Topología Diferencial- 2024
Práctica Dos
Intersección módulo 2 y grado de funciones

Nota: En esta práctica, salvo que se especifique lo contrario, las variedades son sin borde y, cuando el ejercicio trata de intersección módulo 2, las variedades satisfacen las hipótesis usuales necesarias para intersección.

1. Probar que la ecuación
$$z^7 + \cos(|\, z \,|^2)(1 + 93z^4) = 0$$
tiene solución en $\mathbb{C}$.

2. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ diferenciables, con X compacta. Sea W una subvariedad regular cerrada en Z y supongamos que g es transversal a W (y por lo tanto $g^{-1}(W)$ es subvariedad de Y). Probar que
$$I_2(f, g^{-1}(W)) = I_2(gf, W)$$

3. Probar que, si $f : X \to Y$ es nullhomotópica (i.e. homotópica a una constante), entonces $I_2(f, Z) = 0$ para toda subvariedad cerrada de dimensión complementaria Z, excepto quizás en el caso que la dimensión de X sea 0. Qué puede pasar en ese caso?

4. Probar que si Y es una variedad contráctil de dimensión positiva, entonces $I_2(f, Z) = 0$, para toda $f : X \to Y$ con X compacta y toda subvariedad Z cerrada en Y y de dimensión complementaria. (Incluso para el caso en el que dimensión de X sea 0). Deducir que la única variedad compacta contráctil (sin borde) es el singleton.

5. Sea X compacta e Y conexa de la misma dimensión. Sea $f : X \to Y$ tal que $deg_2(f) \neq 0$. Probar que f es sobreyectiva. En particular, si Y no es compacta, $deg_2(g) = 0$ para toda $g : W \to Y$ tal que W compacta de la misma dimensión.

6. Dos subvariedades compactas X, Z de Y se dicen *cobordantes* en Y si existe una subvariedad compacta con borde, W, en $Y \times I$ tal que $\partial W = X \times \{0\} \cup Z \times \{1\}$. Probar que si X y Z son cobordantes en Y, entonces $I_2(X, C) = I_2(Z, C)$ para toda subvariedad C cerrada en Y de dimensión complementaria a X y Z.

7. (Winding number módulo 2) Sea X una variedad cerrada y conexa de dimensión $n-1$ y sea $f : X \to \mathbb{R}^n$ diferenciable. Dado $z \in \mathbb{R}^n$ que no está en la imagen de f, se define el *winding number módulo 2* de f alrededor de z como $W_2(f, z) = deg_2(u)$ donde $u : X \to S^{n-1}$ es la función $u(x) = \frac{f(x)-z}{|f(x)-z|}$ (es decir, se mide la cantidad de veces que f da vueltas alrededor de z módulo 2). Probar que si X es el borde de una variedad compacta D y la $f : X \to \mathbb{R}^n$ se puede extender a $F : D \to \mathbb{R}^n$ tal que $z \in \mathbb{R}^n$ es valor regular de F, entonces $F^{-1}(z)$ es finito y $W_2(f, z) = \#F^{-1}(z) \bmod 2$. (Sugerencia: probar que (i) si z no está en la imagen de F, entonces $W_2(f, z) = 0$, (ii) Si $F^{-1}(z) = \{y_1, \ldots, y_r\}$, tomar una bolita B_i alrededor de cada y_i tal que las $B_i's$ no se intersequen entre sí ni intersequen al borde X. Sea f_i la restricción de F a ∂B_i. Entonces $W_2(f, z) = W_2(f_1, z) + \ldots + W_2(f_r, z)$ *mod* 2 y (iii) elegir B_i apropiadas para que $W_2(f_i, z) = 1$).

8. Sea M una variedad cerrada de dimensión n. Probar que para todo $m \in \mathbb{Z}$ existe una función diferenciable $f : M \to S^n$ de grado m.

