Topología Diferencial- 2017

Práctica Uno

Teorema de Sard

1. Probar que si N es una subvariedad de M con $\dim N < \dim M$, entonces N tiene medida cero en M (probarlo sin usar Sard y, trivialmente, usando Sard).

2. Dos variedades $M, N \subset \mathbb{R}^n$ se dicen que están en posición general (o que son transversales) si para todo punto $p \in M \cap N$ se tiene que $T_pM + T_pN = T_p\mathbb{R}^n (= \mathbb{R}^n)$. Probar que, dadas $M, N \subset \mathbb{R}^n$, para casi todo $a \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $M + a$ y N están en posición general. Notar que, en particular, si $\dim M + \dim N < n$, para casi todo $a \in \mathbb{R}^n$, $M + a$ y N son disjuntas.

3. Sabemos que existen curvas de Peano (space-filling curves), es decir funciones continuas $\omega : I \to I \times I$ (o más generalmente, $\omega : I \to I^n$, para $n \geq 2$) que son sobreyectivas (notar que no pueden ser inyectivas, porque resultarían homeomorfismos y esto no es posible por el teorema de la dimensión). Deducir como corolario inmediato de Sard que estas curvas no pueden ser diferenciables.

4. Usando Sard y el hecho de que podemos aproximar funciones continuas con funciones diferenciables, probar que las esferas S^n son simplemente conexas para $n \geq 2$ (sin usar van Kampen!).

5. Sea $f : S^1 \to \mathbb{R}$ diferenciable y sea $y \in \mathbb{R}$ un valor regular. Probar que:
   a) $f^{-1}(y)$ tiene un número par de puntos.
   b) Si $f^{-1}(y)$ tiene $2k$ puntos, entonces f tiene al menos $2k$ puntos críticos.

6. Sean M y N variedades diferenciables, con M compacta. Sea $f : M \to N$ diferenciable y sea $y \in N$ valor regular de f.
   a) Probar que la fibra $f^{-1}(y)$ es finita (o vacía).
   b) Para todo valor regular $y \in N$, definimos $g(y)$ como el cardinal de la fibra $f^{-1}(y)$. Probar que g es una función localmente constante (como función definida en el subespacio de valores regulares).

7. Sean M y N variedades diferenciables de la misma dimensión, con M compacta y sin borde. Sean $f, g : M \to N$ diferenciables y diferenciablemente homotópicas (es decir, que existe una homotopía suave $H : M \times I \to N$). Probar que, si $y \in N$ es un valor regular para f y g, entonces
   $$\# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \ (mod\ 2)$$
   (Sugerencias: suponer primero que y es valor regular para la homotopía H y usar que el borde de las variedades compactas de dimensión 1 tienen un número par de puntos. Luego probarlo para y general, usando que $\# f^{-1}(y)$ y $\# g^{-1}(y)$ son localmente constantes.)

8. Sea M variedad diferenciable y $A \subset M$ subespacio conexo. Probar que, si existe una retracción diferenciable, es decir una función diferenciable $r : M \to M$ tal que $r(M) = A$ y $r|_A = id$, entonces A es una subvariedad diferenciable de M (sug: usar que r tiene rango constante cerca de A).