Topología Diferencial- 2024
Práctica Cinco
Nudos y links

1. Sea C una curva suave simple y cerrada en $\mathbb{R}^2$ y sea $\overline{C}$ la curva con la orientación opuesta. Probar que C y $\overline{C}$ no son isotópicas en $\mathbb{R}^2$ pero sí lo son si las vemos dentro de $\mathbb{R}^3$ via la inclusión canónica $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

2. Sean C_1 y C_2 curvas simples cerradas en $\mathbb{R}^2$ tales que C_1 cae dentro de C_2 (es decir, cae en la componente acotada U de $\mathbb{R}^2 - C_2$). Sea V la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - C_1$. Probar que la clausura de la región entre ambas curvas $\overline{U \cap V}$ es homeomorfa a $S^1 \times I$. Lo mismo sucede si las curvas se ven en S^2.

3. Sean L_1 y L_2 dos links en S^2 del tipo $S^1 \cup S^1$. Probar que son equivalentes (en el sentido de homeomorfismo del espacio ambiente).

4. Probar que en $\mathbb{R}^2$ hay dos clases de equivalencia de links del tipo $S^1 \cup S^1$ dependiendo si el primer nudo está dentro o fuera del segundo nudo (en el sentido de homeomorfismo de espacio ambiente).

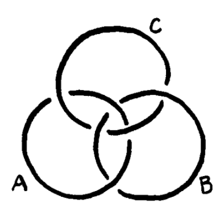
5. Sabemos que dos nudos en $\mathbb{R}^2$ o S^2 son equivalentes en el sentido de que existe un homeomorfismo del espacio ambiente que manda un nudo en el otro. Probar que dados dos nudos en $\mathbb{R}^2$ o S^2, son isotópicos.

6. Sea $p(L) \subset \mathbb{R}^2$ una proyección regular de un link de $\mathbb{R}^3$. Probar que se pueden colorear las regiones determinadas por $p(L)$ en el plano con dos colores de tal forma que las regiones que compartan algún arco de $p(L)$ en sus bordes tengan colores distintos.

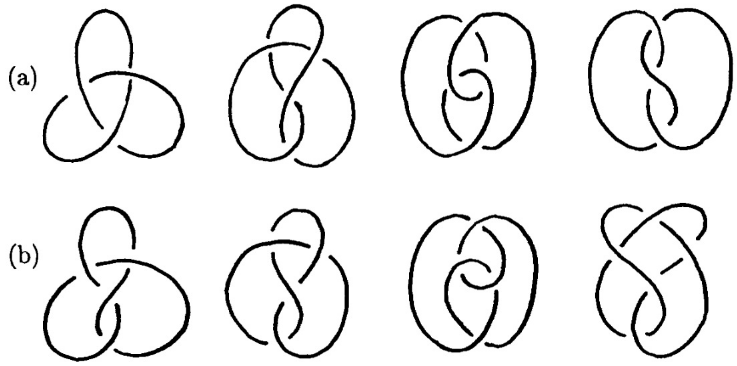
7. Calcular el género del nudo de la figura 8.

8. Probar que el nudo de la figura 8 no es 3-coloreable.

9. Probar que el siguiente link de 3 componentes no es equivalente (en el sentido isotópico) al link trivial de 3 componentes (notar que 2 componentes cualesquiera forman un link trivial).

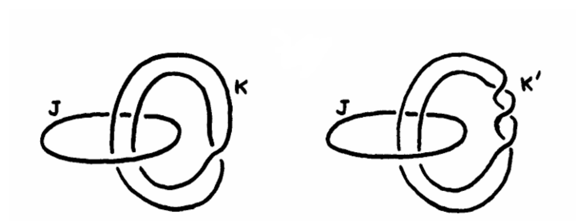


10. Probar, utilizando movimientos de Reidemeister, que todos los nudos del item (a) de la siguiente figura son equivalentes entre sí y todos los del item (b) son equivalentes entre sí (imágenes sacadas del libro de Prasolov-Sossinsky)



11. Probar que la proyección regular sola de un nudo en un plano sin la información de como es el nudo en los cruces no da ninguna información sobre el nudo. Concretamente: probar que a partir de un diagrama D de un nudo K con n cruces, se puede llegar al diagrama de un nudo trivial haciendo no más de $n/2$ intercambios de cruces (cambiando cruces por arriba a cruces por abajo y vice-versa).

