Topología Diferencial- 2017
Práctica Siete
Haces y cohomología (Parte Dos): Cohomología de Čech

Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de X. El nervio de $\mathcal{U}$ es el complejo simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ cuyos vértices son los abiertos de $\mathcal{U}$ y los símplices son los subconjuntos finitos $\sigma = \{U_0, \ldots, U_r\}$ de $\mathcal{U}$ cuya intersección $\tilde{\sigma} = \bigcap U_i$ es no vacía.

Supongamos que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de un espacio topológico X. Sea $\mathcal{V}$ un refinamiento de $\mathcal{U}$. Definimos una función $g : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ eligiendo para cada $V \in \mathcal{V}$ un elemento de $\mathcal{U}$ tal que $V \subset g(V)$.

Ejercicio 1: Probar que $g : \mathcal{N}(\mathcal{V}) \to \mathcal{N}(\mathcal{U})$ es un morfismo simplicial. Probar además que si $g' : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ es otra función tal que $V \subset g'(V)$ para todo $V \in \mathcal{V}$, entonces g y g' son homotópicas.

Del ejercicio anterior se deduce que $g^* = g'^* : H^q(\mathcal{N}(\mathcal{U})) \to H^q(\mathcal{N}(\mathcal{V}))$ como morfismos inducidos en las cohomologías de estos complejos simpliciales. Llamamos $i^* = g^* = g'^*$ a este morfismo (que no depende de la elección, solo del refinamiento) y definimos la cohomología de Čech del espacio X (con coeficientes enteros) como

$$\check{H}^q(X) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{N}(\mathcal{U}))$$

donde los $\mathcal{U}$ recorren todos los cubrimientos por abiertos de X y los morfismos i^* son los definidos antes.

En general, si A es un DIP y $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de X, definimos la cohomología de Čech de X con coeficientes en A como

$$\check{H}^q(X, A) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{N}(\mathcal{U}), A)$$

(donde $H^q(\mathcal{N}(\mathcal{U}), A)$ es la cohomología singular=simplicial con coeficientes en A).

En lo que sigue, A es un DIP y M es una espacio paracompacto y T_2. Vamos a definir la cohomología de Čech con coeficientes en haces.

Sea $\mathcal{S}$ un haz de A-módulos sobre M y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de M. Para $q \geq 0$, sea $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ el conjunto de las funciones $f : \{q-\text{símplices de } \mathcal{N}(\mathcal{U})\} \to \bigoplus_{V \subset M \text{ ab}} \Gamma(\mathcal{S}, V)$ tales que si $\sigma = \{V_0, \ldots, V_q\}$ es un q-símplex de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, entonces $f(\sigma) \in \Gamma(\mathcal{S}, \tilde{\sigma})$, donde $\tilde{\sigma} = \bigcap_{i=0}^q V_i$. Los $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ son A-módulos con la estructura heredada de $\bigoplus \Gamma(\mathcal{S}, V)$ y el diferencial $d : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ está dado por

$$(df)(\sigma) = \sum_i (-1)^i f(\sigma^{(i)})|_{\tilde{\sigma}}$$

donde $\sigma^{(i)}$ es la cara i-ésima de σ y $f(\sigma^{(i)})|_{\tilde{\sigma}}$ es la restricción a $\tilde{\sigma}$ de $f(\sigma^{(i)}) \in \widetilde{\sigma^{(i)}}$. Definimos $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) = H^q(C(\mathcal{U}, \mathcal{S}))$.

Ejercicio 2: Probar que efectivamente $d^2 = 0$.

Ejercicio 3: Probar que si $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ es un refinamiento, similarmente al caso de Čech clásico (Ejercicio 1), se tiene una única $i^* : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \to H^q(\mathcal{V}, \mathcal{S})$.

Se define la cohomología de Čech de M con coeficientes en el haz $\mathcal{S}$ como

$$H^q(M, \mathcal{S}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$$

Ejercicio 4: Probar que $\check{H}^q(M, A) = H^q(M, \mathcal{A})$

El objetivo ahora es probar que la construcción de $\{H^q(M,\mathcal{S}):\ q\geq 0,\ \mathcal{S} \text{ haces sobre } M\}$ determina una teoría de cohomología sobre M con coeficientes en haces de A-módulos. En particular la cohomología de Čech resultará isomorfa (para espacios paracompactos y Hausdorff) a la cohomología singular.

Ejercicio 5: Probar que un morfismo de haces $\varphi:\mathcal{S}\to\mathcal{S}'$ induce un morfismo $\varphi_*:H^q(\mathcal{U},\mathcal{S})\to H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}')$ para todo $\mathcal{U}$ y por lo tanto un morfismo $\varphi_*:H^q(M,\mathcal{S})\to H^q(M,\mathcal{S}')$. Además esta asignación es funtorial.

Ejercicio 6: Probar que $H^0(\mathcal{U},\mathcal{S})=\Gamma(S)$ para todo $\mathcal{U}$ y por lo tanto $H^0(M,\mathcal{S})=\Gamma(S)$.

Ejercicio 7: Probar que si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento localmente finito de M y $\mathcal{S}$ es un haz fino sobre M entonces $H^q(\mathcal{U},\mathcal{S})=0$ para todo $q\geq 1$. Deducir que $H^q(M,\mathcal{S})=0$ para $q\geq 1$.

Para terminar de probar que la cohomología de Čech es una (=la) cohomología de haces de A-módulos sobre M, falta probar la existencia de morfismo de conexión y sucesiones largas.

Ejercicio 8: Sea $0\to\mathcal{S}\to\mathcal{S}'\to\mathcal{S}''\to 0$ una SEC de haces. Probar que para todo $\mathcal{U}$ y todo q se tiene una SEC de módulos $0\to C^q(\mathcal{U},\mathcal{S})\to C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}')\to C^q(\mathcal{U},S'')$.
Notamos con $\overline{C}^q(\mathcal{U},S'')$ a la imagen del morfismo $C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}')\to C^q(\mathcal{U},S'')$. Se tiene por lo tanto una SEC de complejos

$$0\to C^*(\mathcal{U},\mathcal{S})\to C^*(\mathcal{U},\mathcal{S}')\to\overline{C}^*(\mathcal{U},S'')\to 0$$

Esta SEC de complejos induce una sucesión larga en las homologías. Denotamos con $\overline{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{S}'')$ a la cohomología del complejo $\overline{C}^*(\mathcal{U},S'')$.

Notar que un refinamiento $\mathcal{V}\leq\mathcal{U}$ induce un morfismo i^* entre estas cohomologías (y las sucesiones largas correspondientes). Para terminar de probar la existencia del morfismo de conexión y sucesión larga entre las cohomologías de Čech, probar que:

Ejercicio 9: Al pasar al límite directo se tiene un isomorfismo $\overline{H}^q(M,\mathcal{S}'')=H^q(M,\mathcal{S}'')$ y por lo tanto se obtiene la sucesión exacta larga buscada entre las cohomologías de Čech.

Como la cohomología de Čech es una cohomología con coeficientes en haces de A-módulos, por unicidad (salvo isomorfismos), se tiene que para los espacios topológicos *buenos* la cohomología de Čech coincide con la singular.

Ejercicio 10: Exhibir ejemplos de espacios topológicos donde la cohomología de Čech no es isomorfa a la cohomología singular.