Topología Algebraica- 2023
Práctica Cuatro
Homotopía

Notación: Denotamos con $[X,Y]$ al conjunto $\{[f],\ f : X \to Y\}$ de clases de funciones continuas de X a Y módulo homotopía ($[f] = [g]$ si $f \simeq g$). Si $(X,x),(Y,y)$ son espacios punteados, denotamos por simplicidad $[X,Y]'$ al conjunto de clases de funciones continuas punteadas módulo homotopía (donde las homotopías son relativas al punto base). Los puntos bases quedan implícitos en la notación. Similarmente notaremos $\pi_n(X)$ en lugar de $\pi_n(X,x)$ cuando el punto base está implícito.

Denotamos con X^Y al espacio de funciones continuas de Y a X con la topología compacto-abierta. Si los espacios son punteados usaremos la misma notación X^Y para el espacio de funciones punteadas (con la topología de subespacio de la compacto-abierta). Notar que, en el caso punteado, X^Y es un espacio punteado (el punto base es la función constante).

1. Probar la ley exponencial para espacios punteados: Dados X,Y,Z espacios punteados, con Z localmente compacto y Hausdorff, se tiene una biyección de conjuntos punteados:
$$[X \wedge Z, Y]' \equiv [X, Y^Z]'$$
donde $X \wedge Z$ es el espacio punteado $\frac{X\times Z}{X\times\{z_0\}\vee\{x_0\}\times Z}$.

2. Recordar que la suspensión reducida de un espacio punteado X es $SX = S^1 \wedge X$ y que ΩY es el espacio de lazos del espacio punteado Y. Probar la adjunción de S y Ω: Dados X,Y espacios punteados, probar que se tiene una biyección (natural) $[SX,Y]' \equiv [X,\Omega Y]'$. Más aún, esa biyección es un isomorfismo de grupos, con las estructuras inducidas por la estructura de H-cogrupo de SX y la de H-grupo de ΩY.

3. Probar que, si $n \geq 2$, $\Omega^n Y$ es un H-grupo conmutativo (un H-grupo K es conmutativo si $\mu T \simeq \mu$, donde $\mu : K \times K \to K$ es la multiplicación y $T : K \times K \to K \times K$ es la función $T(x,y) = (y,x)$). Similarmente, para $n \geq 2$ la suspensión reducida iterada $S^n X$ es un H-cogrupo conmutativo.

4. Probar que las equivalencias homotópicas $f : X \to Y$ son equivalencias débiles (es decir, inducen isomofismos $f_* : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ para todo $n \geq 0$ y para todo punto base $x \in X$).

5. Probar que, dado un grupo G (abeliano o no), existe un par topológico (X,A) tal que $\pi_2(X,A) = G$.

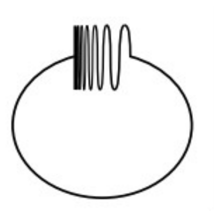
6. Sean $X = \mathbb{R}P^2,\ Y = S^2 \times \mathbb{R}P^\infty$ (notar que ambos son CW-complejos). Probar que $\pi_n(X) \equiv \pi_n(Y)$ para todo n pero X e Y no son homotópicamente equivalentes dado que sus grupos de homología no son isomorfos. (Sugerencia: no calcular explícitamente ni los grupos de homotopía ni los de homología de Y, usar revestimientos para probar el isomorfismo en grupos de homotopía y que se tiene una retracción $r : Y \to \mathbb{R}P^\infty$ para probar lo de homología).

7. Sea (X,A) un CW-par y $f : A \to Y$ continua, con Y arco-conexo. Supongamos que para todo n tal que exista alguna n-celda en $X - A$, se tiene que $\pi_{n-1}(Y) = 0$. Probar que f se puede extender a una función continua $\tilde{f} : X \to Y$.

8. Sea $f : Y \to Z$ una equivalencia débil. Probar que para todo CW-complejo X, f induce una biyección $f_* : [X,Y] \to [X,Z]$.

