Topología Diferencial 2017
Práctica Seis
Haces, prehaces, cohomología y teorema de de Rham (Parte 1)

1. Probar que el haz de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de gérmenes de funciones continuas sobre $\mathbb{R}$ no es un espacio Hausdorff.

2. Probar que si $f, g \in \Gamma(S, U)$ son secciones locales en U tales que $f(x) = g(x)$ para algún $x \in U$ entonces $f|_V = g|_V$ para algún abierto $x \in V \subset U$.

3. Probar que los morfismos de haces son homeomorfismos locales.

4. Dado un prehaz S denotamos con $\beta(S)$ a su hacificación. Probar que un morfismo de prehaces $\phi : S \to S'$ induce canónicamente un morfismo $\beta(\phi) : \beta(S) \to \beta(S')$.

5. Dado un haz S de A-módulos sobre M, denotamos con $\alpha(S)$ al prehaz de secciones locales asociado. Probar que:
   - Los haces $\beta(\alpha(S))$ y S son naturalmente isomorfos.
   - Si S es un prehaz completo, $\alpha(\beta(S))$ es naturalmente isomorfo a S.

6. Recordar que el producto tensorial de dos haces de A-módulos sobre M se define como $S \otimes S' = \beta(\alpha(S) \otimes \alpha(S'))$. Probar que para todo $x \in M$ se tiene que $(S \otimes S')_x = S_x \otimes S'_x$.

7. Probar que una sucesión exacta corta de haces
$$0 \to S \to^{\phi} S' \to^{\psi} S'' \to 0$$
induce una sucesión exacta de A-módulos
$$0 \to \Gamma(S) \to^{\phi_*} \Gamma(S') \to^{\psi_*} \Gamma(S'')$$
y que en general un epimorfismo de haces no induce epimorfismo a nivel de las secciones globales.

8. Probar que si $\phi : S \to S'$ es un epimorfismo de haces tal que $\ker(\phi)$ es un haz fino, entonces $\phi_* : \Gamma(S) \to \Gamma(S')$ es epimorfismo de módulos.

9. Sea S un haz de A-módulos sobre una variedad M. Para cada abierto $U \subseteq M$ consideramos el A-módulo $T(U)$ de secciones discontinuas (= no necesariamente continuas) de U a S. Esto determina (junto con las restricciones usuales) un prehaz de A-módulos sobre M que denotamos T. Denotamos con $S_0 = \beta(T)$ la hacificación de T. Este es el haz de gérmenes de secciones discontinuas de S. Probar que S_0 es un haz fino.

10. Mostrar que el producto tensorial de dos prehaces completos no es necesariamente completo.

11. Dar ejemplos de haces finos que tienen subhaces que no son finos.