Topología Diferencial 2017
Ejercicios adicionales II

1. Sean M y N variedades cerradas y orientadas de dimensión $n \geq 2$. Probar que:
   a) Si existe una $f : S^n \to M$ de grado 1, entonces M es simplemente conexa.
   b) Más generalmente: Si $f : M \to N$ tiene grado 1, entonces el morfismo inducido $f_* : \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ es sobreyectivo.
   c) Si $f : M \to N$ tiene grado $k \neq 0$ entonces la imagen de f_* es un subgrupo cuyo índice divide a $|k|$.

2. Extender la noción de grado de una función al caso no compacto cuando las funciones son propias. Concretamente: supongamos que M y N son n-variedades no necesariamente compactas orientadas y sin borde y $f : M \to N$ es una función suave propia (=cerrada y preimagen de compactos es compacto). Definimos el grado de f, similarmente al caso compacto, como $\deg f = I(f, y)$ con y un valor regular (la suma es finita por ser propia). Probar que si f y g son homotópicas mediante una homotopía propia, tienen el mismo grado. Notar también que el grado de los difeomorfismos está bien definido y que es 1 o -1.

3. Probar la siguiente generalización del teorema fundamental del álgebra: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto no vacío y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función propia C^∞. Si existe un compacto K tal que $\det(D_x f) > 0$ fuera de K, entonces f es sobreyectiva. En particular la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución.

4. Sean $f_1, \ldots, f_n$ polinomios reales en $n \geq 2$ variables. Supongamos $f_k = h_k + r_k$ donde h_k es polinomio homogéneo de grado $d_k > 0$ y r_k tiene grado menor. Supongamos además que $x = (0, \ldots, 0)$ es la única solución del sistema $h_1(x) = \ldots = h_n(x) = 0$ y que $D_x h$ es inversible para todo $x \neq 0$ donde $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Entonces el sistema de ecuaciones $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$ tiene solución en $\mathbb{R}^n$. (Sug: ejercicio anterior).

5. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad cerrada. Probar que el conjunto
$$\{v \in \mathbb{R}^n,\ \phi_v(x) = |x - v|^2 \text{ es función de Morse}\}$$
es un abierto denso de $\mathbb{R}^n$.

6. (Este ejercicio está para ser utilizado en el ejercicio siguiente) Si M es una n-variedad de la forma $M = \bigcup_{k \geq 1} M_k$ donde M_k son subvariedades difeomorfas a $\mathbb{R}^n$ y $M_k \subset M_{k+1}$ para todo k, entonces M es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

7. Probar la siguiente generalización del teorema de Reeb: Sea M variedad cerrada de dimensión n que admite una función con dos puntos críticos (no necesariamente no-degenerados) entonces el complemento de cada punto crítico es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y M resulta homeomorfa a S^n (usar teorema 1 de Morse y el item anterior).

8. Sea $f : S^n \to \mathbb{R}$ una función de Morse tal que $f(x) = f(-x)$ para todo x. Probar que f tiene al menos dos puntos críticos de cada índice $k = 0, \ldots, n$.