Topología

Segundo cuatrimestre - 2016

Práctica 1

Espacios Topológicos

Ejemplos

1. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Muestre que

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

es una topología sobre Y. Llamamos a τ_Y la *topología inducida* por τ sobre Y o la *topología subespacio*.

2. Sean X un conjunto infinito, $x_0 \in X$ y $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ el conjunto de las partes de X que tienen complemento finito o que no contienen a x_0. Muestre que τ es una topología y describa sus cerrados.

3. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los cerrados acotados de $\mathbb{R}$ en su topología usual, junto con $\mathbb{R}$. Pruebe que existe una topología en $\mathbb{R}$ para la cual $\mathcal{F}$ es el conjunto de todos los cerrados.

4. Decimos que un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ es radialmente abierto si su intersección con toda recta que pasa por uno de sus puntos es un abierto de ésta. Muestre que el conjunto de todos los conjuntos radialmente abiertos de $\mathbb{R}^2$ es una topología sobre $\mathbb{R}^2$ y compárela con la topología usual.

Construcción de topologías

5. Sea X un conjunto. Un *sistema de filtros de entornos $\mathcal{F}$ en X* es una regla que a cada elemento $x \in X$ asigna una familia $\mathcal{F}_x \in \mathcal{P}(X)$ de manera que

(A1) si $x \in X$, $\mathcal{F}_x \neq \emptyset$;

(A2) si $x \in X$ y $A \in \mathcal{F}_x$, entonces $x \in A$;

(A3) si $x \in X$, $A \in \mathcal{F}_x$ y $B \in \mathcal{P}(X)$ son tales que $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}_x$;

(A4) si $x \in X$ y A, $B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_x$;

(A5) si $x \in X$ y $A \in \mathcal{F}_x$, entonces existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $B \subseteq A$ y $B \in \mathcal{F}_y$ para todo $y \in B$.

Pruebe que:

a) Si (X, τ) es un espacio topológico y para cada $x \in X$ definimos

$$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{existe } U \in \tau \text{ tal que } x \in U \subseteq A\},$$

entonces $\mathcal{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X.

b) Si $\mathcal{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X y definimos

$$\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{para todo } x \in A \text{ es } A \in \mathcal{F}_x\} \cup \{\emptyset\},$$

entonces τ es una topología sobre X.

c) Las construcciones de los items a) y b) son inversas.

6. Sea X un conjunto. Una función $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un *operador de clausura en* X si

   (C1) $c(\emptyset) = \emptyset$;

   (C2) si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $A \subseteq c(A)$;

   (C3) si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $c(c(A)) = c(A)$;

   (C4) si A, $B \in \mathcal{P}(X)$, entonces $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$;

   Pruebe que

   a) Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces la función
   $$c : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \overline{A} \in \mathcal{P}(X)$$
   es un operador de clausura en X.

   b) Si $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un operador de clausura en X, entonces el conjunto
   $$\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : c(X \setminus U) = X \setminus U\}$$
   es una topología sobre X.

   c) Las construcciones de los items a) y b) son inversas.

7. Sea X un conjunto y sea $B \subseteq X$. Pruebe que la función
   $$c : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A \neq \emptyset \\ \emptyset \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A = \emptyset \end{cases}$$
   es un operador de clausura en X. Describa los abiertos de la topología correspondiente.

Clausura, interior, frontera

8. Sea X un espacio topológico y sean A, $B \subseteq X$. Pruebe las siguientes inclusiones y decida cuáles pueden ser estrictas:

   a) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

   b) $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ cuando A es abierto;

   c) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$;

   d) $\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$;

   e) $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^\circ \subseteq (\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A)^\circ$ y

   f) $(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A)^\circ \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^\circ$.

9. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Pruebe que:

   a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus A^\circ$;

   b) $X \setminus \partial A = A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ$;

   c) $\overline{A} = A \cup \partial A$;

   d) $A^\circ = A \setminus \partial A$;

   e) A es abierto sii $A \cap \partial A = \emptyset$ y

   f) A es cerrado sii $\partial A \subseteq A$.

10. *Topología del complemento finito.* Sea X un conjunto y sea $\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Pruebe que τ es una topología sobre X. Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a esta topología.

11. Sean X un conjunto no vacío y $x_0 \in X$. Pruebe que:

    a) $\{U \in \mathcal{P}(X) : x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre X.

    b) $\{U \in \mathcal{P}(X) : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$ es una topología sobre X.

    Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a cada una de estas topologías.

12. *Topología del orden.* Considere el conjunto $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden lexicográfico y determine la clausura y el interior de los siguientes subconjuntos de X.

    a) $\{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$,

    b) $\{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\}$,

    c) $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$,

    d) $\{(x, 1/2) : 0 < x < 1\}$,

    e) $\{(1/2, y) : 0 < y < 1\}$.

13. Pruebe que todo cerrado de $\mathbb{R}^2$ es la frontera de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Bases y sub-bases

14. Sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de topologías en X. Pruebe que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \tau_\alpha$ es una topología en X. ¿Es $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \tau_\alpha$ una topología en X?

15. Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Pruebe que existe una topología $\sigma(\mathcal{A})$ sobre X que cumple que

    - todo elemento de $\mathcal{A}$ es abierto para $\sigma(\mathcal{A})$, y
    - si τ es una topología sobre X tal que todo elemento de $\mathcal{A}$ es abierto para τ, entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \tau$.

