Topología Diferencial- 2024
Práctica Tres
Teoría de Morse

1. Probar que la función determinante definida en la matrices $n \times n$ es función de Morse para $n = 2$ y no es Morse para $n > 2$.

2. Sea $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}$ una función C^∞ y sea $H_t(x) = H(x,t)$. Probar que si H_0 es Morse en algún entorno de un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que H_t es Morse en algún entorno de K para todo $t < \varepsilon$. En particular, para toda variedad compacta M, las funciones de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ son estables por perturbaciones.

3. Sea M subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Probar que existe alguna transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que restringida a M es función de Morse.

4. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ de Morse. Un campo C^∞ X en M se dice que es de tipo-gradiente para f si cumple lo siguiente:
   a) Para todo punto regular $p \in M$ vale que $d_p f(X_p) > 0$
   b) Si $p \in M$ es crítico de índice k, entonces existe una carta (U, ϕ) alrededor de p tal que $\phi(p) = 0$, $f\phi^{-1}(x) = f(p) - x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2$ y $\phi_* X = Grad(f\phi^{-1})$ donde $Grad$ es el campo gradiente usual en $\mathbb{R}^n$.

   Probar que toda función de Morse admite un campo tipo-gradiente.

5. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función de Morse con puntos críticos $p_1, \ldots, p_r$. Probar que existe una función de Morse $g : M \to \mathbb{R}$ con los mismos puntos críticos que f y tal que $g(p_i) \neq g(p_j)$ si $i \neq j$.

6. Sabemos que la esfera S^n tiene estructura de CW-complejo con 2 k-celdas por cada $0 \leq k \leq n$ (además de la estructura usual con una 0-celda y una n-celda). ¿Puede encontrar una función de Morse definida en la esfera que tenga 2 puntos críticos de índice k para cada $0 \leq k \leq n$?

7. Sea $\mathbb{R}P^n$ el espacio proyectivo real de dimensión n. Probar, usando funciones de Morse, que su característica de Euler vale 1 cuando n es par y 0 cuando es impar. (Sugerencia: toda función real definida en el espacio proyectivo es equivalente a una función par definida en la esfera S^n).

8. Sea S una superficie compacta de género p. Probar que toda función de Morse en S tiene al menos $2p+2$ puntos críticos y que existen funciones de Morse en S con exactamente esa cantidad de puntos críticos.

9. Probar usando teoría de Morse que si M es una variedad compacta de dimensión impar entonces $\chi(M) = 0$.

10. Sea W una variedad compacta con borde ∂W. Usando el teorema 1 de la teoría de Morse y el hecho de que para toda variedad compacta con borde existe una función $g : W \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $g^{-1}(0) = \partial W$ y g no tiene puntos críticos en un entorno del borde, probar que el borde admite un "collar neighborhood", es decir existe un entorno del borde difeomorfo a $\partial W \times [0, 1)$.

11. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función de Morse definida en una variedad M cerrada y conexa. Probar que si f tiene al menos dos mínimos locales entonces tiene un punto crítico de índice 1.

12. Es posible encontrar una función de Morse definida en $\mathbb{R}^2$ que tenga solamente dos puntos críticos y que ambos sean de índice cero?

13. (Otra demostración de las desigualdades fuertes de Morse). Sea M variedad cerrada de dimensión n y $f : M \to \mathbb{R}$ de Morse. Sean b_j los números de Betti de M y c_j la cantidad de puntos críticos de f de índice j. Se define el polinomio de Poincaré de M como $P(t) = \sum_{j=0}^{n} b_j t^j$ y sea $C(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j$ el polinomio asociado a la función f. Probar que
$$C(t) - P(t) = (t+1)R(t),$$
donde $R(t)$ es un polinomio con coeficientes enteros no negativos. Deducir las desigualdades de Morse:
$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} c_j \geq \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} b_j \quad (\forall\ k \leq n)$$
En particular se tiene que $c_j \geq b_j$ para todo j.

14. Con las notaciones del ejercicio anterior, probar que si para cada j se tiene que $c_j = 0$ o $c_{j-1} = 0$, entonces $b_k = c_k$ para todo k.

15. Sea $p : N \to M$ un revestimiento de d hojas, donde M es una variedad conexa cerrada. Probar que $\chi(N) = d\chi(M)$.

16. Sean M y N variedades cerradas y sean f y g funciones de Morse definidas en M y N respectivamente. Probar que $h : M \times N \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = f(x) + g(y)$ es de Morse. Describir sus puntos críticos e índices en términos de los de f y g y deducir la fórmula:
$$\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N).$$