homología.**

1. (Lema de los 5) Dado el siguiente diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & M_5 \arrow[d, "e"'] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \end{tikzcd}$$

   Pruebe que:

   *a*) Si $b$ y $d$ son mono y $a$ es epi, entonces $c$ es mono.

   *b*) Si $b$ y $d$ son epi y $e$ es mono, entonces $c$ es epi.

   *c*) Concluya que si $a, b, d$ y $e$ son iso, entonces $c$ es iso.

2. Sea $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ una sucesión exacta corta. Pruebe que son equivalentes:

   *a*) Existe $B \xrightarrow{r} A$ tal que $ri = \mathrm{id}_A$.

   *b*) Existe $A \xrightarrow{s} B$ tal que $ps = \mathrm{id}_C$.

   *c*) La sucesión es isomorfa a $0 \to A \to A \oplus C \to C \to 0$, donde los morfismos están dados por la inclusión y la proyección canónica.

3. Halle todos los grupos abelianos posibles $M$ en las siguientes sucesiones exactas cortas:

   *a*) $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to M \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to 0$.

   *b*) $0 \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to M \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$.

4. Sean $(C_*, d)$ y $(D_*, d')$ complejos. Pruebe que $(C_* \oplus D_*, d \oplus d')$ es un complejo y que

$$H_*(C \oplus D) = H_*(C) \oplus H_*(D).$$

5. Sea $m \in \mathbb{N}$. Calcule la homología del siguiente complejo de cadenas:

$$\cdots \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \dots \qquad d_{2n}(x) = 0 \quad d_{2n+1}(x) = mx$$

**Homología Simplicial.**

6. Exhiba triangulaciones de la esfera $S^n$, el toro, el plano proyectivo y la botella de Klein. A partir de ellas, calcule su homología simplicial.

7. Pruebe que un grafo simple (es decir, un complejo simplicial de dimensión 1) y conexo $K$ es un arbol si y sólo si $H_1(K) = 0$.

**Homología Singular.**

8. Pruebe que si $i : A \to X$ es un retracto, entonces $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ es un monomorfismo para todo $n \geqslant 0$, y que si $i$ es retracto por deformación débil, entonces $i_*$ es isomorfismo.

9. Sea $A \subset X$. Pruebe que $H_0(X, A) = 0$ si y sólo si $A$ interseca todas las componentes arco conexas de $X$.

10. Sea $X$ espacio topológico, $x_0 \in X$. Pruebe que $H_n(X, x_0) \simeq \tilde{H}_n(X)$ para todo $n$.

11. Sea $A \subseteq X$ un retracto.

    *a*) Pruebe que $H_n(X) = H_n(A) \oplus H_n(X, A)$.

    *b*) Si además $A$ es un retracto por deformación débil de $X$, entonces $H_n(X, A) = 0$ para todo $n \geqslant 0$.

12. Pruebe que si $(X, A, B)$ es una terna con $B \subseteq A \subseteq X$, entonces existe una sucesión exacta larga

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, B) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

13. Sea $X$ un espacio contráctil y sea $A$ un subespacio de $X$. Pruebe que $H_n(X, A)$ es isomorfo a $\tilde{H}_{n-1}(A)$.

14. Sea $(X, A)$ un par bueno. Si $CA$ es el *cono* $(A \times I)/(A \times \{0\})$ de $A$, considere $X \cup CA$ el espacio que se obtiene de identificar la base del cono $A \times \{1\}$ con $A \subseteq X$. Pruebe que $H_n(X, A) \simeq \tilde{H}_n(X \cup CA)$.

15. *a*) Sea $\{X_i\}$ una familia finita de espacios topológicos y sea $x_i \in X_i$ tal que $(X_i, x_i)$ es un par bueno. Si $X = \bigvee_i X_i$ es la unión de los espacios, identificando todos los puntos base $x_i$, pruebe que $\tilde{H}_n(X) = \oplus_i \tilde{H}_n(X_i)$.

    *b*) Calcule $\tilde{H}_n(\bigvee_{i \in I} S^k)$.

16. Calcule los grupos de homología de $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{x_1, \cdots, x_m\}$

17. Calcule la homología del cociente de $S^2$ que se obtiene de identificar el polo norte y el polo sur en un punto.

18. Pruebe que la función cociente $q : S^1 \times S^1 \to S^2$ que colapsa el subespacio $S^1 \vee S^1 \subset S^1 \times S^1$ en un punto no es null-homotópica mostrando que induce isomorfismo en $H_2$.

19. Sea $X$ espacio topológico. Muestre que $\tilde{H}_n(X) \simeq \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$ para todo $n \geqslant 0$, donde $\Sigma X$ es la *suspensión* de $X$, que se define como sigue $\Sigma X = X \times I/\sim$, $(x, 0) \sim (x', 0)$, $(x, 1) \sim (x', 1)$ para todo $x, x' \in X$.

20. Sea $X$ un espacio topológico tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ con $U_i$ abiertos tales que toda intersección $\bigcap_{i=1}^{k} U_{i_k}$ es vacía o tiene homología reducida trivial. Pruebe que $\tilde{H}_i(X) = 0$ para todo $i \geqslant n-1$ y muestre con un ejemplo que la desigualdad es óptima.

21. Pruebe que $S^n$ no es un retracto de $D^{n+1}$ y que toda función continua $f : D^n \to D^n$ tiene algún punto fijo.

22. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Pruebe que toda función continua e inyectiva $f : X \to \mathbb{R}^n$ es abierta.