9. Sea $n \geq 2$ y sea $S \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad difeomorfa a la esfera S^{n-1}. Por el teorema de la curva de Jordan (topología) sabemos que S separa a $\mathbb{R}^n$ en dos componentes conexas de las cuales S es

el borde en común. Sea U la componente interior y V la exterior. Fijamos $y \in \mathbb{R}^n - S$ y definimos $F : S \to S^{n-1}$ como
$$F(x) = \frac{x - y}{||x - y||}$$
Probar que $deg(F) = 0$ si $y \in V$ y que $deg(F) = 1$ ó -1 si $y \in U$ (el signo, en el último caso, depende de la orientación de S).

10. (Linking number) Sean J y K dos subvariedades cerradas y orientadas de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimensiones $d \geq 1$ y $l \geq 1$ respectivamente, tales que $d + l = n$. Se define su linking number como $lk(J, K) = deg(\varphi)$, donde $\varphi : J \times K \to S^n$ es la función
$$\varphi(x, y) = \frac{y - x}{||y - x||}.$$
La orientación que damos a $J \times K$ es la orientación usual en el producto (determinada por las orientaciones de J y K). Probar que:
    a) $lk(J, K) = (-1)^{(d+1)(l+1)} lk(K, J)$.
    b) Si J y K pueden ser separadas por un hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ entonces su linking number es 0.
    c) Sean g_t y h_t homotopías entre las inclusiones respectivas $g_0 : J \to \mathbb{R}^{n+1}$ y $h_0 : K \to \mathbb{R}^{n+1}$ y embeddings g_1 y h_1, tales que para todo instante de tiempo $g_t(J) \cap h_t(K) = \emptyset$. Entonces $lk(J, K) = lk(g_1(J), h_1(K))$.

11. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) y sea $F : U \to \mathbb{R}^n$ un campo suave. Supongamos que $0 \in U$ es un cero aislado de F (i.e. $F(0) = 0$ y no se anula en otro punto cerca de 0). Elegimos un $r > 0$ tal que el disco de radio r centrado en 0 no contenga otro cero de F y definimos $F_r : S^{n-1} \to S^{n-1}$ como
$$F_r(x) = \frac{F(rx)}{||F(rx)||}.$$
Se define el índice del campo F en 0 como $i(F, 0) = deg(F_r)$. Probar que el índice no depende del r elegido.

12. Sean M y N variedades cerradas y orientadas de dimensión $n \geq 2$. Probar que:
    a) Si existe una $f : S^n \to M$ de grado 1, entonces M es simplemente conexa.
    b) Más generalmente: Si $f : M \to N$ tiene grado 1, entonces el morfismo inducido $f_* : \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ es sobreyectivo.
    c) Si $f : M \to N$ tiene grado $k \neq 0$ entonces la imagen de f_* es un subgrupo cuyo índice divide a $|k|$.

13. Extender la noción de grado de una función al caso no compacto cuando las funciones son propias. Concretamente: supongamos que M y N son n-variedades no necesariamente compactas orientadas y sin borde y $f : M \to N$ es una función suave propia (=cerrada y preimagen de compactos es compacto). Definimos el grado de f similarmente al caso compacto (notar que, si y es valor regular, $f^{-1}(y)$ es finito porque f es propia). Probar que si f y g son homotópicas mediante una homotopía propia, tienen el mismo grado. Notar también que el grado de los difeomorfismos está bien definido y que es 1 o -1.

14. Probar la siguiente generalización del teorema fundamental del álgebra: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto no vacío y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función propia suave. Si existe un compacto K tal que $det(D_x f) > 0$ fuera de K, entonces f es sobreyectiva. En particular la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución.

15. Sean $f_1, \ldots, f_n$ polinomios reales en $n \geq 2$ variables. Supongamos $f_k = h_k + r_k$ donde h_k es polinomio homogéneo de grado $d_k > 0$ y r_k tiene grado menor. Supongamos además que $x = (0, \ldots, 0)$ es la única solución del sistema $h_1(x) = \ldots = h_n(x) = 0$ y que $D_x h$ es inversible para todo $x \neq 0$ donde $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Entonces el sistema de ecuaciones $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$ tiene solución en $\mathbb{R}^n$. (Sug: ejercicio anterior).