    En otras palabras, $\sigma(\mathcal{A})$ es la topología menos fina que contiene a $\mathcal{A}$ (la mínima en el orden dado por la inclusión). La topología $\sigma(\mathcal{A})$ es la *topología generada* por $\mathcal{A}$.

    Describa la topología generada por $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ sobre el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$.

16. Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado. Consideremos $\mathcal{S} = \{S_x : x \in X\}$ y $\mathcal{R} = \{R_x : x \in X\}$, donde $R_x = \{y \in Y : x < y\}$. Pruebe que $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ es una sub-base para la topología del orden.

17. Considere las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$:
    $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$,
    $\mathcal{B}_2 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$,
    $\mathcal{B}_3 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$,
    $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_1 \cup \{B \setminus K : B \in \mathcal{B}_1\}$, donde $K = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
    $\mathcal{B}_5 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$,
    $\mathcal{B}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$,
    $\mathcal{B}_7 = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \setminus B \text{ es finito}\}$.

    a) Muestre que cada uno de $\mathcal{B}_1$, …, $\mathcal{B}_7$ es una base para una topología en $\mathbb{R}$ y compare las topologías correspondientes.

b) Muestre que $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ es una sub-base para la topología generada por $\mathcal{B}_1$.

c) Determine la clausura del conjunto K en cada una de las siete topologías.

18. Sea $\mathcal{B} = \{(a,b) : a < b\} \cup \{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Muestre que $\mathcal{B}$ es base de una topología sobre $\mathbb{R}$. Describa el interior de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ con respecto a ella.

19. *Topología Zariski.* Considere $k[x] = k[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables sobre un cuerpo k. Para cada subconjunto $S \subseteq k[x]$, se define el conjunto algebraico dado por S como

$$V(S) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in k^n : p(z_1, \ldots, z_n) = 0, \forall\, p \in S\}.$$

Verifique las siguientes propiedades:

a) $V(S) = V(I_S)$, donde I_S es el ideal generado por S.

b) $V(\{0\}) = k^n$ y $V(\{1\}) = \emptyset$. Si $S \subseteq T$, entonces $V(S) \supseteq V(T)$.

c) Si $I, J \subseteq k[x]$ son ideales, entonces $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.

d) Si $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de ideales, entonces $V\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} V(I_\alpha)$.
Los items b), c) y d) muestran que los conjuntos algebraicos verifican los axiomas de los cerrados de una topología. Esta es la topología Zariski de k^n.

e) Los conjuntos $D_f = k^n \setminus V(\{f\})$ forman una base de dicha topología.

f) Si $f \neq 0$, entonces D_f es denso.

Redes

20. Sea (X, τ) un espacio topológico. Pruebe que las redes convergentes verifican las siguientes propiedades:

a) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a la constante.

b) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x, entonces toda sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

c) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

d) Sean Λ un conjunto dirigido, y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea Γ_α un conjunto dirigido. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x_k^\alpha)_{k\in\Gamma_\alpha}$ que converge a $x^\alpha \in X$, y que además $(x^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a $x \in X$. Considere $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha\in\Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta\ \forall \beta \in \Lambda.$$

Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \mapsto x^\alpha_{k_\alpha}$ converge a x.

21. Sea (X, τ) un espacio topológico. Pruebe que

$$\overline{A} = \{x \in X :\ \exists (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset A,\ \text{y } x_\alpha \to x\}$$

22. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación de la red si para todo $A \in \mathcal{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ. Pruebe que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ que converge a x.

Sugerencia: para probar $\Rightarrow$), considere como conjunto dirigido el formado por los pares (α, U) con $\alpha \in \Lambda$ y U un entorno (abierto) de x que contiene a x_α.

Funciones continuas

23. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Pruebe que cada una de las siguientes condiciones sobre f es equivalente a que f sea continua:

    a) Para todo $x \in X$ y para todo $A \in \mathcal{F}_y$ $(y = f(x))$ existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $f(B) \subset A$.

    b) Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset X$ tal que $x_\alpha \to x$ se tiene que $f(x_\alpha) \to f(x)$.

    c) Para todo $A \subset X$ se tiene $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

    d) Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de Y, entonces $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

    e) Si $\mathcal{S}$ es una sub-base para la topología de Y, $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.

24. Sean X un espacio topológico y $E \subseteq X$. Sea $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ la función característica de E, esto es,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

    Pruebe que χ_E es continua en x si y sólo si x no pertenece a la frontera de E.

25. *a*) Sean X, Y conjuntos ordenados con la topología del orden. Pruebe que si $f : X \to Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.

    b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Pruebe que g es un homeomorfismo.

    c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

    Pruebe que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

26. Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas.

    a) Pruebe que el conjunto $\{x \in X : \ f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

    b) Sea $h : X \to Y$ la función $h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$. Pruebe que h es continua.

27. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos del espacio X tal que $X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$. Sea $f : X \to Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

    a) Pruebe que si cada A_α es abierto, entonces f es continua.

    b) Pruebe que si $\mathcal{A}$ es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.

    c) Encuentre un ejemplo donde la colección $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.

    d) Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos valores de α. Muestre que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.