Topología Diferencial- 2024
Práctica Uno
Teorema de Sard y aplicaciones - Transversalidad

1. Probar, sin usar el teorema de Sard, que si N es una subvariedad de M con $\dim N < \dim M$, entonces N tiene medida cero en M (notar que, usando Sard, el resultado sale trivialmente).

2. Dos variedades $M, N \subset \mathbb{R}^n$ se dicen que están en posición general (o que son transversales) si para todo punto $p \in M \cap N$ se tiene que $T_pM + T_pN = T_p\mathbb{R}^n (= \mathbb{R}^n)$. Probar que, dadas $M, N \subset \mathbb{R}^n$, para casi todo $a \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $M + a$ y N están en posición general. Deducir que, en particular, si $\dim M + \dim N < n$, para casi todo $a \in \mathbb{R}^n$, $M + a$ y N son disjuntas.

3. Sabemos que existen curvas de Peano (space-filling curves), es decir funciones continuas $\omega : I \to I \times I$ (o más generalmente, $\omega : I \to I^n$, para $n \geq 2$) que son sobreyectivas (notar que no pueden ser inyectivas, porque resultarían homeomorfismos y esto no es posible por el teorema de invariancia de dimensión). Probar que estas curvas no pueden ser diferenciables.

4. Usando Sard y el hecho de que podemos aproximar funciones continuas con funciones diferenciables, probar (sin usar van Kampen) que las esferas S^n son simplemente conexas para $n \geq 2$.

5. Sea $f : S^1 \to \mathbb{R}$ diferenciable y sea $y \in \mathbb{R}$ un valor regular. Probar que:
   a) $f^{-1}(y)$ tiene un número par de puntos.
   b) Si $f^{-1}(y)$ tiene $2k$ puntos, entonces f tiene al menos $2k$ puntos críticos.

6. Sean M y N variedades diferenciables, con M compacta. Sea $f : M \to N$ diferenciable y sea $y \in N$ valor regular de f.
   a) Probar que la fibra $f^{-1}(y)$ es finita (o vacía).
   b) Para todo valor regular $y \in N$, definimos $g(y)$ como el cardinal de la fibra $f^{-1}(y)$. Probar que g es una función localmente constante (como función definida en el subespacio de valores regulares).

7. Sean M y N variedades diferenciables de la misma dimensión, con M compacta y sin borde. Sean $f, g : M \to N$ diferenciables y diferenciablemente homotópicas (es decir, que existe una homotopía suave $H : M \times I \to N$). Probar que, si $y \in N$ es un valor regular para f y g, entonces
$$\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \ (mod\ 2)$$
   (Sugerencias: suponer primero que y es valor regular para la homotopía H y usar que el borde de las variedades compactas de dimensión 1 tienen un número par de puntos. Luego probarlo para y general, usando que $\#f^{-1}(y)$ y $\#g^{-1}(y)$ son localmente constantes.)

8. Sea M variedad diferenciable y $A \subset M$ subespacio conexo. Probar que, si existe una retracción diferenciable, es decir una función diferenciable $r : M \to M$ tal que $r(M) = A$ y $r|_A = id$, entonces A es una subvariedad diferenciable de M (sug: usar que r tiene rango constante cerca de A).

9. Sean M, N subvariedades de P tales que $M \pitchfork N$. Probar que para todo $p \in M \cap N$, se tiene que $T_p(M \cap N) = T_p(M) \cap T_p(N)$.

10. Se tienen funciones suaves $f : M \to N$ y $g : N \to P$ y una subvariedad $W \subset P$ tal que $g \pitchfork W$. Probar que $f \pitchfork g^{-1}(W)$ si y solo si $gf \pitchfork W$.

11. Sea V un espacio vectorial real y $\Delta \in V \times V$ la diagonal. Sea $A : V \to V$ una transformación lineal y sea $W = \{(v, Av),\ v \in V\}$ el gráfico de A. Probar que W es transversal a Δ si y sólo si 1 no es autovalor de A.

12. Sea $f : X \to X$ una función diferenciable y $x \in X$ un punto fijo por f. Decimos que x es un punto fijo Lefschetz si 1 no es autovalor de $d_x f : T_x X \to T_x X$. Decimos que f es Lefschetz si todos sus puntos fijos son Lefschetz. Probar que si X variedad compacta y f es Lefschetz entonces f tiene finitos puntos fijos.

13. *a*) Sean M, N variedades y $S \subset M \times N$ subvariedad. Denotamos por $\pi : S \to N$ a la restricción de la proyección. Probar que dado $x \in N$, $M \times \{x\} \pitchfork S$ si y solo si x es valor regular para π.
    b) Sea $f : M \times N \to P$ y $Z \subset P$ subvariedad tal que $f \pitchfork Z$. Para cada $x \in N$ denotamos $f_x : M \to P$ a la función $f_x(y) = f(y, x)$. Probar que $f_x \pitchfork Z$ si y solo si $M \times \{x\} \pitchfork f^{-1}(Z)$.
    c) Bajo las hipótesis del item anterior. Probar que $f_x \pitchfork Z$ si y solo si x es valor regular de la función $\pi : f^{-1}(Z) \to N$.

14. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ subvariedad y sea $l < n$. Probar que para casi todo subespacio vectorial V de $\mathbb{R}^n$ de dimensión l se tiene que $V \pitchfork M$.

15. Ejercicio para contestar con dibujos: Sean M, N subvariedades de una variedad T. Si M y N no se intersecan transversalamente en T, puede ser que, de todas formas, su intersección sea subvariedad de T? En caso de que sí, qué pasa en este caso con la codimensión de la intersección en términos de las codimensiones de M y N?

16. Sea C un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$. Probar que existe una subvariedad $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $C = M \cap \mathbb{R}^n$ (Sug: todo cerrado de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de ceros de alguna función suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Este ejercicio prueba que las intersecciones no transversales de subvariedades pueden ser tan feas como uno quiera.