Topología Diferencial 2017
Práctica Cuatro
Teoría de Morse (Parte 2)

1. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función de Morse definida en una variedad M cerrada (=compacta y sin borde) y conexa. Probar que si f tiene al menos dos mínimos locales entonces tiene un punto crítico de índice 1.

2. Es posible encontrar una función de Morse definida en $\mathbb{R}^2$ que tenga solamente dos puntos críticos y que ambos sean de índice cero?

3. (Otra demostración de las desigualdades fuertes de Morse). Sea M variedad cerrada de dimensión n y $f : M \to \mathbb{R}$ de Morse. Sean b_j los números de Betti de M y c_j la cantidad de puntos críticos de f de índice j. Se define el polinomio de Poincaré de M como $P(t) = \sum_{j=0}^{n} b_j t^j$ y sea $C(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j$ el polinomio asociado a la función f. Probar que
$$C(t) - P(t) = (t+1)R(t),$$
donde $R(t)$ es un polinomio con coeficientes enteros no negativos. Deducir las desigualdades de Morse:
$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} c_j \geq \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} b_j \quad (\forall\ k \leq n)$$
En particular se tiene que $c_j \geq b_j$ para todo j.

4. Con las notaciones del ejercicio anterior, probar que si para cada j se tiene que $c_j = 0$ o $c_{j-1} = 0$, entonces $b_k = c_k$ para todo k.

5. Sea $p : N \to M$ un revestimiento de d hojas, donde M es una variedad conexa cerrada. Probar que $\chi(N) = d\chi(M)$.

6. Sean M y N variedades cerradas y sean f y g funciones de Morse definidas en M y N respectivamente. Probar que $h : M \times N \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = f(x) + g(y)$ es de Morse. Describir sus puntos críticos e índices en términos de los de f y g y deducir la fórmula:
$$\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N).$$