

TOPOLOGÍA DIFERENCIAL 2017
PRÁCTICA CINCO
Teorema de Poincaré-Hopf

1. Sea X un campo C^∞ definido en una variedad M y sea $p \in M$ un cero no degenerado de X . Probar que $i(X, p) = \text{sg}(\det D_0 F)$ donde $F = \phi_* X|_U$ para (U, ϕ) una carta tal que $\phi(p) = 0$ y F es visto como función $F : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (coordenadas globales del campo en $\mathbb{R}^n$).
2. Sea F un campo en $\mathbb{R}^n$ visto como función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (coordenadas) tal que $0 \in \mathbb{R}^n$ es el único cero. Probar que existe un campo G en $\mathbb{R}^n$ que tiene solamente ceros no degenerados y que coincide con F fuera de un compacto.
3. Deducir del item anterior que si X es un campo vectorial en una variedad cerrada M con singularidades aisladas, entonces existe un campo vectorial $\tilde{X}$ en M que tiene solamente ceros no degenerados y tal que $i(X) = i(\tilde{X})$.
4. Sea f una función de Morse en M y X campo C^∞ tal que $d_p f(X_p) > 0$ para todo $p \in M$ que no sea punto crítico de f . Sea $q \in M$ un punto crítico de índice k y que es, a su vez, un cero de X . Probar que $i(X, q) = (-1)^k$.
5. Sea f una función de Morse en una variedad M y sea $\text{grad}(f)$ su campo gradiente (con una métrica riemanniana dada). Probar que los ceros de $\text{grad}(f)$ son no-degenerados y calcular su índice.
6. Probar que una variedad cerrada y conexa M admite un campo vectorial nunca nulo si y sólo si su característica de Euler es cero. (Sugerencia para la implicación difícil: probar primero que si F es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ con finitos ceros y tal que la suma de los índices es cero, entonces existe un campo G sin ceros que coincide con F fuera de un compacto. Luego para probar el resultado para una variedad cerrada usar lema de isotopía: si la dimensión de M es mayor que 1, dado dos conjuntos finitos de puntos del mismo cardinal (en cada conjunto, los puntos distintos entre sí) existe un difeo $h : M \rightarrow M$ isotópico a la identidad que manda un conjunto de puntos en el otro).
7. Probar que la característica de Euler de cualquier grupo de Lie compacto es 0.