9. Sea $p : \tilde{X} \to X$ revestimiento, $A \subset X$ subespacio y $\tilde{A} = p^{-1}(A) \subset \tilde{X}$. Probar que p induce isomorfismos $p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{A}) \to \pi_n(X, A)$ para todo $n \geq 2$ (y para todo punto base en $\tilde{A}$).

10. Sea X el cuasi-círculo (o círculo de Varsovia), que es el subespacio de $\mathbb{R}^2$ que se obtiene tomando una porción del gráfico de $y = sen(1/x)$ (por ejemplo para $x \in (0, 1/2\pi]$), el segmento $[-1, 1]$ en el eje Y y un arco que une a ambos (ver la figura).



Probar que $\pi_n(X) = 0$ para todo n y que X no es contráctil (esto prueba que X no tiene el tipo homotópico de un CW-complejo).

11. Sea X un CW complejo y $A \subset X$ un subcomplejo contráctil. Probar que existe una retracción continua $r : X \to A$ (es decir, $ri = 1_A$).

12. Sea X un CW complejo punteado y SX la suspensión reducida de X. Notar que SX es también un CW complejo. Consideremos las inclusiones de subcomplejos:
$$X \subset SX \subset S^2X \subset \ldots \subset S^nX \subset S^{n+1}X \subset \ldots$$
donde S^nX es la suspensión iterada de X (n veces). Definimos $S^\infty X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^nX$. Probar que $S^\infty X$ es contráctil.

13. El objetivo de este ejercicio guiado es probar que, si $n \geq 2$, $\pi_n(\bigvee_{\alpha\in\Lambda} S^n) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \mathbb{Z}$ (usando que $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$).
    a) Probar primero el caso Λ finito. Para eso considerar la estructura celular de S^n con una 0-celda y una n-celda y darle la estructura inducida al espacio $\prod_\alpha S^n$ (donde las celdas son productos de las celdas de cada copia de S^n). Notar que $\prod_\alpha S^n$ tiene celdas solamente en dimensiones múltiplos de n. Deducir de esto que el CW par $(\prod_\alpha S^n, \bigvee_\alpha S^n)$ es $(2n-1)$-conexo.
    b) Siguiendo con el caso finito, utilizando la sucesión exacta larga de grupos de homotopía, deducir del ítem anterior que $\pi_n(\bigvee_\alpha S^n) = \pi_n(\prod_\alpha S^n) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \mathbb{Z}$.
    c) Deducir el caso general del caso finito, considerando el morfismo $\phi : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \pi_n(S^n) \to \pi_n(\bigvee_{\alpha\in\Lambda} S^n)$ inducido por las inclusiones $i_\alpha : S^n \to \bigvee_{\alpha\in\Lambda} S^n$ y usando argumentos de compacidad para probar sobreyectividad e inyectividad.

14. El objetivo de este ejercicio es probar que, para $n \geq 2$, $\pi_n(S^1 \vee S^n) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ (los polinomios de Laurent en la variable t). Para eso vamos a usar que para todo espacio punteado X y todo $n \geq 2$, $\pi_n(X)$ es un $\pi_1(X)$-módulo con la acción $[\gamma].[f] = [\hat{\gamma}(f)]$ donde $\hat{\gamma}$ es la conjugación (achicando el dominio de f a un cubo concéntrico e insertando radialmente el camino γ como se hizo para probar el cambio de punto base). Para probar el resultado, describir el revestimiento universal de $S^1 \vee S^n$, utilizar el ejercicio anterior y notar que $\pi_n(S^1 \vee S^n)$ es un $\pi_1(S^1 \vee S^n)$-módulo libre de rango uno. Deducir de este ejemplo que, a diferencia de lo que sucede con el π_1 y con los grupos de homología, para $n \geq 2$ los grupos de homotopía $\pi_n(X)$ de un CW complejo compacto X no son necesariamente finitamente generados.