Topología Diferencial- 2024
Práctica Cuatro
Cohomología de de Rham

1. Probar que $H^0_c\mathbb{R}^n = 0$ y $H^n_c\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$.

2. Calcular la cohomología de de Rham y la de soporte compacto de las siguientes variedades.
   - La variedad M_r que se obtiene quitando r puntos al plano.
   - La banda de Möbius abierta.
   - La botella de Klein.

3. ¿Puede $\mathbb{R}^2$ escribirse como unión de dos abiertos conexos U y V tales que su intersección no sea conexa?

4. Sean p, q dos puntos distintos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que un cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ separa a p de q si esos dos puntos pertencen a componentes conexas distintas de $\mathbb{R}^n \setminus A$. Dados dos cerrados disjuntos A y B y dos puntos distintos p, q de $\mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$, probar que si ni A ni B separan a los puntos, entonces tampoco los separa $A \cup B$.

5. Sea $M = \mathbb{R}^n - \{p\}$ (para algún punto p) o $M = \mathbb{R}^n - \overline{B}$ (una bola cerrada). Probar que $H^q_{dR}M = \mathbb{R}$ si $q = 0, n-1$ y $H^q_{dR} = 0$ para $q \neq 0, n-1$. Además dada $\omega \in \Omega^{n-1}M$ cerrada, ω resulta exacta si y sólo si $\int_S \omega = 0$ para alguna esfera $(n-1)$-dimensional $S \subset M$.

6. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ cerrados con $A, B \neq \mathbb{R}^n$. Probar que si A y B son homeomorfos, entonces $H^q_{dR}(\mathbb{R}^n \setminus A) \simeq H^q_{dR}(\mathbb{R}^n \setminus B)$. Deducir que para todo A, B cerrados de $\mathbb{R}^n$ homeomorfos (incluso para A o B igual a $\mathbb{R}^n$), $\mathbb{R}^n \setminus A$ y $\mathbb{R}^n \setminus B$ tienen la misma cantidad de componentes conexas.

7. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio homeomorfo a S^k (para $1 \leq k \leq n-2$). Probar que
$$H^q_{dR}(\mathbb{R}^n - A) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0, n-k-1, n-1, \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

8. Sea M una variedad compacta, sin borde y orientable de dimensión $n = 2m$ con m impar. Probar que $H^m(M)$ tiene dimensión par. Deducir que la característica de Euler $\chi(M)$ es par.

9. Sea M variedad conexa de dimensión $n \geq 3$. y sea $x \in M$. Probar que la inclusión $M - \{x\} \to M$ induce isomorfismos $H^q_{dR}M = H^q_{dR}(M - \{x\})$ para $0 \leq q \leq n-2$. Y que, en el caso de que M sea también compacta y orientable, también vale para $q = n-1$.

10. Sean $U, V \subset M$ abiertos tales que U, V y $U \cap V$ son de tipo finito. Probar que $U \cup V$ es de tipo finito y $\chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$.