Topología Diferencial 2024
Práctica Seis

Teorema de Poincaré-Hopf

1. Sea F un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ con finitos ceros tales que $i(F) = 0$. Probar que existe un campo vectorial G en $\mathbb{R}^n$ que coincide con F fuera de un compacto tal que G no tiene ningún cero.

2. Probar que una variedad cerrada y conexa M admite un campo vectorial nunca nulo si y sólo si su característica de Euler es cero. (Sugerencia para la implicación difícil: utilizar el ejercicio anterior y el resultado -visto hace tiempo en clase- que dice que si la dimensión de M es mayor que 1, dado dos conjuntos finitos de puntos en M del mismo cardinal, existe un difeomorfismo $h : M \to M$ que manda un conjunto de puntos en el otro).

3. Probar que la característica de Euler de cualquier grupo de Lie compacto es 0.

4. Dibujar ejemplos de campos vectoriales en superficies cerradas orientadas con mínima cantidad de singularidades no degeneradas (por ejemplo en el toro, campos vectoriales sin ceros).

Cobordismo

1. Calcular η_0, η_1. Pensar η_2.

2. Calcular Ω_0, Ω_1.

3. Sean M y N variedades cerradas, $A \subset N$ subvariedad cerrada y $f, g : M \to N$ transversales a A con $f \simeq g$. Probar que las variedades $f^{-1}(A)$ y $g^{-1}(A)$ son cobordantes.

4. Sea $A \subset N$ subvariedad cerrada de una variedad cerrada. Sea M variedad cerrada y $[M, N]$ el conjunto de clases de homotopías de funciones continuas de M a N. Probar que se tiene una función bien definida de $[M, N] \to \eta_n$ (donde $n = \dim M - \dim N + \dim A$) que a cada $[f]$ le asigna $[g^{-1}(A)]$ (con g homotópica a f transversal a A).

5. Fijados $A \subset N$ como en el ejercicio anterior. Probar que si $M = S^m$ (con $m = n + \dim N - \dim A$), la función del ejercicio anterior es un morfismo de grupos $\pi_m(N) = [S^m, N] \to \eta_n$. (Nota: un teorema de isomorfismo de Thom dice que para ciertas variedades $A = G_{s,k}$ (Grassmannianas) y $N = E_{s,k}$ (fibrado universal de $G_{s,k}$), si s y k son suficientemente grandes respecto de n y tomando $m = n + k$, el morfismo $\pi_{n+k}(E^*) \to \eta_n$ es un isomorfismo, donde E^* es la compactificación en un punto de E).