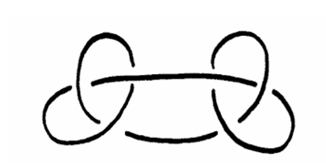
12. Probar que los siguientes links en S^3 no son equivalentes (en el sentido de homeomorfismo de espacio ambiente), pero sus complementos son homeomorfos (esto es algo que no pasa con los nudos, por el teorema de Gordon-Luecke).



13. Probar, utilizando van Kampen, la fórmula de la presentación de Wirtinger del grupo de un nudo.

14. Probar que el grupo del nudo trébol admite también la presentación $\langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$.

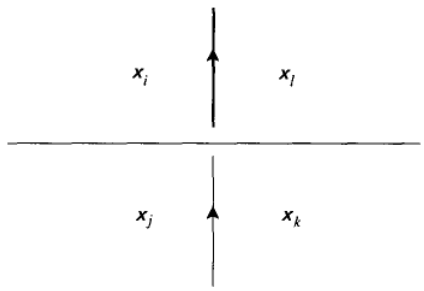
15. Usando van Kampen y factorizando al nudo como suma conexa de dos nudos primos, probar que el grupo del siguiente nudo admite la presentación $\langle x, y, z \mid xyx = yxy,\ xzx = zxz \rangle$.



16. Probar, a partir de la presentación de Wirtinger, que el abelianizado del grupo de un nudo es $\mathbb{Z}$.

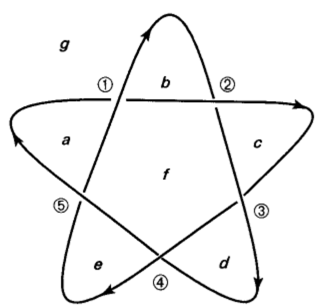
17. Encontrar una presentación del grupo del nudo de la figura 8 con la menor cantidad posible de generadores.

18. (Presentación de Dehn) Probar, utilizando van Kampen, que al grupo de un nudo se lo puede presentar con la siguiente presentación, llamada "presentación de Dehn". Sea D su diagrama (orientado) en un plano. Por cada región del plano en la que queda separado por el diagrama ponemos un generador x_i. Por cada cruce



ponemos la relación $x_i x_j^{-1} x_k x_l^{-1}$ (sentido anti-horario de las regiones que intervienen en el cruce) y al final agregamos una última relación $x_m = 1$ (eligiendo cualquier generador x_m).

19. Probar, utilizando la presentación de Dehn, que el grupo del siguiente nudo admite la presentación $\langle f, y | \; f^5 = y^2 \; \rangle$ (en el dibujo están etiquetadas las regiones del plano y numerados los cruces).



20. Utilizando las presentaciones de Dehn calculamos el grupo de la suma de dos nudos $K + L$: probar que si las presentaciones de Dehn de K y L son $\langle X | \; R \rangle$ (donde X es un conjunto de generadores que contiene a un generador x) y $\langle Y | \; S \rangle$ (donde Y es un conjunto de generadores que contiene a un generador y), entonces $\langle X, Y | \; R, S, x = y \rangle$ es presentación del grupo de $K + L$.

21. Volver a ver el ejercicio 15.

22. Dar una demostración alternativa (sin utilizar género, usando el grupo del nudo) del resultado que dice que si $K + L = 0$ entonces $K = L = 0$.

23. (Difícil) Sea T un toro embebido en S^3, se puede ver que T separa a S^3 en dos componentes. Probar que al menos una de esas dos componentes es un toro sólido. (Sug: usar el Loop theorem y el hecho que si se pega un cilindro $D^2 \times I$ a una 3-bola, identificando $D^2 \times 0$ y $D^2 \times 1$ con dos discos disjuntos en el borde de la bola, lo que se obtiene, si es orientable, es un espacio homeomorfo a $D^2 \times S^1$).